Géométrie du triangle à l'aide des coordonnées aréolaires

Marc Renaud

Géométrie du triangle à l'aide des coordonnées aréolaires

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

1 Introduction

Ce rapport présente la géométrie du triangle et, notamment, la position de quelques uns de ses points particuliers (centre du cercle inscrit, centre de gravité ou barycentre, centre du cercle circonscrit, orthocentre, etc).
En fait le nombre de points particuliers est considérable et on peut toujours en créer de nouveaux. C. Kimberling, dans son encyclopédie des centres de triangles [6] en dénombre 39474 au 01/09/20. Tous les points sont repérés par des coordonnées. On peut utiliser deux coordonnées (par exemple cartésiennes) dans un repère plan orthonormé particulier, mais ce choix détruit une certaine symétrie et dépend trop du repère considéré. Il est préférable d'utiliser, comme l'a suggéré J. Plücker (1801-1868) en 1835, trois coordonnées redondantes (il utilise, en fait, les coordonnées trilinéaires). Par exemple les coordonnées trilinéaires, les coordonnées trilinéaires normalisées (dont la somme est égale à un), les coordonnées barycentriques, les coordonnées barycentriques normalisées appelées aréolaires (dont la somme est égale à un), les coordonnées tripolaires, les coordonnées tripolaires normalisées (dont la somme est égale à un), les coordonnées orthocentriques [8] [1], etc.

Ces divers types de coordonnées sont présentés par la suite, mais notre choix s'est porté sur les trois coordonnées aréolaires.

1. p. 128

2 Notations générales

ssi signifie : si et selement si.

$\triangleq$ signifie : égal par définition.

[L] représente une longueur, $[L]^2$ une surface, $[L]^3$ un volume, ...

Les lettres latines majuscules penchées, éventuellement munies d'indices inférieurs, (et les lettres grecques majuscules, éventuellement munies d'indices supérieurs, Ω, $\Omega^{'}$, ...) représentent les points quelconques ou particuliers du triangle ; par exemple P, Q, A, B, C, ...Ω, $\Omega^{'}$, $\Omega^{''}$.

Les lettres latines majuscules droites et la lettre grecque majuscule Δ représentent des grandeurs de dimensions $[L]^k$ pour k entier quelconque ; par exemple D, J, S, ...

Les lettres latines minuscules, éventuellement munies d'indices inférieurs, représentent les distances entre points quelconques ou particuliers du triangle, de dimensions [L] ; par exemple, a, m_1, h_a, ... ou des grandeurs de dimensions $[L]^k$ pour k entier quelconque ; par exemple q_1, ...

Les lettres grecques minuscules (sauf λ), éventuellement munies d' indices inférieurs, représentent des angles ; par exemple α, ω, ...

La lettre grecque minuscule λ représente une constante quelconque sans dimension.

Les bi-points ou vecteurs sont représentés surmontés d'une flêche, par exemple $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{V}$, etc.

$(\vec{V}, \vec{W})$ représente l'angle des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

$||\vec{V}||$ représente la norme euclidienne, i.e. la longueur, du vecteur $\vec{V}$.

(PQ) représente la droite passant par les points Pet Q.

$[PQ]$ représente le segment de droite compris entre les points P et Q.

3 Définitions et premières relations

Soient A, B, C les sommets du triangle ABC et a, b, c les cotés de ce triangle, de dimensions [L], respectivement opposés à ces sommets et α, β, γ les angles aux sommets A, B, C, donc tels que :

$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, sans dimension. On a :

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

On pose :

$s \triangleq \frac{1}{2}(a+b+c)$ semi-périmètre du triangle ABC, de dimension [L].

$a' \triangleq \frac{1}{2}(-a+b+c)$, $b' \triangleq \frac{1}{2}(a-b+c)$, $c' \triangleq \frac{1}{2}(a+b-c)$, de dimensions [L].

$q_1 \triangleq -a^2+b^2+c^2$, $q_2 \triangleq -b^2+c^2+a^2$, $q_3 \triangleq -c^2+a^2+b^2$, de dimensions $[\mathrm{L}]^2$ [3] [2].

Soit Δ l'aire du triangle ABC.

3.1 Définitions relatives aux points quelconques ou particuliers du triangle

Pour tout point quelconque P du triangle soient :

• P_a, P_b, P_c les projections orthogonales du point P respectivement sur les cotés (BC), (CA), (AB),

• P_A, P_B, P_C les intersections respectives des droites (AP) et (BC), (BP) et (CA), (CP) et (AB),

• P_{CA} et P_{BA}, P_{AB} et P_{CB}, P_{BC} et P_{AC} les intersections respectives des parallèles menées par le point P au coté (BC) avec les cotés (CA) et (BA), au coté (CA) avec les cotés (AB) et (CB), au coté (AB) avec les cotés (BC) et (AC).

$\Delta_a(P)$ l'aire du triangle PBC, $\Delta_b(P)$ l'aire du triangle PCA, Δ_c l'aire du triangle PAB. On a :

$\Delta_a(A) = \Delta_b(B) = \Delta_c(C) = \Delta$ et
$\Delta_a(P) + \Delta_b(P) + \Delta_c(P) = \Delta$.

2. p. 70 et p. 84

Soient $\omega_1(P) \triangleq (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$, $\omega_2(P) \triangleq (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA})$, $\omega_3(P) \triangleq (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$. On a :

$\omega_1(P) + \omega_2(P) + \omega_3(P) = 2\,\pi$.

On pose les mêmes définitions pour tout autre point quelconque ou particulier du triangle.

3.2 Diverses coordonnées des points quelconques ou particuliers du triangle et définitions associées

Pour tout point queconque P du triangle soient :

• $p_a \triangleq ||\overrightarrow{PP_a}||$, $p_b \triangleq ||\overrightarrow{PP_b}||$, $p_c \triangleq ||\overrightarrow{PP_c}||$ sont les trois coordonnées trilinéaires du point P. On a :

$\Delta_a(P) = \frac{1}{2}\,a\,p_a$, $\Delta_b(P) = \frac{1}{2}\,b\,p_b$, $\Delta_c(P) = \frac{1}{2}\,c\,p_c$.

• $\lambda\,a\,p_a = 2\,\lambda\,\Delta_a(P)$, $\lambda\,b\,p_b = 2\,\lambda\,\Delta_b(P)$, $\lambda\,c\,p_c = 2\,\lambda\,\Delta_a(P)$; $\forall\lambda$ sont les trois coordonnées barycentriques du point P.

• $x_1(P) \triangleq \frac{\Delta_a(P)}{\Delta}$, $x_2(P) \triangleq \frac{\Delta_b(P)}{\Delta}$, $x_3(P) \triangleq \frac{\Delta_c(P)}{\Delta}$ sont les trois coordonnées aréolaires du point P ; il s'agit des coordonnées barycentriques qui correspondent à $\lambda = \frac{1}{2\,\Delta}$. On a :

$x_1(P) + x_2(P) + x_3(P) = 1$ et on note $P = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix}$.

Alors le *conjugé isogonal* du point P est, par définition, le point de coordonnées aréolaires $\begin{pmatrix} \frac{a^2\,x_2(P)\,x_3(P)}{a^2\,x_2(P)\,x_3(P)+b^2\,x_3(P)\,x_1(P)+c^2\,x_1(P)\,x_2(P)} \\ \frac{b^2\,x_3(P)\,x_1(P)}{a^2\,x_2(P)\,x_3(P)+b^2\,x_3(P)\,x_1(P)+c^2\,x_1(P)\,x_2(P)} \\ \frac{c^2\,x_1(P)\,x_2(P)}{a^2\,x_2(P)\,x_3(P)+b^2\,x_3(P)\,x_1(P)+c^2\,x_1(P)\,x_2(P)} \end{pmatrix}$.

• $p_A \triangleq ||\overrightarrow{PA}||$, $p_B \triangleq ||\overrightarrow{PB}||$, $p_C \triangleq ||\overrightarrow{PC}||$ sont les trois coordonnées tripolaires du point P.

On pose les mêmes définitions pour tout autre point quelconque ou particulier du triangle.

3.3 Coordonnées aréolaires de certains points associés aux points quelconques ou particuliers du triangle

Pour tout point quelconque P du triangle et étant donné que $P = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix}$ on montre que :

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_2}{2\,a^2}\,x_2(P) + \frac{q_3}{2\,a^2}\,[1 - x_3(P)] \\ \frac{q_2}{2\,a^2}\,[1 - x_2(P)] + \frac{q_3}{2\,a^2}\,x_3(P) \end{pmatrix}, P_b = \begin{pmatrix} \frac{q_3}{2\,b^2}\,[1 - x_3(P)] + \frac{q_1}{2\,b^2}\,x_1(P) \\ 0 \\ \frac{q_3}{2\,b^2}\,x_3(P) + \frac{q_1}{2\,b^2}\,[1 - x_1(P)] \end{pmatrix},$$

$$P_c = \begin{pmatrix} \frac{q_1}{2\,c^2}\,x_1(P) + \frac{q_2}{2\,c^2}\,[1 - x_2(P)] \\ \frac{q_1}{2\,c^2}\,[1 - x_1(P)] + \frac{q_2}{2\,c^2}\,x_2(P) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_2(P)}{1-x_1(P)} \\ \frac{x_3(P)}{1-x_1(P)} \end{pmatrix}, P_B = \begin{pmatrix} \frac{x_1(P)}{1-x_2(P)} \\ 0 \\ \frac{x_3(P)}{1-x_2(P)} \end{pmatrix}, P_C = \begin{pmatrix} \frac{x_1(P)}{1-x_3(P)} \\ \frac{x_2(P)}{1-x_3(P)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{CA} = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ 0 \\ 1 - x_1(P) \end{pmatrix}, P_{AB} = \begin{pmatrix} 1 - x_2(P) \\ x_2(P) \\ 0 \end{pmatrix}, P_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - x_3(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix}.$$

$$P_{BA} = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ 1 - x_1(P) \\ 0 \end{pmatrix}, P_{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(P) \\ 1 - x_2(P) \end{pmatrix}, P_{AC} = \begin{pmatrix} 1 - x_3(P) \\ 0 \\ x_3(P) \end{pmatrix}.$$

On fait de même, bien entendu, pour tout autre point quelconque ou particulier du triangle.

3.4 Autres définitions et relations

3.4.1 Définitions

I centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On constate que I_a est le point du segment $[BC]$ situé à la distance $b^{'}$ du point B et à la distance $c^{'}$ du point C, que I_b est le point du segment $[CA]$ situé à la distance $c^{'}$ du point C et à la distance $a^{'}$ du point A, que I_c est le point du segment $[AB]$ situé à la distance $a^{'}$ du point A et à la distance $b^{'}$ du point B.

$I_aI_bI_c$ est le *triangle de contact.*

r rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC, de dimension [L].

J_1, J_2, J_3 centres des cercles exinscrits au triangle ABC, opposés aux sommets A, B, C.

r_1, r_2, r_3 rayons des cercles exinscrits au triangle ABC, de dimensions [L].

$J_1 J_2 J_3$ est le *triangle excentral.*

r_T rayon du cercle inscrit dans le triangle tangent extérieurement aux trois cercles exinscrits.

G centre de gravité ou barycentre du triangle ABC.

O centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

R rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, de dimension [L].

$\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ triangle anticomplémentaire au triangle ABC i.e. le triangle dont les cotés $(\tilde{B}\tilde{C})$, $(\tilde{C}\tilde{A})$, $(\tilde{A}\tilde{B})$ sont respectivement parallèles aux cotés (BC), (CA), (AB) et tel que $A \in (\tilde{B}\tilde{C})$, $B \in (\tilde{C}\tilde{A})$, $C \in (\tilde{A}\tilde{B})$.

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ triangle tangentiel au triangle ABC ; il est tangent en A, B, C au cercle circonscrit au triangle ABC et soient $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ les cotés respectifs de ce triangle, opposés aux sommets $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$.

$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ points tels que les triangles $B\hat{A}C$, $C\hat{B}A$, $A\hat{C}B$ sont équilatéraux directs. $\check{A}$, $\check{B}$, $\check{C}$ points tels que les triangles $B\check{A}C$, $C\check{B}A$, $A\check{C}B$ sont équilatéraux inverses.

ω angle de Brocard (défini ci-après).

3.4.2 Définitions et relations

J $\triangleq \frac{\sqrt{(a^6+b^6+c^6)-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)-(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)+3\,a^2\,b^2\,c^2}}{a\,b\,c}$, sans dimension.

D $\triangleq (b-c)\,(c-a)\,(a-b) = -(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$, de dimension $[\mathrm{L}]^3$

S $\triangleq a^2\,q_1 + b^2\,q_2 + c^2\,q_3 \triangleq q_2\,q_3 + q_3\,q_1 + q_1\,q_2$
$\triangleq -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2)$
$= (a+b+c)\,[-(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + \,a\,b^2) - 2\,a\,b\,c]$
$= 2\,s\,[(2\,a')\,(2\,b')\,(2\,c')]$, de dimension $[\mathrm{L}]^4$.

$\cot(\omega) \triangleq \cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma)$. Cet angle a été utilisé par K. F. A. Jacobi en 1886 [1] [3].

3.4.3 Les polynômes symétriques en a, b, c

Ces polynômes, de degré i, sont notés $d_{i,j}$, ils sont classés selon les puissances décroissantes de a et sont indiqués en Annexe A pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16$ seuls utiles pour la suite. Sont également indiqués en Annexe A leurs valeurs en fonction de s, r, R pour $i \leqslant 9$ seules utiles pour la suite.

3. p. 94 "Brocard Henri 1845-1922"

4 Formules classiques du triangle

4.1 Lois des cosinus

4.1.1 Première loi des cosinus

$a = b\ \cos(\gamma) + c\ \cos(\beta)$, $b = c\ \cos(\alpha) + a\ \cos(\gamma)$, $c = a\ \cos(\beta) + b\ \cos(\alpha)$.

4.1.2 Seconde loi des cosinus

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\ \cos(\alpha)$,
$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\ \cos(\beta)$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\ \cos(\gamma)$.

Alors les lois des cosinus s'écrivent :

$\cos(\alpha) = \frac{q_1}{2\,b\,c}$, $\cos(\beta) = \frac{q_2}{2\,c\,a}$, $\cos(\gamma) = \frac{q_3}{2\,a\,b}$.

4.2 Lois des sinus

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2\,\mathrm{R}$.

4.3 Lois des tangentes ou règle de Napier

En fait ces lois sont dues à Viète.

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}$, $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan(\frac{\beta+\gamma}{2})}{\tan(\frac{\beta-\gamma}{2})}$, $\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan(\frac{\gamma+\alpha}{2})}{\tan(\frac{\gamma-\alpha}{2})}$.

4.4 Lois des cotangentes

$\cot(\frac{\alpha}{2}) = \frac{a'}{r}$, $\cot(\frac{\beta}{2}) = \frac{b'}{r}$, $\cot(\frac{\gamma}{2}) = \frac{c'}{r}$.

4.5 Valeurs des lignes trigonométriques

$\cos(\alpha) = \frac{q_1}{2\,b\,c}$, $\cos(\beta) = \frac{q_2}{2\,c\,a}$, $\cos(\gamma) = \frac{q_3}{2\,a\,b}$.

$\sin(\alpha) = \frac{a}{2\,\mathrm{R}}$, $\sin(\beta) = \frac{b}{2\,\mathrm{R}}$, $\sin(\gamma) = \frac{c}{2\,\mathrm{R}}$.

$\sec(\alpha) = \frac{2\,b\,c}{q_1}$, $\sec(\beta) = \frac{2\,c\,a}{q_2}$, $\sec(\gamma) = \frac{2\,a\,b}{q_3}$.

$\csc(\alpha) = \frac{2\,\mathrm{R}}{a}$, $\csc(\beta) = \frac{2\,\mathrm{R}}{b}$, $\csc(\gamma) = \frac{2\,\mathrm{R}}{c}$.

$\tan(\alpha) = \frac{4\,\Delta}{q_1}$, $\tan(\beta) = \frac{4\,\Delta}{q_2}$, $\tan(\gamma) = \frac{4\,\Delta}{q_3}$ (la valeur de Δ est indiquée ci-après).

$\cot(\alpha) = \frac{q_1}{4\,\Delta}$, $\cot(\beta) = \frac{q_2}{4\,\Delta}$, $\cot(\gamma) = \frac{q_3}{4\,\Delta}$ (la valeur de Δ est indiquée ci-après).

$\cos(\beta-\gamma) = \frac{\mathrm{S}-a^2\,q_1}{2\,a^2\,b\,c}$, $\cos(\gamma-\alpha) = \frac{\mathrm{S}-b^2\,q_2}{2\,b^2\,c\,a}$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{S}-c^2\,q_3}{2\,c^2\,a\,b}$.

4.6 Autres relations

$\Delta = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \sqrt{s\,a'\,b'\,c'}$ (formule de Héron).
i.e. $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$.

$\mathrm{S} = (4\,\Delta)^2 = 2\,s\,[(2\,a')\,(2\,b')\,(2\,c'].$

$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}{a+b+c}}$,
$r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{\Delta}{a'}$, $r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{\Delta}{b'}$, $r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{\Delta}{c'}$.

$\mathrm{R} = \frac{a\,b\,c}{4\,\Delta}$ [8] [4], donc : $r\,\mathrm{R} = \frac{a\,b\,c}{4\,s}$ et $\mathrm{R}^2 = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{\mathrm{S}}$.

$\mathrm{R} = \frac{1}{4}\,(-r + r_1 + r_2 + r_3)$

$r_T = r + 2\,\mathrm{R} = \frac{1}{2}\,(r + r_1 + r_2 + r_3)$.

$||\overrightarrow{OI}||^2 = \mathrm{R}\,(-2\,r + \mathrm{R})$ Formule du triangle d'Euler [8] [5].

$||\overrightarrow{OI}||^2 + ||\overrightarrow{OJ_1}||^2 + ||\overrightarrow{OJ_2}||^2 + ||\overrightarrow{OJ_3}||^2 = 12\,\mathrm{R}^2$ [8] [6].

4.7 Relations faisant intervenir l'angle de Brocard ω

Avec les notations d_i définies ci-après :

$\cos(\omega) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2}} = \frac{d_6}{2\sqrt{d_{39}}}$,
$\sin(\omega) = \frac{2\sqrt{s\,a'\,b'\,c'}}{\sqrt{b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2}} = \frac{2\,\Delta}{\sqrt{d_{39}}}$,
$\tan(\omega) = \frac{4\sqrt{s\,a'\,b'\,c'}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{4\,\Delta}{d_6}$,
$\cot(\omega) = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{s\,a'\,b'\,c'}} = \frac{d_6}{4\,\Delta}$,
$\sec(\omega) = \frac{2\sqrt{b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2\sqrt{d_{39}}}{d_6}$,
$csc(\omega) = \frac{\sqrt{b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2}}{2\sqrt{s\,a'\,b'\,c'}} = \frac{\sqrt{d_{39}}}{2\,\Delta}$. Donc :

4. p. 259 et p. 1835 éq. (12)
5. p. 587 "Euler Triangle Formula"
6. p. 591

$\cot(\omega) \triangleq \cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma)$
$= \frac{1+\cos(\alpha)\ \cos(\beta)\ \cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\ \sin(\beta)\ \sin(\gamma)} = \frac{\sin^2(\alpha)+\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}{2\ \sin(\alpha)\ \sin(\beta)\ \sin(\gamma)} = \frac{s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})}{2\,s\,r}$.
$\csc^2(\omega) = \csc^2(\alpha) + \csc^2(\beta) + \csc^2(\gamma)$.
$\tan(\omega) = \frac{\sin(\alpha)\ \sin(\beta)\ \sin(\gamma)}{1+\cos(\alpha)\ \cos(\beta)\ \cos(\gamma)} = \frac{2\ \sin(\alpha)\ \sin(\beta)\ \sin(\gamma)}{\sin^2(\alpha)+\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}$.
$\sin^3(\omega) = \sin(\alpha-\omega)\ \sin(\beta-\omega)\ \sin(\gamma-\omega)$.
$||\overrightarrow{O\Omega}|| = ||\overrightarrow{O\Omega'}|| = \mathrm{R}\,\sqrt{1-4\sin^2(\omega)}$ [8] [7].
$||\overrightarrow{\Omega\Omega'}|| = 2\,\mathrm{R}\ \sin(\omega)\ \sqrt{1-4\sin^2(\omega)}$ [8] [8].

4.8 Quelques distances particulières du triangle, de dimensions [L]

4.8.1 Longueurs des bissectrices intérieures

On pourra consulter [7] [9]

$f_1 \triangleq ||\overrightarrow{AI_A}|| = \frac{2\sqrt{s\,a'\,b\,c}}{b+c}$, $f_2 \triangleq ||\overrightarrow{BI_B}|| = \frac{2\sqrt{s\,b'\,c\,a}}{c+a}$, $f_3 \triangleq ||\overrightarrow{CI_C}|| = \frac{2\sqrt{s\,c'\,a\,b}}{a+b}$.

On a $f_1\,f_2\,f_3 = \frac{8\,s^2\,r\,a\,b\,c}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}$.

4.8.2 Longueurs des médianes

On pourra consulter [7] [10] [8] [11].

$m_1 \triangleq ||\overrightarrow{AG_A}|| = ||\overrightarrow{AO_a}|| = \frac{\sqrt{2\,(b^2+c^2)-a^2}}{2}$ [8] [12],
$m_2 \triangleq ||\overrightarrow{BG_B}|| = ||\overrightarrow{BO_b}|| = \frac{\sqrt{2\,(c^2+a^2)-b^2}}{2}$,
$m_3 \triangleq ||\overrightarrow{CG_C}|| = ||\overrightarrow{CO_c}|| = \frac{\sqrt{2\,(a^2+b^2)-c^2}}{2}$.

On a $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \frac{3}{4}\,(a^2+b^2+c^2)$ [8] [13].

Soit $s_m \triangleq \frac{1}{2}\,(m_1+m_2+m_3)$ [8] [14] alors :
$\Delta = \frac{4}{3}\,\sqrt{s_m\,(s_m-m_1)\,(s_m-m_2)\,(s_m-m_3)}$ [8] [15]

7. p. 175 éq. (1)
8. p. 175 éq. (2)
9. p. 1724
10. p. 1724
11. p. 1155 “Median(Triangle)”
12. p. 1155 éq. (1) “Median(Triangle)”
13. p. 1155 éq. (2) “Median(Triangle)”
14. p. 1155 éq. (4) “Median(Triangle)”
15. p. 1155 éq. (3) “Median(Triangle)”

4.8.3 Distances du point O aux cotés

Rappel $o_a \triangleq ||\overrightarrow{OO_a}||$, $o_b \triangleq ||\overrightarrow{OO_b}||$, $O_c \triangleq ||\overrightarrow{OO_c}||$. On a :

$o_a = \frac{a\, q_1}{8\, \Delta}$, $o_b = \frac{b\, q_2}{8\, \Delta}$, $o_c = \frac{c\, q_3}{8\, \Delta}$.

4.8.4 Hauteurs (i.e. longueurs des hauteurs)

Rappel $a_a \triangleq ||\overrightarrow{AA_a}||$ (et $a_b = a_c = 0$), $b_b \triangleq ||\overrightarrow{BB_b}||$ (et $b_c = b_a = 0$), $c_c \triangleq ||\overrightarrow{CC_c}||$ (et $c_a = c_b = 0$). On a :

$a_a = \frac{2\, \Delta}{a}$, $b_b = \frac{2\, \Delta}{b}$, $c_c = \frac{2\, \Delta}{c}$.

On a $\frac{1}{r} = \frac{1}{a_a} + \frac{1}{b_b} + \frac{1}{c_c} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$, relation due à Johnson en 1929 [16] [7] [17].

4.8.5 Distances du point H aux cotés

Rappel :
$h_a \triangleq ||\overrightarrow{HH_a}|| \triangleq ||\overrightarrow{HA_a}||$, $h_b \triangleq ||\overrightarrow{HH_b}|| \triangleq ||\overrightarrow{HB_b}||$, $h_c \triangleq ||\overrightarrow{HH_c}|| \triangleq ||\overrightarrow{HC_c}||$. On a :

$h_a = \frac{q_2\, q_3}{8\, a\, \Delta}$, $h_b = \frac{q_3\, q_1}{8\, b\, \Delta}$, $h_c = \frac{q_1\, q_2}{8\, c\, \Delta}$.

16. p. 189
17. p. 1724

5 Coordonnées aréolaires de quelques points particuliers du triangle

Pour tout couple $(P,\, Q)$ de points soient :

$$\mathrm{Cross}(P,\, Q) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{x_1(P)\,x_1(Q)\,[x_2(P)\,x_3(Q)+x_3(P)\,x_2(Q)]}{d_{\mathrm{Cross}}} \\ \frac{x_2(P)\,x_2(Q)\,[x_3(P)\,x_1(Q)+x_1(P)\,x_3(Q)]}{d_{\mathrm{Cross}}} \\ \frac{x_3(P)\,x_3(Q)\,[x_1(P)\,x_2(Q)+x_2(P)\,x_1(Q)]}{d_{\mathrm{Cross}}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{\mathrm{Cross}} = x_1(P)\,x_1(Q)\,[x_2(P)\,x_3(Q) + x_3(P)\,x_2(Q)]$
$+ x_2(P)\,x_2(Q)\,[x_3(P)\,x_1(Q) + x_1(P)\,x_3(Q)]$
$+ x_3(P)\,x_3(Q)\,[x_1(P)\,x_2(Q) + x_2(P)\,x_1(Q)]$.

$$\mathrm{Ceva}(P,\, Q) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{[x_1(P)\,x_2(Q)+x_2(P)\,x_1(Q)]\,[x_1(P)\,x_3(Q)+x_3(P)\,x_1(Q)]}{d_{\mathrm{Ceva}}} \\ \frac{[x_2(P)\,x_3(Q)+x_3(P)\,x_2(Q)]\,[x_2(P)\,x_1(Q)+x_1(P)\,x_2(Q)]}{d_{\mathrm{Ceva}}} \\ \frac{[x_3(P)\,x_1(Q)+x_1(P)\,x_3(Q)]\,[x_3(P)\,x_2(Q)+x_2(P)\,x_3(Q)]}{d_{\mathrm{Ceva}}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{\mathrm{Ceva}} = [x_1(P)\,x_2(Q) + x_2(P)\,x_1(Q)]\,[x_1(P)\,x_3(Q) + x_3(P)\,x_1(Q)]$
$+ [x_2(P)\,x_3(Q) + x_3(P)\,x_2(Q)]\,[x_2(P)\,x_1(Q) + x_1(P)\,x_2(Q)]$
$+ [x_3(P)\,x_1(Q) + x_1(P)\,x_3(Q)]\,[x_3(P)\,x_2(Q) + x_2(P)\,x_3(Q)]$.

5.1 Points qui ne sont pas des centres au sens de C. Kimberling [5] [6]

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\; \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{q_1} \\ \frac{b^2}{q_1} \\ \frac{c^2}{q_1} \end{pmatrix},\; \bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{q_2} \\ -\frac{b^2}{q_2} \\ \frac{c^2}{q_2} \end{pmatrix},\; \bar{C} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{q_3} \\ \frac{b^2}{q_3} \\ -\frac{c^2}{q_3} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}\,a^2}{4\,\Delta} \\ \frac{1}{2}\,(1 + \frac{\sqrt{3}\,q_3}{4\,\Delta}) \\ \frac{1}{2}\,(1 + \frac{\sqrt{3}\,q_2}{4\,\Delta}) \end{pmatrix},\; \hat{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(1 + \frac{\sqrt{3}\,q_3}{4\,\Delta}) \\ -\frac{\sqrt{3}\,b^2}{4\,\Delta} \\ \frac{1}{2}\,(1 + \frac{\sqrt{3}\,q_1}{4\,\Delta}) \end{pmatrix},\; \hat{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(1 + \frac{\sqrt{3}\,q_2}{4\,\Delta}) \\ \frac{1}{2}\,(1 + \frac{\sqrt{3}\,q_1}{4\,\Delta}) \\ -\frac{\sqrt{3}\,c^2}{4\,\Delta} \end{pmatrix}.$$

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4\,\Delta} \\ \frac{1}{2}\,(1 - \frac{\sqrt{3}\,q_3}{4\,\Delta}) \\ \frac{1}{2}\,(1 - \frac{\sqrt{3}\,q_2}{4\,\Delta}) \end{pmatrix},\ \breve{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(1 - \frac{\sqrt{3}\,q_3}{4\,\Delta}) \\ \frac{\sqrt{3}\,b^2}{4\,\Delta} \\ \frac{1}{2}\,(1 - \frac{\sqrt{3}\,q_1}{4\,\Delta}) \end{pmatrix},\ \breve{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(1 - \frac{\sqrt{3}\,q_2}{4\,\Delta}) \\ \frac{1}{2}\,(1 - \frac{\sqrt{3}\,q_1}{4\,\Delta}) \\ \frac{\sqrt{3}\,c^2}{4\,\Delta} \end{pmatrix}.$$

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_3}{2\,a^2} \\ \frac{q_2}{2\,a^2} \end{pmatrix},\ B_b = \begin{pmatrix} \frac{q_3}{2\,b^2} \\ 0 \\ \frac{q_1}{2\,b^2} \end{pmatrix},\ C_c = \begin{pmatrix} \frac{q_2}{2\,c^2} \\ \frac{q_1}{2\,c^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.1 Premier et deuxième points de Brocard Ω et $\Omega^{'}$

On pourra consulter [3] [18] [1] [19] et [8] [20].

Les points de Brocard ont étés trouvés par Grelle en 1884.

On a $\omega_1(\Omega) = \pi - \gamma$, $\omega_2(\Omega) = \pi - \alpha$, $\omega_3(\Omega) = \pi - \beta$ et $\omega_1(\Omega^{'}) = \pi - \beta$, $\omega_2(\Omega^{'}) = \pi - \gamma$, $\omega_3(\Omega^{'}) = \pi - \alpha$.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{c^2\,a^2}{d_\Omega} \\ \frac{a^2\,b^2}{d_\Omega} \\ \frac{b^2\,c^2}{d_\Omega} \end{pmatrix},\ \text{avec } d_\Omega = (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) \text{ et :}$$

$$\Omega^{'} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,b^2}{d_{\Omega^{'}}} \\ \frac{b^2\,c^2}{d_{\Omega^{'}}} \\ \frac{c^2\,a^2}{d_{\Omega^{'}}} \end{pmatrix},\ \text{avec } d_{\Omega^{'}} = (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_\Omega.$$

5.2 Les 101 premiers points qui sont des centres au sens de C. Kimberling [5] [6]

Ils sont notés X_i, $i = 1, 2, \ldots$ et les dénominateurs de leurs coordonnées aréolaires sont notés d_i, $i = 1, 2, \ldots$. Les expressions de ces dénominateurs d_i en fonction de a, b, c et leurs valeurs en fonction des polynômes $d_{i,j}$ sont résumées en Annexe B. Les expressions de ces dénominateurs d_i en fonction de s, r, R sont résumées en Annexe C.

18. pp. 133-137 §14 “Les points, les triangles et le cercle de Brocard” où ces deux points sont notés Q et $Q^{'}$
19. p. 94 où ces deux points sont notés Q et $Q^{'}$
20. p. 175 “Brocard Points”

5.2.1 $X_1 \equiv I$ centre du cercle inscrit et points associés

On pourra consulter [5] [21] [8] [22].

$X_1 \equiv I = \begin{pmatrix} \frac{a}{d_1} \\ \frac{b}{d_1} \\ \frac{c}{d_1} \end{pmatrix}$, avec : $d_1 = (a+b+c) = d_{1,1}$.

$I_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c'}{a} \\ \frac{b'}{a} \end{pmatrix}$, $I_b = \begin{pmatrix} \frac{c'}{b} \\ 0 \\ \frac{a'}{b} \end{pmatrix}$, $I_c = \begin{pmatrix} \frac{b'}{c} \\ \frac{a'}{c} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$I_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{b+c} \\ \frac{c}{b+c} \end{pmatrix}$, $I_B = \begin{pmatrix} \frac{a}{c+a} \\ 0 \\ \frac{c}{c+a} \end{pmatrix}$, $I_C = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2\,a'} \\ \frac{b}{2\,a'} \\ \frac{c}{2\,a'} \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2\,b'} \\ -\frac{b}{2\,b'} \\ \frac{c}{2\,b'} \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2\,c'} \\ \frac{b}{2\,c'} \\ -\frac{c}{2\,c'} \end{pmatrix}$.

$J_{1a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b'}{a} \\ \frac{c'}{a} \end{pmatrix}$, $J_{1b} = \begin{pmatrix} -\frac{b'}{b} \\ 0 \\ \frac{s}{b} \end{pmatrix}$, $J_{1c} = \begin{pmatrix} -\frac{c'}{c} \\ \frac{s}{c} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$J_{2a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a'}{a} \\ \frac{s}{a} \end{pmatrix}$, $J_{2b} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{b} \\ 0 \\ \frac{c'}{b} \end{pmatrix}$, $J_{2c} = \begin{pmatrix} \frac{s}{c} \\ -\frac{c'}{c} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$J_{3a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s}{a} \\ -\frac{a'}{a} \end{pmatrix}$, $J_{3b} = \begin{pmatrix} \frac{s}{b} \\ 0 \\ -\frac{b'}{b} \end{pmatrix}$, $J_{3c} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{c} \\ \frac{b'}{c} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$J_{2A} \equiv J_{3A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{b-c} \\ -\frac{c}{b-c} \end{pmatrix}$, $J_{3B} \equiv J_{1B} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c-a} \\ 0 \\ \frac{c}{c-a} \end{pmatrix}$, $J_{1C} \equiv J_{2C} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-b} \\ -\frac{b}{a-b} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Centres des cercles d'Apollonius (cf. ci-après) :

$\frac{I_A+J_{2A}}{2} \equiv \frac{I_A+J_{3A}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b^2}{b^2-c^2} \\ -\frac{c^2}{b^2-c^2} \end{pmatrix}$, $\frac{I_B+J_{3B}}{2} \equiv \frac{I_B+J_{1B}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{c^2-a^2} \\ 0 \\ \frac{c^2}{c^2-a^2} \end{pmatrix}$,

$\frac{I_C+J_{1C}}{2} \equiv \frac{I_C+J_{2C}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2-b^2} \\ -\frac{b^2}{a^2-b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

21. p. 172
22. pp. 893-894 “Incenter”

$X_1 = \mathrm{Ceva}(X_6,\, X_{55}) = \mathrm{Ceva}(X_{65},\, X_{73})$ (cf. X_6, X_{55}, X_{65}, X_{73} ci-après).

5.2.2 $X_2 \equiv G$ centre de gravité ou barycentre et points associés

On pourra consulter [5] [23] [8] [24].

$$X_2 \equiv G \triangleq \tfrac{A+B+C}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_2} \\ \frac{1}{d_2} \\ \frac{1}{d_2} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_2 = 3.$$

$$G_A \triangleq \tfrac{B+C}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ G_B \triangleq \tfrac{C+A}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ G_C \triangleq \tfrac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$G_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\,a^2+b^2-c^2}{6\,a^2} \\ \frac{3\,a^2-b^2+c^2}{6\,a^2} \end{pmatrix},\ G_b = \begin{pmatrix} \frac{3\,b^2-c^2+a^2}{6\,b^2} \\ 0 \\ \frac{3\,b^2+c^2-c^2}{6\,b^2} \end{pmatrix},\ G_a = \begin{pmatrix} \frac{3\,c^2+a^2-b^2}{6\,c^2} \\ \frac{3\,c^2-a^2+b^2}{6\,c^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$X_2 = \mathrm{Ceva}(X_1,\, X_9) = \mathrm{Ceva}(X_3,\, X_6) = \mathrm{Ceva}(X_{10},\, X_{37})$
(cf. X_3, X_6, X_9, X_{10}, X_{37} ci-après).

Si P et Q sont colinéaires avec $X_2 \equiv G$ on dit que P est le *complément* de Q ssi $\overrightarrow{PQ} = 3\,\overrightarrow{PG}$ et on dit que P est *l'anticomplément* de Q ssi $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{PG}$.

5.2.3 $X_3 \equiv O$ centre du cercle circonscrit et points associés

On pourra consulter [5] [25] [8] [26].

$$X_3 \equiv O = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,q_1}{d_3} \\ \frac{b^2\,q_2}{d_3} \\ \frac{c^2\,q_3}{d_3} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_3 = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = \mathrm{S} = d_1\,d_3^{'} = -d_{4,1} + 2\,d_{4,3}$
et $d_3^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 +\ a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= -d_{3,1} + d_{3,2} - 2\,d_{3,3} = (2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})$.

$O_a \equiv G_A, O_b \equiv G_B, O_c \equiv G_C$.

On remarque que $\omega_1(O) = 2\,\alpha$, $\omega_2(O) = 2\,\beta$, $\omega_3(O) = 2\,\gamma$.

---

23. p. 172
24. pp. 221-222 "Centroid (Triangle)"
25. p. 172
26. p. 259 "Circumcenter"

5.2.4 $X_4 \equiv H$ orthocentre et points associés

On pourra consulter [5] [27] [8] [28].

$X_4 \equiv H = \begin{pmatrix} \frac{q_2\,q_3}{d_4} \\ \frac{q_3\,q_1}{d_4} \\ \frac{q_1\,q_2}{d_4} \end{pmatrix}$, avec :

$d_4 = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d_4^{'}$ et $d_4^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 2\,a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$ $= d_3^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$.

$H_a \equiv A_a, H_b \equiv B_b, H_c \equiv C_c$.

$E_1 \triangleq \frac{A+H}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{S}+q_2\,q_3}{2\,\mathrm{S}} \\ \frac{q_3\,q_1}{2\,\mathrm{S}} \\ \frac{q_1\,q_2}{2\,\mathrm{S}} \end{pmatrix}$, $E_2 \triangleq \frac{B+H}{2} = \begin{pmatrix} \frac{q_2\,q_3}{2\,\mathrm{S}} \\ \frac{\mathrm{S}+q_3\,q_1}{2\,\mathrm{S}} \\ \frac{q_1\,q_2}{2\,\mathrm{S}} \end{pmatrix}$, $E_3 \triangleq \frac{C+H}{2} = \begin{pmatrix} \frac{q_2\,q_3}{2\,\mathrm{S}} \\ \frac{q_3\,q_1}{2\,\mathrm{S}} \\ \frac{\mathrm{S}+q_1\,q_2}{2\,\mathrm{S}} \end{pmatrix}$.

$X_4 = \mathrm{Ceva}(X_1,\, X_{46}) = \mathrm{Ceva}(X_5,\, X_{52}) = \mathrm{Ceva}(X_6,\, X_{25}) = \mathrm{Ceva}(X_{19},\, X_{33})$ $= \mathrm{Ceva}(X_{51},\, X_{53})$ (cf. X_5, X_6, X_{19}, X_{25}, X_{33}, X_{46}, X_{51}, X_{53} ci-après).

Relation avec les points précédents

$X_4 = 3\,X_2 - 2\,X_3$.

On a $1 = \frac{d_4}{16\,s^2\,r^2} = \frac{d_3}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_4 \in (X_2 X_3)$ (on vera qu'il s'agit de la droite d'Euler).

Le triangle $H_a H_b H_c \equiv A_a B_b C_c$ est le triangle orthique [8] [29].

Le triangle $E_1 E_2 E_3$ est le triangle d'Euler [3] [30].

5.2.5 $X_5 \equiv N$ centre du cercle d'Euler et points associés

On pourra consulter [5] [31] [8] [32].

Le cercle d'Euler est présenté ci-après.

27. pp. 172-173
28. pp. 1285-1286 “Orthocenter”
29. pp. 1285-1286 “Orthic Triangle”
30. p. 123
31. p. 173
32. p. 1235 “Nine-Point Center”

$$X_5 \equiv N = \begin{pmatrix} \frac{S-a^2\,q_1}{2\,d_5} \\ \frac{S-b^2\,q_2}{2\,d_5} \\ \frac{S-c^2\,q_3}{2\,d_5} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_5 = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d_5^{'}$ et
$d_5^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 2\,a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= d_3^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$.

$$N_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a^2+q_3}{4\,a^2} \\ \frac{a^2+q_2}{4\,a^2} \end{pmatrix},\; N_b = \begin{pmatrix} \frac{b^2+q_3}{4\,b^2} \\ 0 \\ \frac{b^2+q_1}{4\,b^2} \end{pmatrix},\; N_c = \begin{pmatrix} \frac{c^2+q_2}{4\,c^2} \\ \frac{c^2+q_1}{4\,c^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Relations avec les points précédents

$X_5 = \frac{3\,X_2 - X_3}{2} = \frac{3\,X_2 + X_4}{4} = \frac{X_3 + X_4}{2}$.

On a $2 = \frac{d_5}{8\,s^2\,r^2} = \frac{d_3}{8\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_5 \in (X_2X_3) = (X_2X_4)$, $X_5 \in (X_3X_4)$.

5.2.6 $X_6 \equiv K$ point symédian ou point de Lemoine ou point de Grebe ou premier point puissance et points associés

On pourra consulter [5] [33] [8] [34].

$$X_6 \equiv K = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{d_6} \\ \frac{b^2}{d_6} \\ \frac{c^2}{d_6} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_6 = (a^2 + b^2 + c^2) = d_{2,\,1}.$$

$$K_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a^2+b^2}{d_6} \\ \frac{c^2}{d_6} \end{pmatrix},\; K_{CA} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{d_6} \\ 0 \\ \frac{b^2+c^2}{d_6} \end{pmatrix},\; K_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{c^2+a^2}{d_6} \\ \frac{b^2}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le triangle $K_{AB}K_{BC}K_{CA}$ est dirextement semblable au triangle ABC [3] [35].

$$K_{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b^2}{d_6} \\ \frac{c^2+a^2}{d_6} \end{pmatrix},\; K_{AC} = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{d_6} \\ 0 \\ \frac{c^2}{d_6} \end{pmatrix},\; K_{BA} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{d_6} \\ \frac{b^2+c^2}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le triangle $K_{AC}K_{BA}K_{CB}$ est directement semblable au triangle ABC [3] [36].

33. p. 173
34. pp. 1067-1068 “Lemoine Point”
35. p. 129
36. p. 127

Soient $K^*_{CB} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_3}{d_6} \\ \frac{2\,c^2}{d_6} \end{pmatrix}$, $K^*_{AC} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{2\,a^2}{d_6} \\ 0 \\ \frac{q_1}{d_6} \end{pmatrix}$, $K^*_{BA} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{q_2}{d_6} \\ \frac{2\,b^2}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors le triangle $K^*_{BA}K^*_{CB}K^*_{AC}$ est directement semblable au triangle ABC [3] [37].

On vérifie que $\overrightarrow{K^*_{AC}K^*_{CB}} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{K^*_{BA}K^*_{AC}} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{K^*_{CB}K^*_{BA}} \perp \overrightarrow{AB}$ (cf. ci-après).

Soient $K^*_{BC} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\,b^2}{d_6} \\ \frac{q_2}{d_6} \end{pmatrix}$, $K^*_{CA} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{q_3}{d_6} \\ 0 \\ \frac{2\,c^2}{d_6} \end{pmatrix}$, $K^*_{AB} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{2\,a^2}{d_6} \\ \frac{q_1}{d_6} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors le triangle $K^*_{CA}K^*_{AB}K^*_{BC}$ est directement semblable au triangle ABC.

On vérifie que $\overrightarrow{K^*_{AB}K^*_{BC}} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{K^*_{BC}K^*_{CA}} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{K^*_{CA}K^*_{AB}} \perp \overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{K^*_{AB}K^*_{BC}} = \overrightarrow{K^*_{AC}K^*_{CB}}$, $\overrightarrow{K^*_{BC}K^*_{CA}} = \overrightarrow{K^*_{BA}K^*_{AC}}$, $\overrightarrow{K^*_{CA}K^*_{AB}} = \overrightarrow{K^*_{CB}K^*_{BA}}$.

$X_6 = \mathrm{Ceva}(X_1,\, X_{43}) = \mathrm{Ceva}(X_{31},\, X_{41})$ (cf. X_{31}, X_{41}, X_{43} ci-après).

Relation avec les points précédents

$X_6 = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 6\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 2\,r^2\,X_3}{s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) = \frac{1}{2}\,d_6$.

5.2.7 $X_7 \equiv Ge$ point de Gergonne et points associés

On pourra consulter [5] [38] [8] [39].

$X_7 \equiv Ge = \begin{pmatrix} \frac{(2\,b')\,(2\,c')}{d_7} \\ \frac{(2\,c')\,(2\,a')}{d_7} \\ \frac{(2\,a')\,(2\,b')}{d_7} \end{pmatrix}$, avec :

$d_7 = -(a^2+b^2+c^2) + 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = -d_{2,1} + 2\,d_{2,2}$.

$Ge_A \equiv I_a$, $Ge_B \equiv I_b$, $Ge_C \equiv I_c$.

$X_7 = \mathrm{Ceva}(X_1,\, X_{57})$ (cf. X_{57} ci-après).

Relation avec les points précédents

37. p. 132
38. p. 173
39. p. 735 “Gergonne Point”

$X_7 = \frac{2\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_1+3\,r\,X_2-4\,r\,X_3}{r+4\,\mathrm{R}}$.

On a $r + 4\,\mathrm{R} = \frac{d_7}{4\,r}$.

5.2.8 $X_8 \equiv Na$ point de Nagel et points associés

On pourra consulter [5] [40] [8] [41].

$X_8 \equiv Na = \begin{pmatrix} \frac{2\,a'}{d_8} \\ \frac{2\,b'}{d_8} \\ \frac{2\,c'}{d_8} \end{pmatrix}$, avec : $d_8 = (a+b+c) = d_1 = d_{1,\,1}$.

$Na_A \equiv J_{1a}$, $Na_B \equiv J_{2b}$, $Na_C \equiv J_{3c}$.

$X_8 = \mathrm{Ceva}(X_1,\, X_{40}) = \mathrm{Ceva}(X_{10},\, X_{72})$ (cf. X_{10}, X_{40}, X_{72} ci-après).

Relation avec les points précédents

$X_8 = -2\,X_1 + 3\,X_2$.

On a $1 = \frac{d_8}{2\,s}$.

Donc $X_8 \in (X_1 X_2)$.

5.2.9 $X_9 \equiv M$ "Mittenpunkt"

On pourra consulter [5] [42] [8] [43].

$X_9 \equiv M = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,a')}{d_9} \\ \frac{b\,(2\,b')}{d_9} \\ \frac{c\,(2\,c')}{d_9} \end{pmatrix}$, avec :

$d_9 = -(a^2+b^2+c^2) + 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_7 = -d_{2,\,1} + 2\,d_{2,\,2}$.

$X_9 = \mathrm{Ceva}(X_{37},\, X_{71})$ (cf. X_{37}, X_{71} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_9 = \frac{-(r+2\,\mathrm{R})\,X_1+6\,\mathrm{R}\,X_2+2\,r\,X_3}{r+4\,\mathrm{R}} = \frac{s^2\,X_1+[-s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{3\,X_2-X_7}{2}$.

On a $r + 4\,\mathrm{R} = \frac{d_9}{4\,r}$.

Donc $X_9 \in (X_1 X_6)$, $X_9 \in (X_2 X_7)$.

---

40. p. 173
41. pp. 1213-1214 "Nagel Point"
42. p. 173
43. p. 1178 "Mittenpunkt"

5.2.10 $X_{10} \equiv Sp$ point ou centre de Spieker

On pourra consulter [5] [44] [8] [45].

$X_{10} \equiv Sp = \begin{pmatrix} \frac{b+c}{2\,d_{10}} \\ \frac{c+a}{2\,d_{10}} \\ \frac{a+b}{2\,d_{10}} \end{pmatrix}$, avec : $d_{10} = (a+b+c) = d_1 = d_{1,1}$.

$X_{10} = \mathrm{Ceva}(X_{42},\, X_{71})$ (cf. X_{42}, X_{71} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_{10} = \frac{-X_1+3\,X_2}{2} = \frac{3\,X_2+X_8}{4} = \frac{r\,X_4+(r+4\,\mathrm{R})\,X_9}{2\,(r+2\,\mathrm{R})}$.

On a $2 = \frac{d_{10}}{s}$.

Donc $X_{10} \in (X_1X_2)$, $X_{10} \in (X_2X_8)$, $X_{10} \in (X_4X_9)$.

5.2.11 $X_{11} \equiv F$ point de Feuerbach

On pourra consulter [5] [46] [8] [47].

$X_{11} \equiv F = \begin{pmatrix} \frac{(2\,a^{'})\,(b-c)^2}{2\,d_{11}} \\ \frac{(2\,b^{'})\,(c-a)^2}{2\,d_{11}} \\ \frac{(2\,c^{'})\,(a-b)^2}{2\,d_{11}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{11} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c$
$= d_{3,1} - d_{3,2} + 3\,d_{3,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{11} = \frac{\mathrm{R}\,X_1 - 3\,r\,X_2 + r\,X_3}{-2\,r+\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}\,X_1 - 2\,r\,X_5}{-2\,r+\mathrm{R}}$.

On a $-2\,r + \mathrm{R} = \frac{d_{11}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{11} \in (X_1X_5)$.

5.2.12 X_{12}

On pourra consulter [5] [48].

---

44. p. 173
45. p. 1702 “Spieker Center”
46. p. 174
47. p. 627 “Feuerbach Point”
48. p. 174

$$X_{12} = \begin{pmatrix} \frac{(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})\,(b+c)^2}{2\,d_{12}} \\ \frac{(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})\,(c+a)^2}{2\,d_{12}} \\ \frac{(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(a+b)^2}{2\,d_{12}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{12} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + a\,b\,c\,(a + b + c) = d_1\,d_{12}^{'}$
$= -d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3} + d_{4,\,4}$ et $d_{12}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b)$
$+ (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - \ a\,b\,c = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{12} = \frac{\mathrm{R}\,X_1 + 3\,r\,X_2 - r\,X_3}{2\,r + \mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}\,X_1 + 2\,r\,X_5}{2\,r + \mathrm{R}}$.

On a $2\,r + \mathrm{R} = \frac{d_{12}}{8\,s^2\,r} = \frac{d_{12}^{'}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{12} \in (X_1X_5)$.

5.2.13 $X_{13} \equiv X$ point de Fermat ou premier point de Fermat ou point de Torricelli ou premier centre isogone

On pourra consulter [5] [49] [8] [50].

La notion de centre isogone a été utilisée par A. Gérardin en 1916 [4] alors que A. Bouvier et M. George parlent de figures isogones, i.e. ayant les mêmes angles [1] [51].

$$X_{13} \equiv X = \begin{pmatrix} \frac{2\,\mathrm{S} - 3\,a^2\,q_1 + 4\,\sqrt{3}\,a^2\,\Delta}{d_{13}} \\ \frac{2\,\mathrm{S} - 3\,b^2\,q_2 + 4\,\sqrt{3}\,b^2\,\Delta}{d_{13}} \\ \frac{2\,\mathrm{S} - 3\,c^2\,q_3 + 4\,\sqrt{3}\,c^2\,\Delta}{d_{13}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{13} = 3\,d_3 + 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta = 3\,(-d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3}) + 4\,\sqrt{3}\,d_{2,\,1}\,\Delta$.

$X_{13} = \mathrm{Ceva}(X_{15},\, X_{62})$ (cf. X_{15}, X_{62} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_{13} = \frac{[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,X_1 + 2\,r\,(2\,\sqrt{3}\,s - 3\,\mathrm{R})\,X_2 - 2\,r\,(\sqrt{3}\,s + r)\,X_3}{s^2 + r\,[2\,\sqrt{3}\,s - (r + 4\,\mathrm{R})]}$.

On a $s^2 + r\,[2\,\sqrt{3}\,s - (r + 4\,\mathrm{R})] = \frac{\sqrt{3}\,d_{13}}{24\,s\,r}$.

49. p. 174
50. pp. 623-624 “Fermat Point” et p.932 “Isogonic Centers”
51. p. 411 “Isogones”

5.2.14 $X_{14} \equiv X'$ second point de Fermat ou second centre isogone

On pourra consulter [5] [52] [8] [53].

$$X_{14} \equiv X' = \begin{pmatrix} \frac{2\,\mathrm{S}-3\,a^2\,q_1-4\,\sqrt{3}\,a^2\,\Delta}{d_{14}} \\ \frac{2\,\mathrm{S}-3\,b^2\,q_2-4\,\sqrt{3}\,b^2\,\Delta}{d_{14}} \\ \frac{2\,\mathrm{S}-3\,c^2\,q_3-4\,\sqrt{3}\,c^2\,\Delta}{d_{14}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{14} = 3\,d_3 - 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta = 3\,(-d_{4,1} + 2\,d_{4,3}) - 4\,\sqrt{3}\,d_{2,1}\,\Delta.$

$X_{14} = \mathrm{Ceva}(X_{16},\ X_{61})$ (cf. X_{16}, X_{61} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_{14} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-2\,r\,(2\,\sqrt{3}\,s+3\,\mathrm{R})\,X_2+2\,r\,(\sqrt{3}\,s-r)\,X_3}{s^2-r\,[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]}$
$= \frac{2\,\sqrt{3}\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6-\{\sqrt{3}\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]+6\,s\,r\}\,X_{13}}{\sqrt{3}\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]-6\,s\,r}.$

On a $s^2 - r\,[2\,\sqrt{3}\,s + (r + 4\,\mathrm{R})] = -\frac{\sqrt{3}\,d_{14}}{24\,s\,r}$.

Donc $X_{14} \in (X_6X_{13})$.

5.2.15 $X_{15} \equiv S$ premier point isodynamique

On pourra consulter [5] [54] [8] [55].

$$X_{15} \equiv S = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(\sqrt{3}\,q_1+4\,\Delta)}{d_{15}} \\ \frac{b^2\,(\sqrt{3}\,q_2+4\,\Delta)}{d_{15}} \\ \frac{c^2\,(\sqrt{3}\,q_3+4\,\Delta)}{d_{15}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{15} = \sqrt{3}\,d_3 + 4\,d_6\,\Delta = \frac{\sqrt{3}}{3}\,d_{13} = \sqrt{3}\,(-d_{4,1} + 2\,d_{4,3}) + 4\,d_{2,1}\,\Delta.$

Relations avec les points précédents

$X_{15} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2+2\,r\,(\sqrt{3}\,s-r)\,X_3}{s^2+r\,[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]} = \frac{4\,\sqrt{3}\,s\,r\,X_2+\{s^2-r\,[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]\}\,X_{14}}{s^2+r\,[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]}$
$= \frac{2\,\sqrt{3}\,s\,r\,X_3+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2+[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]\,r}.$

On a $s^2 + r\,[2\,\sqrt{3}\,s - (r + 4\,\mathrm{R})] = \frac{d_{15}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{15} \in (X_2X_{14})$, $X_{15} \in (X_3X_6)$.

---

52. p. 174
53. p.932 "Isogonic Centers"
54. p. 174
55. pp. 930-931 "Isodynamic Points"

5.2.16 $X_{16} \equiv S'$ second point isodynamique

On pourra consulter [5] [56] [8] [57].

$X_{16} \equiv S' = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(-\sqrt{3}\,q_1+4\,\Delta)}{d_{16}} \\ \frac{b^2\,(-\sqrt{3}\,q_2+4\,\Delta)}{d_{16}} \\ \frac{c^2\,(-\sqrt{3}\,q_3+4\,\Delta)}{d_{16}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{16} = -\sqrt{3}\,d_3 + 4\,d_6\,\Delta = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,d_{14} = -\sqrt{3}\,(-d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3}) + 4\,d_{2,\,1}\,\Delta.$

Relations avec les points précédents

$X_{16} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2-2\,r\,(\sqrt{3}\,s+r)\,X_3}{s^2-[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{-4\,\sqrt{3}\,s\,r\,X_2+\{s^2+r\,[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]\}\,X_{13}}{s^2-[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$
$= \frac{-2\,\sqrt{3}\,s\,r\,X_3+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2-[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]\,r}.$

On a $s^2 - r\,[2\,\sqrt{3}\,s + (r+4\,\mathrm{R})] = \frac{d_{16}}{8\,s\,r}.$

Donc $X_{16} \in (X_2X_{13})$, $X_{16} \in (X_3X_6)$.

5.2.17 X_{17} premier point de Napoléon ou point de Napoléon extérieur

On pourra consulter [5] [58] [8] [59].

$X_{17} = \begin{pmatrix} \frac{2\,\mathrm{S}-a^2\,q_1+4\,\sqrt{3}\,a^2\,\Delta}{d_{17}} \\ \frac{2\,\mathrm{S}-b^2\,q_2+4\,\sqrt{3}\,b^2\,\Delta}{d_{17}} \\ \frac{2\,\mathrm{S}-c^2\,q_3+4\,\sqrt{3}\,c^2\,\Delta}{d_{17}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{17} = 5\,d_3 + 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta = 5\,(-d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3}) + 4\,\sqrt{3}\,d_{2,\,1}\,\Delta.$

Relations avec les points précédents

$X_{17} = \frac{\sqrt{3}\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+6\,(2\,s-\sqrt{3}\,\mathrm{R})\,r\,X_2-2\,(s+\sqrt{3}\,r)\,r\,X_3}{\sqrt{3}\,s^2+[10\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$
$= \frac{4\,s\,r\,X_3+\sqrt{3}\,\{s^2+[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{13}}{\sqrt{3}\,s^2+[10\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{4\,s\,r\,X_4+\sqrt{3}\,\{s^2+[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{15}}{\sqrt{3}\,s^2+[10\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$
$= \frac{16\,s\,r\,X_5+\sqrt{3}\,\{s^2-[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{14}}{\sqrt{3}\,s^2+[10\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}.$

On a $\sqrt{3}\,s^2 + [10\,s - \sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r = \frac{d_{17}}{8\,s\,r}.$

Donc $X_{17} \in (X_3X_{13})$, $X_{17} \in (X_4X_{15})$, $X_{17} \in (X_5X_{14})$.

56. p. 174
57. pp. 930-931 “Isodynamic Points”
58. pp. 174-175
59. pp. 1214-1215 “Napoleon Points”

5.2.18 X_{18} second point de Napoléon ou point de Napoléon intérieur

On pourra consulter [5] [60] [8] [61].

$$X_{18} = \begin{pmatrix} \frac{2\,\mathrm{S}-a^2\,q_1-4\,\sqrt{3}\,a^2\,\Delta}{d_{18}} \\ \frac{2\,\mathrm{S}-b^2\,q_2-4\,\sqrt{3}\,b^2\,\Delta}{d_{18}} \\ \frac{2\,\mathrm{S}-c^2\,q_3-4\,\sqrt{3}\,c^2\,\Delta}{d_{18}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{18} = 5\,d_3 - 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta = 5\,(-d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3}) - 4\,\sqrt{3}\,d_{2,\,1}\,\Delta.$

Relations avec les points précédents

$$X_{18} = \frac{\sqrt{3}\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,(2\,s+\sqrt{3}\,\mathrm{R})\,r\,X_2+2\,(s-\sqrt{3}\,r)\,r\,X_3}{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$
$$= \frac{-4\,s\,r\,X_3+\sqrt{3}\,\{s^2-[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{14}}{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{-4\,s\,r\,X_4+\sqrt{3}\,\{s^2-[2\,\sqrt{3}\,s+(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{16}}{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$
$$= \frac{-16\,s\,r\,X_5+\sqrt{3}\,\{s^2+[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{13}}{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$
$$= \frac{2\,\sqrt{3}\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6-\{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{17}}{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}.$$

On a $\sqrt{3}\,s^2 - [10\,s + \sqrt{3}\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r = -\frac{d_{18}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{18} \in (X_3X_{14})$, $X_{18} \in (X_4X_{16})$, $X_{18} \in (X_5X_{13})$, $X_{18} \in (X_6X_{17})$.

5.2.19 $X_{19} \equiv Cl$ point de Clawson ou point crucial

On pourra consulter [5] [62].

$$X_{19} \equiv Cl = \begin{pmatrix} \frac{a\,q_2\,q_3}{d_{19}} \\ \frac{b\,q_3\,q_1}{d_{19}} \\ \frac{c\,q_1\,q_2}{d_{19}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{19} = (a^5 + b^5 + c^5) - (b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) - (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)$
$+ 2\,a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_{5,\,1} - d_{5,\,2} + 2\,d_{5,\,5}$.

Relations avec les points précédents

$$X_{19} = \frac{-[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1-6\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_3}{s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2}$$
$$= \frac{-2\,s^2\,\mathrm{R}\,X_4+[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_9}{[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,(r+2\,\mathrm{R})}.$$

On a $s^2 - r\,(r + 6\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2 = -\frac{d_{19}}{16\,s\,r^2}$.

Donc $X_{19} \in (X_4X_9)$.

60. p. 175
61. pp. 1214-1215 “Napoleon Points”
62. p. 175

5.2.20 $X_{20} \equiv L$ point de de Longchamp

On pourra consulter [5] [63] [8] [64].

$$X_{20} \equiv L = \begin{pmatrix} \frac{4\,a^2\,q_1-\mathrm{S}}{d_{20}} \\ \frac{4\,b^2\,q_2-\mathrm{S}}{d_{20}} \\ \frac{4\,c^2\,q_3-\mathrm{S}}{d_{20}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{20} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d^{'}_{20} = -d_{4,\,1}+2\,d_{4,\,3}$ et $d^{'}_{20} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)-2\,a\,b\,c$ $= d^{'}_3 = -d_{3,\,1}+d_{3,\,2}-2\,d_{3,\,3}$

Relations avec les points précédents

$X_{20} = \frac{2\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_1-(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{r} = -3\,X_2+4\,X_3 = 2\,X_3-X_4$.

On a $r = \frac{d_{20}}{16\,s^2\,r} = \frac{d^{'}_{20}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{20} \in (X_1X_7)$, $X_{20} \in (X_2X_3)$, $X_{20} \in (X_3X_4)$.

5.2.21 $X_{21} \equiv Sc$ point de Schiffler

On pourra consulter [5] [65] [8] [66].

$$X_{21} \equiv Sc = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,a^{'})\,(c+a)\,(a+b)}{d_{21}} \\ \frac{b\,(2\,b^{'})\,(a+b)\,(b+c)}{d_{21}} \\ \frac{c\,(2\,c^{'})\,(b+c)\,(c+a)}{d_{21}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{21} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+3\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d^{'}_{21}$ $= -d_{4,\,1}+2\,d_{4,\,3}+3\,d_{4,\,4}$ et $d^{'}_{21} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)$ $+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)+a\,b\,c = -d_{3,\,1}+d_{3,\,2}+d_{3,\,3}$.

$X_{21} = \mathrm{Ceva}(X_1,\,X_3) = \mathrm{Ceva}(X_9,\,X_{55})$ (cf. X_{55} ci-après).

Relation avec les points précédents

$X_{21} = \frac{3\,\mathrm{R}\,X_2+2\,r\,X_3}{2\,r+3\,\mathrm{R}}$.

On a $2\,r+3\,\mathrm{R} = \frac{d_{21}}{8\,s^2\,r} = \frac{d^{'}_{21}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{21} \in (X_2X_3)$.

---

63. p. 175
64. p. 402 “de Longchamp Point”
65. p. 175
66. p. 1597 “Schiffler Point” noté S

5.2.22 $X_{22} \equiv Ex$ point d'Exeter

On pourra consulter [5] [67] [8] [68].

$$X_{22} \equiv Ex = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b^4+c^4-a^4)}{d_{22}} \\ \frac{b^2\,(c^4+a^4-b^4)}{d_{22}} \\ \frac{c^2\,(a^4+b^4-c^4)}{d_{22}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{22} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^4\,a^2 + a^2\,b^4)$
$= -d_{6,1} + d_{6,3}$.

Relation avec les points précédents

$X_{22} = \frac{-3\,\mathrm{R}^2\,X_2+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-3\,\mathrm{R}^2}$.

On a $s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{22}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{22} \in (X_2X_3)$.

5.2.23 X_{23} point distant

On pourra consulter [5] [69] [8] [70].

$$X_{23} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(-a^4+b^4-b^2\,c^2+c^4)}{d_{23}} \\ \frac{b^2\,(-b^4+c^4-c^2\,a^2+a^4)}{d_{23}} \\ \frac{c^2\,(-c^4+a^4-a^2\,b^2+b^4)}{d_{23}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(d_6\,q_1-3\,b^2\,c^2)}{d_{23}} \\ \frac{b^2\,(d_6\,q_2-3\,c^2\,a^2)}{d_{23}} \\ \frac{c^2\,(d_6\,q_3-3\,a^2\,b^2)}{d_{23}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b^2\,c^2-q_2\,q_3)}{d_{23}} \\ \frac{b^2\,(c^2\,a^2-q_3\,q_1)}{d_{23}} \\ \frac{c^2\,(a^2\,b^2-q_1\,q_2)}{d_{23}} \end{pmatrix},$$

avec :

$d_{23} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-3\,a^2\,b^2\,c^2$
$= -d_{6,1} + d_{6,3} - 3\,d_{6,7} = -\mathrm{J}^2\,a^2\,b^2\,c^2$.

Relation avec les points précédents

$X_{23} = \frac{-9\,\mathrm{R}^2\,X_2+2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2}$.

On $2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{23}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{23} \in (X_2X_3)$.

5.2.24 X_{24}

On pourra consulter [5] [71].

67. p. 175
68. p. 593 "Exeter Point"
69. p. 175
70. p. 610 "Far-Out Point"
71. p. 176

$$X_{24}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,(\mathrm{S}-2\,a^2\,q_1)\,(q_1^2-\mathrm{S})}{2\,d_{24}}\\ \frac{b^2\,(\mathrm{S}-2\,b^2\,q_2)\,(q_2^2-\mathrm{S})}{2\,d_{24}}\\ \frac{c^2\,(\mathrm{S}-2\,c^2\,q_3)\,(q_3^2-\mathrm{S})}{2\,d_{24}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,q_2\,q_3\,(q_1^2-\mathrm{S})}{2\,d_{24}}\\ \frac{b^2\,q_3\,q_1\,(q_2^2-\mathrm{S})}{2\,d_{24}}\\ \frac{c^2\,q_1\,q_2\,(q_3^2-\mathrm{S})}{2\,d_{24}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,q_2\,q_3\,(2\,b^2\,c^2-\mathrm{S})}{d_{24}}\\ \frac{b^2\,q_3\,q_1\,(2\,c^2\,a^2-\mathrm{S})}{d_{24}}\\ \frac{c^2\,q_1\,q_2\,(2\,a^2\,b^2-\mathrm{S})}{d_{24}}\end{pmatrix},$$

avec :

$d_{24}=(a^{10}+b^{10}+c^{10})-3\,(b^8\,c^2+c^8\,a^2+a^8\,b^2)-3\,(b^2\,c^8+c^2\,a^8+a^2\,b^8)$
$+\,2\,(b^6\,c^4+c^6\,a^4+a^6\,b^4)+6\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^4\,c^6+c^4\,a^6+a^4\,b^6)$
$-\,6\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)=d_3\,\delta_{24}$
$=d_{10,\,1}-3\,d_{10,\,3}+2\,d_{10,\,7}+6\,d_{10,\,9}-6\,d_{10,\,13}$ et
$\delta_{24}=-(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^4\,a^2+a^2\,b^4)-4\,a^2\,b^2\,c^2$
$=-d_{6,\,1}+d_{6,\,3}-4\,d_{6,\,7}$.

Relation avec les points précédents

$X_{24}=\frac{-3\,\mathrm{R}^2\,X_2+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_3}{s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2}$.

On a $s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2=\frac{d_{24}}{512\,s^4\,r^4}=\frac{\delta_{24}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{24}\in(X_2X_3)$.

5.2.25 X_{25}

On pourra consulter [5] [72].

$X_{25}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,q_2\,q_3}{d_{25}}\\ \frac{b^2\,q_3\,q_1}{d_{25}}\\ \frac{c^2\,q_1\,q_2}{d_{25}}\end{pmatrix}$, avec :

$d_{25}=(a^6+b^6+c^6)-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)-(b^2\,c^4+c^4\,a^2+a^2\,b^4)+6\,a^2\,b^2\,c^2$
$=d_{6,\,1}-d_{6,\,3}+6\,d_{6,\,7}$.

Relation avec les points précédents

$X_{25}=\frac{-6\,\mathrm{R}^2\,X_2+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2}$.

On a $s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2=-\frac{d_{25}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{25}\in(X_2X_3)$.

5.2.26 X_{26} centre du cercle circonscrit au triangle tangentiel

On pourra consulter [5] [73].

72. p. 176
73. p. 176

$X_{26} = \begin{pmatrix} \frac{a^4\, q_1\, (\mathrm{S}-q_1^2)}{2\, d_{26}} \\ \frac{b^4\, q_2\, (\mathrm{S}-q_2^2)}{2\, d_{26}} \\ \frac{c^4\, q_3\, (\mathrm{S}-q_3^2)}{2\, d_{26}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{26} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\, c^2 + c^8\, a^2 + a^8\, b^2) - 3\,(b^2\, c^8 + c^2\, a^8 + a^2\, b^8)$
$+ 2\,(b^6\, c^4 + c^6\, a^4 + a^6\, b^4) + 4\, a^2\, b^2\, c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^4\, c^6 + c^4\, a^6 + a^4\, b^6)$
$- 2\, a^2\, b^2\, c^2\,(b^2\, c^2 + c^2\, a^2 + a^2\, b^2) = d_3\, \delta_{26}$
$= d_{10,\,1} - 3\, d_{10,\,3} + 2\, d_{10,\,7} + 4\, d_{10,\,9} - 2\, d_{10,\,13}$ et
$\delta_{26} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\, c^2 + c^4\, a^2 + a^4\, b^2) + (b^2\, c^4 + c^2\, a^4 + a^2\, b^4) - 2\, a^2\, b^2\, c^2$
$= q_1\, q_2\, q_3 = -d_{6,\,1} + d_{6,\,3} - 2\, d_{6,\,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{26} = \frac{-3\,\mathrm{R}^2\, X_2 + [s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - \mathrm{R}^2]\, X_3}{s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2} = \frac{3\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\, X_2 - [s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - \mathrm{R}^2]\, X_4}{2\,[s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]}$
$= \frac{[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\, X_3 - \mathrm{R}^2\, X_4}{s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2}$.

On a $s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2 = \frac{d_{26}}{512\, s^4\, r^4} = \frac{\delta_{26}}{32\, s^2\, r^2}$.

Donc $X_{26} \in (X_2 X_3) = (X_2 X_4)$, $X_{26} \in (X_3 X_4)$.

5.2.27 X_{27}

On pourra consulter [5] [74].

$X_{27} = \begin{pmatrix} \frac{(c+a)\,(a+b)\, q_2\, q_3}{d_{27}} \\ \frac{(a+b)\,(b+c)\, q_3\, q_1}{d_{27}} \\ \frac{(b+c)\,(c+a)\, q_1\, q_2}{d_{27}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{27} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^5\, c + c^5\, a + a^5\, b) - (b\, c^5 + c\, a^5 + a\, b^5) - (b^4\, c^2 + c^4\, a^2 + a^4\, b^2)$
$- a\, b\, c\,(a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\, c^4 + c^2\, a^4 + a^2\, b^4) + 2\,(b^3\, c^3 + c^3\, a^3 + a^3\, b^3)$
$+ 2\, a\, b\, c\,(b^2\, c + c^2\, a + a^2\, b) + 2\, a\, b\, c\,(b\, c^2 + c\, a^2 + a\, b^2) + 6\, a^2\, b^2\, c^2$
$= d_{6,\,1} - d_{6,\,2} - d_{6,\,3} - d_{6,\,4} + 2\, d_{6,\,5} + 2\, d_{6,\,6} + 6\, d_{6,\,7}$.

$X_{27} = \mathrm{Ceva}(X_4,\ X_{19})$.

Relations avec les points précédents

$X_{27} = \frac{-3\,[s^2 + (r+2\mathrm{R})^2]\, X_2 + 4\, s^2\, X_3}{s^2 - 3\,(r+2\mathrm{R})^2} = \frac{-3\,[s^2 - (r+2\mathrm{R})^2]\, X_2 - 2\, s^2\, X_4}{s^2 - 3\,(r+2\mathrm{R})^2}$.

On $s^2 - 3\,(r + 2\mathrm{R})^2 = -\frac{d_{27}}{16\, s^2\, r^2}$.

Donc $X_{27} \in (X_2 X_3) = (X_2 X_4)$.

74. p. 176

5.2.28 X_{28}

On pourra consulter [5][75].

$$X_{28} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(c+a)\,(a+b)\,q_2\,q_3}{d_{28}} \\ \frac{b\,(a+b)\,(b+c)\,q_3\,q_1}{d_{28}} \\ \frac{c\,(b+c)\,(c+a)\,q_1\,q_2}{d_{28}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{28} = (a^7+b^7+c^7)+(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)+(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)-(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)$
$-\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)-(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)-(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$
$-\,a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)-a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)-(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)$
$+\,2\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+6\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_1\,d_{28}^{'}$
$= d_{7,1}+d_{7,2}-d_{7,3}-d_{7,4}-d_{7,5}-d_{7,6}+2\,d_{7,7}+6\,d_{7,8}$ et
$d_{28}^{'} = (a^6+b^6+c^6)-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)-a\,b\,c\,(a^3+b^3+c^3)$
$-\,(b^2\,c^4+c^4\,a^2+a^2\,b^4)+a\,b\,c\,(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+a\,b\,c\,(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)$
$+\,4\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{6,1}-d_{6,3}-d_{6,4}+d_{6,6}+4\,d_{6,7}$.

$X_{28} = \mathrm{Ceva}(X_{19},\,X_{25}) = \mathrm{Ceva}(X_{34},\,X_{56})$ (cf. X_{34}, X_{56} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_{28} = \frac{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1+[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,X_{19}}{2\,[s^2-r\,(r+5\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]} = \frac{-3\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_3}{s^2-r\,(r+5\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{-r\,\mathrm{R}\,X_4+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,X_{25}}{s^2-r\,(r+5\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2}$.

On a $s^2-r\,(r+5\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2 = -\frac{d_{28}}{64\,s^3\,r^2} = -\frac{d_{28}^{'}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{28} \in (X_1X_{19})$, $X_{28} \in (X_2X_3)$, $X_{28} \in (X_4X_{25})$.

5.2.29 X_{29}

On pourra consulter [5][76].

$$X_{29} = \begin{pmatrix} \frac{(2\,a^{'})\,(c+a)\,(a+b)\,q_2\,q_3}{d_{29}} \\ \frac{(2\,b^{'})\,(a+b)\,(b+c)\,q_3\,q_1}{d_{29}} \\ \frac{(2\,c^{'})\,(b+c)\,(c+a)\,q_1\,q_2}{d_{29}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

75. p. 176
76. p. 176

$d_{29} = -(a^7 + b^7 + c^7) - 2\,(b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) - 2\,(b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)$
$- a\,b\,c\,(a^4 + b^4 + c^4) + 3\,(b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3) + 2\,a\,b\,c\,(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b)$
$+ 2\,a\,b\,c\,(b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + 3\,(b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4) + 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2)$
$- 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a + b + c) = d_1\,d'_{29} = -d_{7,1} - 2\,d_{7,2} - d_{7,4} + 3\,d_{7,5} + 2\,d_{7,6} - 2\,d_{7,8}$
et $d'_{29} = -(a^6 + b^6 + c^6) - (b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5)$
$+ (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c^4 + c^4\,a^2 + a^2\,b^4)$
$+ 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) - 2\,a^2\,b^2\,c^2 = -d_{6,1} - d_{6,2} + d_{6,3} + d_{6,4} + 2\,d_{6,5} - 2\,d_{6,7}$.

$X_{29} = \mathrm{Ceva}(X_1,\ X_4)$.

Relations avec les points précédents

$X_{29} = \frac{3\,(s^2 + r^2 - 4\,\mathrm{R}^2)\,X_2 - 4\,r\,(r + 2\,\mathrm{R})\,X_3}{3\,s^2 - r\,(r + 8\,\mathrm{R}) - 12\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{-[s^2 - 3\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 12\,\mathrm{R}^2]\,X_{27} + 4\,[s^2 - r\,(r + 5\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,X_{28}}{3\,s^2 - r\,(r + 8\,\mathrm{R}) - 12\,\mathrm{R}^2}$.

On a $3\,s^2 - r\,(r + 8\,\mathrm{R}) - 12\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{29}}{32\,s^3\,r^2} = \frac{d'_{29}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{29} \in (X_2X_3)$, $X_{29} \in (X_{27}X_{28})$.

5.2.30 X_{30} point à l'infini d'Euler

On pourra consulter [5] [77].

Attention : ce point n'étant pas à distance fini est tel que la somme de ses coordonnées aréolaires n'est pas égale à un mais à zéro.

$$X_{30} = \begin{pmatrix} \mathrm{S} - 3\,a^2\,q_1 \\ \mathrm{S} - 3\,b^2\,q_2 \\ \mathrm{S} - 3\,c^2\,q_3 \end{pmatrix} \text{ et } d_{30} = 0.$$

Relations avec les points précédents

$X_{30} = X_2 - X_3 = \frac{\sqrt{3}\,\{s^2 + r\,[2\,\sqrt{3}\,s - (r + 4\,\mathrm{R})]\}}{12\,s\,r}\,(X_{13} - X_{15})$
$= -\frac{\sqrt{3}\,\{s^2 - r\,[2\,\sqrt{3}\,s + (r + 4\,\mathrm{R})]\}}{12\,s\,r}\,(X_{14} - X_{16})$.

On a $0 = d_{30}$.

Donc $X_{30} \in (X_2X_3)$, $X_{30} \in (X_{13}X_{15})$, $X_{30} \in (X_{14}X_{16})$.

5.2.31 X_{31} deuxième point puissance

On pourra consulter [5] [78].

77. p. 176
78. p. 176

$$X_{31} = \begin{pmatrix} \frac{a^3}{d_{31}} \\ \frac{b^3}{d_{31}} \\ \frac{c^3}{d_{31}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_{31} = (a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1}.$$

Relations avec les points précédents

$X_{31} = \frac{(s^2+r^2)\,X_1 - 6\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 4\,r^2\,X_3}{s^2 - 3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})} = \frac{(s^2+r^2)\,X_1 - 2\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{s^2 - 3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2 - 3\,r\,(r + 2\,\mathrm{R}) = \frac{d_{31}}{2\,s}$.

Donc $X_{31} \in (X_1 X_{21})$.

5.2.32 X_{32} troisième point puissance

On pourra consulter [5] [79].

$$X_{32} = \begin{pmatrix} \frac{a^4}{d_{32}} \\ \frac{b^4}{d_{32}} \\ \frac{c^4}{d_{32}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_{32} = (a^4 + b^4 + c^4) = d_{4,1}.$$

Relations avec les points précédents

$X_{32} = \frac{[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2 + r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 6\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 2\,[3\,s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2\,X_3}{s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{-4\,s^2\,r^2\,X_3 + [s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2\,X_6}{s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$.

On a $s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = \frac{d_{32}}{2}$.

Donc $X_{32} \in (X_3 X_6)$.

5.2.33 X_{33}

On pourra consulter [5] [80].

$$X_{33} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,a^{'})\,q_2\,q_3}{d_{33}} \\ \frac{b\,(2\,b^{'})\,q_3\,q_1}{d_{33}} \\ \frac{c\,(2\,c^{'})\,q_1\,q_2}{d_{33}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{33} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) - 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$+ (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) + 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$- 6\,a^2\,b^2\,c^2 = -d_{6,1} + d_{6,3} - 2\,d_{6,4} + 2\,d_{6,6} - 6\,d_{6,7}$.

---

79. p. 176
80. p. 176

Relations avec les points précédents

$X_{33} = \frac{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1+6\,r\,\mathrm{R}\,X_2-4\,r\,\mathrm{R}\,X_3}{s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2} = \frac{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1+2\,r\,\mathrm{R}\,X_4}{s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{-[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,X_{19}+2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,X_{25}}{s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2}$.

On a $s^2 - r\,(r + 2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{33}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{33} \in (X_1X_4)$, $X_{33} \in (X_{19}X_{25})$.

5.2.34 X_{34}

On pourra consulter [5] [81].

$X_{34} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,b')\,(2\,c')\,q_2\,q_3}{d_{34}}, \\ \frac{b\,(2\,c')\,(2\,a')\,q_3\,q_1}{d_{34}}, \\ \frac{c\,(2\,a')\,(2\,b')\,q_1\,q_2}{d_{34}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{34} = (a^7 + b^7 + c^7) + (b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) + (b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)$
$- (b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2) - 2\,a\,b\,c\,(a^4 + b^4 + c^4) - (b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5)$
$- (b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3) - a\,b\,c\,(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) - a\,b\,c\,(b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3)$
$- (b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4) + 4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a + b + c)$
$= d_1\,d'_{34} = d_{7,1} + d_{7,2} - d_{7,3} - 2\,d_{7,4} - d_{7,5} - d_{7,6} + 4\,d_{7,7} + 2\,d_{7,8}$ et
$d'_{34} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) - 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$- (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) + 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$- 2\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{6,1} - d_{6,3} - 2\,d_{6,4} + 2\,d_{6,6} - 2\,d_{6,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{34} = \frac{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2+4\,r\,\mathrm{R}\,X_3}{s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2} = \frac{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1-2\,r\,\mathrm{R}\,X_4}{s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{19}}{s^2\,[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]}$.

On a $s^2 - r\,(r + 6\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2 = -\frac{d_{34}}{64\,s^3\,r^2} = -\frac{d'_{34}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{34} \in (X_1X_4)$, $X_{34} \in (X_6X_{19})$.

5.2.35 X_{35}

On pourra consulter [5] [82].

81. p. 176
82. p. 176

$X_{35} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(q_1+b\,c)}{d_{35}} \\ \frac{b^2\,(q_2+c\,a)}{d_{35}} \\ \frac{c^2\,(q_3+a\,b)}{d_{35}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,[(2\,s)\,(2\,a^{'})-b\,c]}{d_{35}} \\ \frac{b^2\,[(2\,s)\,(2\,b^{'})-c\,a]}{d_{35}} \\ \frac{c^2\,[(2\,s)\,(2\,c^{'})-a\,b]}{d_{35}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{35} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{12} = d_1\,d^{'}_{35}$
$= -d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3} + d_{4,\,4}$ et $d^{'}_{35} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b)$
$+ (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - a\,b\,c = d^{'}_{12} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{35} = \frac{\mathrm{R}\,X_1+2\,r\,X_3}{2\,r+\mathrm{R}} = -\frac{[2\,\mathrm{R}\,X_{10}-(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}]}{2\,r+\mathrm{R}}$
$= \frac{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{24}+[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{33}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(2\,r+\mathrm{R})}$.

On a $2\,r + \mathrm{R} = \frac{d_{35}}{8\,s^2\,r} = \frac{d_{12}}{8\,s^2\,r} = \frac{d^{'}_{35}}{4\,s\,r} = \frac{d^{'}_{12}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{35} \in (X_1X_3)$, $X_{35} \in (X_{10}X_{21})$, $X_{35} \in (X_{24}X_{33})$.

5.2.36 X_{36}

On pourra consulter [5] [83].

$X_{36} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b\,c-q_1)}{d_{36}} \\ \frac{b^2\,(c\,a-q_2)}{d_{36}} \\ \frac{c^2\,(a\,b-q_3)}{d_{36}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{36} = (a^4 + b^4 + c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + a\,b\,c\,(a + b + c) = d_1\,d^{'}_{36}$
$= d_{4,\,1} - 2\,d_{4,\,3} + d_{4,\,4}$ et $d^{'}_{36} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b)$
$- (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c = d_{11} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 3\,d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{36} = \frac{-\mathrm{R}\,X_1+2\,r\,X_3}{2\,r-\mathrm{R}} = \frac{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{24}-[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{34}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(2\,r-\mathrm{R})}$

On a $2\,r - \mathrm{R} = -\frac{d_{36}}{8\,s^2\,r} = -\frac{d^{'}_{36}}{4\,s\,r} = -\frac{d_{11}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{36} \in (X_1X_3)$, $X_{36} \in (X_{24}X_{34})$.

5.2.37 X_{37}

On pourra consulter [5] [84].

83. p. 176
84. p. 176

$$X_{37} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(b+c)}{2\,d_{37}} \\ \frac{b\,(c+a)}{2\,d_{37}} \\ \frac{c\,(a+b)}{2\,d_{37}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_{37} = (b\,c + c\,a + a\,b) = d_{2,\,2}.$$

$X_{37} = \mathrm{Cross}(X_1,\ X_2)$.

Relations avec les points précédents

$$X_{37} = \frac{[s^2 - r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 + 6\,r\,\mathrm{R}\,X_2 + 2\,r^2\,X_3}{s^2 + r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{2\,s^2\,X_1 - [s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2 + r\,(r+4\,\mathrm{R})}$$
$$= \frac{-[s^2 - r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r+6\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2]\,X_{19} + 2\,s^2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,X_{25}}{[s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]\,[s^2 + r\,(r+4\,\mathrm{R})]}.$$

On a $s^2 + r\,(r+4\,\mathrm{R}) = d_{37}$.

Donc $X_{37} \in (X_1 X_6)$, $X_{37} \in (X_{19} X_{25})$.

5.2.38 X_{38}

On pourra consulter [5] [85].

$$X_{38} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(b^2+c^2)}{d_{38}} \\ \frac{b\,(c^2+a^2)}{d_{38}} \\ \frac{c\,(a^2+b^2)}{d_{38}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$
$$d_{38} = (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) = d_{3,\,2}.$$

Relations avec les points précédents

$$X_{38} = \frac{[s^2 - r\,(3\,r+8\,\mathrm{R})]\,X_1 + 6\,r\,\mathrm{R}\,X_2 + 4\,r^2\,X_3}{s^2 + r\,(r-2\,\mathrm{R})} = \frac{[s^2 - r\,(3\,r+8\,\mathrm{R})]\,X_1 + 2\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{s^2 + r\,(r-2\,\mathrm{R})}.$$

On a $s^2 + r\,(r-2\,\mathrm{R}) = \frac{d_{38}}{2\,s}$.

Donc $X_{38} \in (X_1 X_{21})$.

5.2.39 $X_{39} \equiv \frac{1}{2}\,(\Omega + \Omega')$ point de Brocard milieu

On pourra consulter [5] [86] [8] [87].

$$X_{39} \equiv \frac{1}{2}\,(\Omega + \Omega') = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b^2+c^2)}{2\,d_{39}} \\ \frac{b^2\,(c^2+a^2)}{2\,d_{39}} \\ \frac{c^2\,(a^2+b^2)}{2\,d_{39}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$
$$d_{39} = (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_\Omega = d_{\Omega'} = d_{4,\,3}.$$

85. p. 176
86. p. 177
87. p. 175 “Brocard Midpoint”

Relations avec les points précédents

$X_{39} = \frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2\,X_3}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{4\,s^2\,r^2\,X_3+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2\,X_6}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$.

On a $s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2 = d_{39}$.

Donc $X_{39} \in (X_3X_6)$.

5.2.40 $X_{40} \equiv Be$ point de Bevan : milieu du segment $[X_8X_{20}] \equiv [NaL]$

On pourra consulter [5] [88].

$$X_{40} \equiv Be = \begin{pmatrix} \frac{a\,(a\,q_1-b\,q_2-c\,q_3+2\,a\,b\,c)}{d_{40}} \\ \frac{b\,(b\,q_2-c\,q_3-a\,q_1+2\,b\,c\,a)}{d_{40}} \\ \frac{c\,(c\,q_3-a\,q_1-b\,q_2+2\,c\,a\,b)}{d_{40}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a\,[a^3+a^2\,(b+c)-a\,(b+c)^2-(b+c)\,(b-c)^2]}{d_{40}} \\ \frac{-b\,[b^3+b^2\,(c+a)-b\,(c+a)^2-(c+a)\,(c-a)^2]}{d_{40}} \\ \frac{-c\,[c^3+c^2\,(a+b)-c\,(a+b)^2-(a+b)\,(a-b)^2]}{d_{40}} \end{pmatrix},$$

avec :

$d_{40} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d_{40}^{'} = -d_{4,1}+2\,d_{4,3}$
et $d_{40}^{'} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)-2\,a\,b\,c$
$= d_3^{'} = -d_{3,1}+d_{3,2}-2\,d_{3,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{40} = -X_1+2\,X_3 = \frac{-2\,\mathrm{R}\,X_4+(r+4\,\mathrm{R})\,X_9}{r+2\,\mathrm{R}} = \frac{X_8+X_{20}}{2}$.

On a $1 = \frac{d_{40}}{16\,s^2\,r^2} = \frac{d_{40}^{'}}{8\,s\,r^2}$.

Donc $X_{40} \in (X_1X_3)$, $X_{40} \in (X_4X_9)$, $X_{40} \in (X_8X_{20})$.

5.2.41 X_{41}

On pourra consulter [5] [89].

$X_{41} = \begin{pmatrix} \frac{a^3\,(2\,a^{'})}{d_{41}} \\ \frac{b^3\,(2\,b^{'})}{d_{41}} \\ \frac{c^3\,(2\,c^{'})}{d_{41}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{41} = -(a^4+b^4+c^4)+(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3) = -d_{4,1}+d_{4,2}$.

88. p. 177
89. p. 177

Relations avec les points précédents

$X_{41} = \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_1-6\,r\,(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,X_3}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{-[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_9+2\,s^2\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{s^2\,[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{31}+\{4\,s^2\,r^2-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2\}\,X_{32}}{\{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+4\,\mathrm{R})^2\}\,r}$.

On a $s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+4\,\mathrm{R})^2 = \frac{d_{41}}{4\,r}$.

Donc $X_{41} \in (X_9X_{21})$, $X_{41} \in (X_{31}X_{32})$.

5.2.42 X_{42}

On pourra consulter [5] [90].

$X_{42} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b+c)}{d_{42}} \\ \frac{b^2\,(c+a)}{d_{42}} \\ \frac{c^2\,(a+b)}{d_{42}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{42} = (b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2) = d_{38} = d_{3,\,2}$.

$X_{42} = \mathrm{Cross}(X_1,\ X_6)$.

Relations avec les points précédents

$X_{42} = \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2}{s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})} = \frac{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6-[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{31}}{s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})}$
$= -\frac{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{25}-\{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+4\,\mathrm{R})^2\}\,X_{41}}{[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R}) = \frac{d_{42}}{2\,s}$.

Donc $X_{42} \in (X_1X_2)$, $X_{42} \in (X_6X_{31})$, $X_{42} \in (X_{25}X_{41})$.

5.2.43 X_{43}

On pourra consulter [5] [91].

$X_{43} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(-b\,c+c\,a+a\,b)}{d_{43}} \\ \frac{b\,(-c\,a+a\,b+b\,c)}{d_{43}} \\ \frac{c\,(-a\,b+b\,c+c\,a)}{d_{43}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{43} = (b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)-3\,a\,b\,c = d_{3,\,2}-3\,d_{3,\,3}$.

Relation avec les points précédents

$X_{43} = \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1-12\,r\,\mathrm{R}\,X_2}{s^2+r\,(r-8\,\mathrm{R})}$.

90. p. 177
91. p. 177

On a $s^2 + r\,(r - 8\,\mathrm{R}) = \frac{d_{43}}{2\,s}$.

Donc $X_{43} \in (X_1 X_2)$.

5.2.44 X_{44}

On pourra consulter [5] [92].

$X_{44} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(-2\,a+b+c)}{2\,d_{44}} \\ \frac{b\,(-2\,b+c+a)}{2\,d_{44}} \\ \frac{c\,(-2\,c+a+b)}{2\,d_{44}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{44} = -(a^2 + b^2 + c^2) + (b\,c + c\,a + a\,b) = -d_{2,\,1} + d_{2,\,2}$.

Relations avec les points précédents

$X_{44} = \frac{[s^2+3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 18\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 6\,r^2\,X_3}{s^2-3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{-2\,s^2\;X_1 + 3\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2-3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2 - 3\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = -d_{44}$.

Donc $X_{44} \in (X_1 X_6)$.

5.2.45 X_{45}

On pourra consulter [5] [93].

$X_{45} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,b+2\,c-a)}{d_{45}} \\ \frac{b\,(2\,c+2\,a-b)}{d_{45}} \\ \frac{c\,(2\,a+2\,b-c)}{d_{45}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{45} = -(a^2 + b^2 + c^2) + 4\,(b\,c + c\,a + a\,b) = -d_{2,\,1} + 4\,d_{2,\,2}$.

Relations avec les points précédents

$X_{45} = \frac{[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 + 18\,r\,\mathrm{R}\,X_2 + 6\,r^2\,X_3}{s^2+3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{4\,s^2\,X_1 - 3\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2+3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2 + 3\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{45}}{2}$.

Donc $X_{45} \in (X_1 X_6)$.

5.2.46 X_{46}

On pourra consulter [5] [94].

92. p. 177
93. p. 177
94. p. 177

$$X_{46} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)}{d_{46}} \\ \frac{b\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)}{d_{46}} \\ \frac{c\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)}{d_{46}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{46} = (a^4+b^4+c^4) - 2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d_{46}^{'}$ $= d_{4,\,1} - 2\,d_{4,\,3} + 2\,d_{4,\,4}$ et $d_{46}^{'} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)$ $-(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2) + 4\,a\,b\,c = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 4\,d_{3,\,3}$.

Relation avec les points précédents

$X_{46} = \frac{(r+\mathrm{R})\,X_1 - 2\,r\,X_3}{-r+\mathrm{R}}$.

On a $-r+\mathrm{R} = \frac{d_{46}}{16\,s^2\,r} = \frac{d_{46}^{'}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{46} \in (X_1X_3)$.

5.2.47 X_{47}

On pourra consulter [5] [95].

$$X_{47} = \begin{pmatrix} \frac{a^3\,[(a^4+b^4+c^4)-2\,a^2\,(b^2+c^2)]}{d_{47}} \\ \frac{b^3\,[(b^4+c^4+a^4)-2\,b^2\,(c^2+a^2)]}{d_{47}} \\ \frac{c^3\,[(c^4+a^4+b^4)-2\,c^2\,(a^2+b^2)]}{d_{47}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^3\,(q_1^2-\mathrm{S})}{2\,d_{47}} \\ \frac{b^3\,(q_2^2-\mathrm{S})}{2\,d_{47}} \\ \frac{c^3\,(q_3^2-\mathrm{S})}{2\,d_{47}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^3\,(2\,b^2\,c^2-\mathrm{S})}{d_{47}} \\ \frac{b^3\,(2\,c^2\,a^2-\mathrm{S})}{d_{47}} \\ \frac{c^3\,(2\,a^2\,b^2-\mathrm{S})}{d_{47}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^3\,(q_1^2-2\,b^2\,c^2)}{d_{47}} \\ \frac{b^3\,(q_2^2-2\,c^2\,a^2)}{d_{47}} \\ \frac{c^3\,(q_3^2-2\,a^2\,b^2)}{d_{47}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{47} = (a^7+b^7+c^7) - 2\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2) + (b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$ $+(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4) - 2\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5) = d_1\,d_{47}^{'} = d_{7,\,1} - 2\,d_{7,\,3} + d_{7,\,5}$ et $d_{47}^{'} = (a^6+b^6+c^6) - (b^5\,c+c^5\,a+a^5\,b) - (b\,c^5+c\,a^5+a\,b^5)$ $-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)$ $+2\,(b^3\,c^3+c^3\,a^3+a^3\,b^3) - a\,b\,c\,(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b) - a\,b\,c\,(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)$ $+2\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{6,\,1} - d_{6,\,2} - d_{6,\,3} + 2\,d_{6,\,4} + 2\,d_{6,\,5} - d_{6,\,6} + 2\,d_{6,\,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{47} = \frac{(s^2+r^2-2\,\mathrm{R}^2)\,X_1 - 6\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 4\,r^2\,X_3}{s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2} = \frac{(s^2+r^2-2\,\mathrm{R}^2)\,X_1 - 2\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2}$ $= \frac{[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{34} - 2\,(r^2-\mathrm{R}^2)\,X_{46}}{s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2}$.

On a $s^2 - 3\,r\,(r+2\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2 = -\frac{d_{47}}{32\,s^3\,r^2} = -\frac{d_{47}^{'}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{47} \in (X_1X_{21})$, $X_{47} \in (X_{34}X_{46})$.

95. p. 177

5.2.48 X_{48}

On pourra consulter [5] [96].

$X_{48} = \begin{pmatrix} \frac{a^3\,q_1}{d_{48}} \\ \frac{b^3\,q_2}{d_{48}} \\ \frac{c^3\,q_3}{d_{48}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{48} = -(a^5 + b^5 + c^5) + (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$= -d_{5,1} + d_{5,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{48} = \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})+4\,\mathrm{R}^2]\,X_1-6\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_3}{3\,s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{2\,s^2\,X_1+[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,X_{19}}{3\,s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{-2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,\mathrm{R}\,X_6+\{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,[r\,(r+8\,\mathrm{R})+16\,\mathrm{R}^2]\}\,X_{41}}{[3\,s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,r}$.

On a $3\,s^2 - r\,(r + 6\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{48}}{8\,s\,r^2}$.

Donc $X_{48} \in (X_1X_{19})$, $X_{48} \in (X_6X_{41})$.

5.2.49 X_{49}

On pourra consulter [5] [97].

$X_{49} = \begin{pmatrix} \frac{a^4\,q_1\,(\mathrm{S}-b^2\,c^2)}{d_{49}} \\ \frac{b^4\,q_2\,(\mathrm{S}-c^2\,a^2)}{d_{49}} \\ \frac{c^4\,q_3\,(\mathrm{S}-a^2\,b^2)}{d_{49}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{49} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 3\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6)$
$= d_3\,\delta_{49} = d_{10,1} - 3\,d_{10,3} + 2\,d_{10,7} + 3\,d_{10,9}$ et
$\delta_{49} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^4\,a^2 + a^2\,b^4) - a^2\,b^2\,c^2$
$= -d_{6,1} + d_{6,3} - d_{6,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{49} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,(r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+[s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2]\,X_3}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-7\,\mathrm{R}^2}$.

On a $2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 7\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{49}}{256\,s^4\,r^4} = \frac{\delta_{49}}{16\,s^2\,r^2}$.

96. p. 177
97. p. 177

5.2.50 X_{50}

On pourra consulter [5] [98].

$$X_{50} = \begin{pmatrix} \frac{a^4\,(q_1^2 - b^2\,c^2)}{d_{50}} \\ \frac{b^4\,(q_2^2 - c^2\,a^2)}{d_{50}} \\ \frac{c^4\,(q_3^2 - a^2\,b^2)}{d_{50}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{50} = (a^8 + b^8 + c^8) - 2\,(b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) - 2\,(b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$+ 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) = d_{8,\,1} - 2\,d_{8,\,3} + 2\,d_{8,\,7} + d_{8,\,9}$.

Relations avec les points précédents

$X_{50} = \frac{[s^2 + r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,X_1 - 6\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 2\,[3\,s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,r^2\,X_3}{s^4 - s^2\,[2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R}) + (19\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]}$
$= -\frac{4\,s^2\,r^2\,X_3 - [s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,X_6}{s^4 - s^2\,[2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R}) + (19\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]}$.

On a
$s^4 - s^2\,[2\,r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + (19\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] = -\frac{d_{50}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{50} \in (X_3X_6)$.

5.2.51 X_{51}

On pourra consulter [5] [99].

$$X_{51} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(\mathrm{S} - a^2\,q_1)}{6\,d_{51}} \\ \frac{b^2\,(\mathrm{S} - b^2\,q_2)}{6\,d_{51}} \\ \frac{c^2\,(\mathrm{S} - c^2\,q_3)}{6\,d_{51}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_{51} = a^2\,b^2\,c^2 = d_{6,\,7}.$$

Relations avec les points précédents

$X_{51} = \frac{[s^2 + r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 6\,(r - \mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2 - [s^2 + r\,(r - 4\,\mathrm{R})]\,X_3}{6\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6 - [s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,X_{25}}{6\,\mathrm{R}^2}$.

On a $6\,\mathrm{R}^2 = \frac{3\,d_{51}}{8\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{51} \in (X_6X_{25})$.

5.2.52 X_{52}

On pourra consulter [5] [100].

98. p. 177
99. p. 177
100. p. 177

$$X_{52}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)}{4\,d_{52}}\\ \frac{b^2\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)}{4\,d_{52}}\\ \frac{c^2\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)}{4\,d_{52}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}+q_2\,q_3)}{8\,d_{52}}\\ \frac{b^2\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}+q_3\,q_1)}{8\,d_{52}}\\ \frac{c^2\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}+q_1\,q_2)}{8\,d_{52}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{52}=a^2\,b^2\,c^2\,(a^4+b^4+c^4)-2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)=d_3\,\delta_{52}$
$=d_{10,\,9}-2\,d_{10,\,13}$ et $\delta_{52}=-a^2\,b^2\,c^2=-d_{51}=-d_{6,\,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{52}=\frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2-[s^2+r\,(r-4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_3}{2\,\mathrm{R}^2}$
$=-\frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_3-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{2\,\mathrm{R}^2}=-2\,X_5+3\,X_{51}$.

On a $2\,\mathrm{R}^2=-\frac{d_{52}}{128\,s^4\,r^4}=-\frac{\delta_{52}}{8\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{52}\in(X_3X_6)$, $X_{52}\in(X_5X_{51})$.

5.2.53 X_{53}

On pourra consulter [5] [101].

$$X_{53}=\begin{pmatrix}\frac{q_2\,q_3\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)}{2\,d_{53}}\\ \frac{q_3\,q_1\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)}{2\,d_{53}}\\ \frac{q_1\,q_2\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)}{2\,d_{53}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{53}=(a^8+b^8+c^8)-2\,(b^6\,c^2+c^6\,a^2+a^6\,b^2)-2\,(b^2\,c^6+c^2\,a^6+a^2\,b^6)$
$+2\,(b^4\,c^4+c^4\,a^4+a^4\,b^4)+2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^2+b^2+c^2)=d_{8,\,1}-2\,d_{8,\,3}+2\,d_{8,\,7}+2\,d_{8,\,9}$.

Relations avec les points précédents

$X_{53}=\frac{A_{1,\,53}\,X_1+A_{2,\,53}\,X_2+A_{3,\,53}\,X_3}{s^4-2\,s^2\,[r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+2\,\mathrm{R})^2\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$=\frac{-4\,s^2\,r^2\,X_4+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_6}{s^4-2\,s^2\,[r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+2\,\mathrm{R})^2\,(r+4\,\mathrm{R})}$, avec :
$A_{1,\,53}=[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]$,
$A_{2,\,53}=-6\,\{s^2\,(2\,r+\mathrm{R})-(r+2\,\mathrm{R})^2\,\mathrm{R}\}\,r$,
$A_{3,\,53}=2\,[3\,s^2+(r+2\,\mathrm{R})^2]\,r^2$.

On a $s^4-2\,s^2\,[r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+2\,\mathrm{R})^2\,(r+4\,\mathrm{R})=-\frac{d_{53}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{53}\in(X_4X_6)$.

5.2.54 X_{54} point de Kosnita

On pourra consulter [5] [102].

101. p. 177
102. p. 177

$$X_{54}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)}{d_{54}}\\ \frac{b^2\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)}{d_{54}}\\ \frac{c^2\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)}{d_{54}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{54}=(a^{10}+b^{10}+c^{10})-3\,(b^8\,c^2+c^8\,a^2+a^8\,b^2)-3\,(b^2\,c^8+c^2\,a^8+a^2\,b^8)$ $+\,2\,(b^6\,c^4+c^6\,a^4+a^6\,b^4)+a^2\,b^2\,c^2\,(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^4\,c^6+c^4\,a^6+a^4\,b^6)$ $+4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)=d_3\,\delta_{54}=d_{10,\,1}-3\,d_{10,\,3}+2\,d_{10,\,7}+d_{10,\,9}+4\,d_{10,\,13}$ et $\delta_{54}=-(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^4\,a^2+a^2\,b^4)+a^2\,b^2\,c^2$ $=-d_{6,\,1}+d_{6,\,3}+d_{6,\,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{54}=\frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-3\,(2\,r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+[s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_3}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2}$
$=\frac{2\,\mathrm{R}^2\,X_5+[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-7\,\mathrm{R}^2]\,X_{49}}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2}=\frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2]\,X_{24}}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2}$

On a $2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2=\frac{d_{54}}{256\,s^4\,r^4}=\frac{\delta_{54}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{54}\in(X_5X_{49})$, $X_{54}\in(X_6X_{24})$.

5.2.55 X_{55}

On pourra consulter [5] [103].

$$X_{55}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,(2\,a')}{d_{55}}\\ \frac{b^2\,(2\,b')}{d_{55}}\\ \frac{c^2\,(2\,c')}{d_{55}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{55}=-(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)=-d_{3,\,1}+d_{3,\,2}$.

Relations avec les points précédents

$X_{55}=\frac{\mathrm{R}\,X_1+r\,X_3}{r+\mathrm{R}}=\frac{3\,r\,X_2-(2\,r-\mathrm{R})\,X_{11}}{r+\mathrm{R}}=\frac{-r\,X_4+(2\,r+\mathrm{R})\,X_{12}}{r+\mathrm{R}}$
$=\frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6-[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{31}}{2\,r\,(r+\mathrm{R})}=\frac{-\mathrm{R}\,X_8+(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{2\,(r+\mathrm{R})}$
$=\frac{-[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{19}+(r+2\,\mathrm{R})\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,X_{25}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(r+\mathrm{R})}$.

On a $r+\mathrm{R}=\frac{d_{55}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{55}\in(X_1X_3)$, $X_{55}\in(X_2X_{11})$, $X_{55}\in(X_4X_{12})$, $X_{55}\in(X_6X_{31})$, $X_{55}\in(X_8X_{21})$, $X_{55}\in(X_{19}X_{25})$.

103. pp. 177-178

5.2.56 X_{56}

On pourra consulter [5] [104].

$$X_{56} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})}{d_{56}} \\ \frac{b^2\,(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})}{d_{56}} \\ \frac{c^2\,(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})}{d_{56}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(2\,b\,c-q_1)}{d_{56}} \\ \frac{b^2\,(2\,c\,a-q_2)}{d_{56}} \\ \frac{c^2\,(2\,a\,b-q_3)}{d_{56}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{56} = (a^4+b^4+c^4)-2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+2\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{46} = d_1\,d^{'}_{56}$
$= d_{4,\,1} - 2\,d_{4,\,3} + 2\,d_{4,\,4}$ et $d^{'}_{56} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b)$
$- (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 4\,a\,b\,c = d^{'}_{46} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 4\,d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{56} = \frac{-\mathrm{R}\,X_1+r\,X_3}{r-\mathrm{R}} = \frac{3\,r\,X_2-(2\,r+\mathrm{R})\,X_{12}}{r-\mathrm{R}} = \frac{-r\,X_4+(2\,r-\mathrm{R})\,X_{11}}{r-\mathrm{R}}$
$= \frac{-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_6+[s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_{41}}{2\,s^2\,(r-\mathrm{R})} = \frac{-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_7+r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{2\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r-\mathrm{R})}$
$= \frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{25}-[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{34}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(r-\mathrm{R})}$.

On a $r - \mathrm{R} = -\frac{d_{56}}{16\,s^2\,r} = -\frac{d^{'}_{56}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{56} \in (X_1X_3)$, $X_{56} \in (X_2X_{12})$, $X_{56} \in (X_4X_{11})$, $X_{56} \in (X_6X_{41})$, $X_{56} \in (X_7X_{21})$, $X_{56} \in (X_{25}X_{34})$.

5.2.57 X_{57}

On pourra consulter [5] [105].

$$X_{57} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})}{d_{57}} \\ \frac{b\,(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})}{d_{57}} \\ \frac{c\,(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})}{d_{57}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{57} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 6\,a\,b\,c$
$= d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 6\,d_{3,\,3}$.

$X_{57} = \mathrm{Ceva}(X_6,\ X_{56})$.

Relations avec les points précédents

$X_{57} = -\frac{(r+2\,\mathrm{R})\,X_1-2\,r\,X_3}{r-2\,\mathrm{R}} = \frac{3\,r\,X_2-(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{2\,(r-2\,\mathrm{R})}$
$= \frac{2\,[s^2-r\,(r+5\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{28}-[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_{34}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(r-2\,\mathrm{R})}$.

On a $r - 2\,\mathrm{R} = -\frac{d_{57}}{8\,s\,r}$.

104. p. 178
105. p. 178

Donc $X_{57} \in (X_1 X_3)$, $X_{57} \in (X_2 X_7)$, $X_{57} \in (X_{28} X_{34})$.

5.2.58 X_{58}

On pourra consulter [5] [106].

$$X_{58} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(c+a)\,(a+b)}{d_{58}} \\ \frac{b^2\,(a+b)\,(b+c)}{d_{58}} \\ \frac{c^2\,(b+c)\,(c+a)}{d_{58}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{58} = (a^4 + b^4 + c^4) + (b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + a\,b\,c\,(a+b+c)$
$= d_1\,d'_{58} = d_{4,1} + d_{4,2} + d_{4,4}$ et $d'_{58} = (a^3 + b^3 + c^3) + a\,b\,c = d_{3,1} + d_{3,3}$.

$X_{58} = \text{Ceva}(X_6,\ X_{31})$.

Relations avec les points précédents

$X_{58} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 6\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 4\,r^2\,X_3}{s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 2\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{-2\,r^2\,X_3 + [s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{-4\,[s^2-r\,(r+5\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,r\,(r+\mathrm{R})\,X_{28} + [s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{34}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,[s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})]}$
$= \frac{-2\,r\,(2\,r+\mathrm{R})\,X_{35} + [s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})]\,X_{42}}{s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2 - r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{58}}{4\,s^2} = \frac{d'_{58}}{2\,s}$.

Donc $X_{58} \in (X_1 X_{21})$, $X_{58} \in (X_3 X_6)$, $X_{58} \in (X_{28} X_{34})$, $X_{58} \in (X_{35} X_{42})$.

5.2.59 X_{59} conjugé isogonal du point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$

On pourra consulter [5] [107].

$$X_{59} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(2\,b')\,(c-a)^2\,(2\,c')\,(a-b)^2}{d_{59}} \\ \frac{b^2\,(2\,c')\,(a-b)^2\,(2\,a')\,(b-c)^2}{d_{59}} \\ \frac{c^2\,(2\,a')\,(b-c)^2\,(2\,b')\,(c-a)^2}{d_{59}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{59} = (a^8 + b^8 + c^8) - 2\,(b^7\,c + c^7\,a + a^7\,b) - 2\,(b\,c^7 + c\,a^7 + a\,b^7)$
$+ 6\,a\,b\,c\,(a^5 + b^5 + c^5) + 2\,(b^5\,c^3 + c^5\,a^3 + a^5\,b^3) - 4\,a\,b\,c\,(b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b)$
$- 4\,a\,b\,c\,(b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4) + 2\,(b^3\,c^5 + c^3\,a^5 + a^3\,b^5)$
$- 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$= d_{8,1} - 2\,d_{8,2} + 6\,d_{8,4} + 2\,d_{8,5} - 4\,d_{8,6} - 2\,d_{8,7} + 5\,d_{8,9} - 2\,d_{8,10}$.

On vérifie que X_{59} est le conjugé isogonal de $X_{11} \equiv F$.

106. p. 178
107. p. 178

$X_{59} = \mathrm{Ceva}(X_{55},\ X_{101})$ (cf. X_{101} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_{59} = \frac{A_{1,\,59}\,X_1 + A_{2,\,59}\,X_2 + A_{3,\,59}\,X_3}{s^2\,[s^2-(r+\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(2\,r-\mathrm{R})}$, avec :

$A_{1,\,59} = 2\,s^4\,\mathrm{R} - s^2\,[r^2\,(r+\mathrm{R}) + 4\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]$
$-\,r\,\{r\,[r^2\,(r+5\,\mathrm{R}) + 14\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 24^{\,4}\}$
$A_{2,\,59} = -3\,s^4\,\mathrm{R} + 3\,s^2\,(3\,r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2 + 3\,r\,[r\,(3\,r+10\,\mathrm{R}) + 4\,(3\,r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}$
$A_{3,\,59} = 2\,s^4\,r - s^2\,r\,[r\,(r+8\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2] + r^2\,[r^2\,(r-4\,\mathrm{R}) - 8\,(2\,r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]$

On a $s^2\,[s^2-(r+\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(2\,r-\mathrm{R}) = \frac{d_{59}}{64\,r^3}$.

5.2.60 X_{60}

On pourra consulter [5] [108].

$$X_{60} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(2\,a')\,(c+a)^2\,(a+b)^2}{d_{60}} \\ \frac{b^2\,(2\,b')\,(a+b)^2\,(b+c)^2}{d_{60}} \\ \frac{c^2\,(2\,c')\,(b+c)^2\,(c+a)^2}{d_{60}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{60} = -(a^7+b^7+c^7) - (b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) - (b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)$
$+\,(b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2) + (b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5) + (b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3)$
$+\,3\,a\,b\,c\,(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + 3\,a\,b\,c\,(b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + (b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4)$
$+\,4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_1\,d'_{60}$
$= -d_{7,\,1} - d_{7,\,2} + d_{7,\,3} + d_{7,\,5} + 3\,d_{7,\,6} + 4\,d_{7,\,7} + 5\,d_{7,\,8}$ et
$d'_{60} = -(a^6+b^6+c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$+\,2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + a^2\,b^2\,c^2$
$= -d_{6,\,1} + d_{6,\,3} + 2\,d_{6,\,6} + d_{6,\,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{60} = \frac{\{s^2\,(r+\mathrm{R}) + r\,[r\,(r+3\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}\,X_1 - 3\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2 + [s^2 - r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})]\,r\,X_3}{s^2\,(2\,r+\mathrm{R}) - r\,[r\,(2\,r+7\,\mathrm{R}) + 7\,\mathrm{R}^2]}$
$= \frac{[s^2 + r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,(2\,r-\mathrm{R})\,X_{36} + [s^2 - r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})]\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{58}}{2\,\{s^2\,(2\,r+\mathrm{R}) - r\,[r\,(2\,r+7\,\mathrm{R}) + 7\,\mathrm{R}^2]\}}$

On a $s^2\,(2\,r+\mathrm{R}) - r\,[r\,(2\,r+7\,\mathrm{R}) + 7\,\mathrm{R}^2] = \frac{d_{60}}{32\,s^3\,r} = \frac{d'_{60}}{16\,s^2\,r}$.

Donc $X_{60} \in (X_{36}X_{58})$.

5.2.61 X_{61}

On pourra consulter [5] [109].

108. p. 178
109. p. 178

$$X_{61} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(q_1+4\sqrt{3}\,\Delta)}{d_{61}} \\ \frac{b^2\,(q_2+4\sqrt{3}\,\Delta)}{d_{61}} \\ \frac{c^2\,(q_3+4\sqrt{3}\,\Delta)}{d_{61}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{61} = d_3 + 4\sqrt{3}\,d_6\,\Delta = (-d_{4,1} + 2\,d_{4,3}) + 4\sqrt{3}\,d_{2,1}\,\Delta.$

Relations avec les points précédents

$$X_{61} = \frac{\sqrt{3}\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 6\sqrt{3}\,r\,\mathrm{R}\,X_2 + 2\,(s-\sqrt{3}\,r)\,r\,X_3}{\sqrt{3}\,s^2+[2\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$
$$= \frac{12\,s\,r\,X_2+\{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{18}}{\sqrt{3}\,s^2+[2\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{2\,s\,r\,X_3+\sqrt{3}\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{\sqrt{3}\,s^2+[2\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$
$$= \frac{-4\,s\,r\,X_4+\{\sqrt{3}\,s^2+[6\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{13}}{\sqrt{3}\,s^2+[2\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{8\,s\,r\,X_5+\{\sqrt{3}\,s^2-[6\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{14}}{\sqrt{3}\,s^2+[2\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}.$$

On a $\sqrt{3}\,s^2 + [2\,s - \sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r = \frac{d_{61}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{61} \in (X_2X_{18})$, $X_{61} \in (X_3X_6)$, $X_{61} \in (X_4X_{13})$, $X_{61} \in (X_5X_{14})$.

5.2.62 X_{62}

On pourra consulter [5] [110].

$$X_{62} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(q_1-4\sqrt{3}\,\Delta)}{d_{62}} \\ \frac{b^2\,(q_2-4\sqrt{3}\,\Delta)}{d_{62}} \\ \frac{c^2\,(q_3-4\sqrt{3}\,\Delta)}{d_{62}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{62} = d_3 - 4\sqrt{3}\,d_6\,\Delta = (-d_{4,1} + 2\,d_{4,3}) - 4\sqrt{3}\,d_{2,1}\,\Delta.$

Relations avec les points précédents

$$X_{62} = \frac{\sqrt{3}\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 6\sqrt{3}\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 2\,(s+\sqrt{3}\,r)\,r\,X_3}{\sqrt{3}\,s^2-[2\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$
$$= \frac{-12\,s\,r\,X_2+\{\sqrt{3}\,s^2+[10\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{17}}{\sqrt{3}\,s^2-[2\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{-2\,s\,r\,X_3+\sqrt{3}\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{\sqrt{3}\,s^2-[2\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$
$$= \frac{4\,s\,r\,X_4+\{\sqrt{3}\,s^2-[6\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{14}}{\sqrt{3}\,s^2-[2\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{-8\,s\,r\,X_5+\{\sqrt{3}\,s^2+[6\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{13}}{\sqrt{3}\,s^2-[2\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}.$$

On a $\sqrt{3}\,s^2 - [2\,s + \sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r = -\frac{d_{62}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{62} \in (X_2X_{17})$, $X_{62} \in (X_3X_6)$, $X_{62} \in (X_4X_{14})$, $X_{62} \in (X_5X_{13})$.

5.2.63 X_{63}

On pourra consulter [5] [111].

110. p. 178
111. p. 178

$X_{63} = \begin{pmatrix} \frac{a\,q_1}{d_{63}} \\ \frac{b\,q_2}{d_{63}} \\ \frac{c\,q_3}{d_{63}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{63} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) = d_{55}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2}$.

$X_{63} = \text{Ceva}(X_9,\, X_{40}) = \text{Ceva}(X_{71},\, X_{72})$ (cf. X_{71}, X_{72} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_{63} = \frac{-(r+2\,\mathrm{R})\,X_1+3\,\mathrm{R}\,X_2+2\,r\,X_3}{r+\mathrm{R}} = \frac{-(r+2\,\mathrm{R})\,X_1+(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{r+\mathrm{R}}$
$= \frac{3\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_2-(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{2\,(r+\mathrm{R})} = \frac{(r+2\,\mathrm{R})\,X_8+r\,X_{20}}{2\,(r+\mathrm{R})} = \frac{2\,\mathrm{R}\,X_{10}+(r-\mathrm{R})\,X_{46}}{r+\mathrm{R}}$
$= \frac{[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_{19}-[s^2-3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-12\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{27}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(r+\mathrm{R})}$.

On a $r + \mathrm{R} = \frac{d_{63}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{63} \in (X_1X_{21})$, $X_{63} \in (X_2X_7)$, $X_{63} \in (X_8X_{20})$, $X_{63} \in (X_{10}X_{46})$, $X_{63} \in (X_{19}X_{27})$.

5.2.64 X_{64}

On pourra consulter [5] [112].

$X_{64} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(4\,b^2\,q_2-\mathrm{S})\,(4\,c^2\,q_3-\mathrm{S})}{d_{64}} \\ \frac{b^2\,(4\,c^2\,q_3-\mathrm{S})\,(4\,a^2\,q_1-\mathrm{S})}{d_{64}} \\ \frac{c^2\,(4\,a^2\,q_1-\mathrm{S})\,(4\,b^2\,q_2-\mathrm{S})}{d_{64}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{64} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6)$
$- 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{26} = d_3\,\delta_{64}$
$= d_{10,\,1} - 3\,d_{10,\,3} + 2\,d_{10,\,7} + 4\,d_{10,\,9} - 2\,d_{10,\,13}$ et
$\delta_{64} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-2\,a^2\,b^2\,c^2 = \delta_{26}$
$= -d_{6,\,1} + d_{6,\,3} - 2\,d_{6,\,7}$.

Relation avec les points précédents

$X_{64} = \frac{-[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+6\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2-4\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,X_3}{s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2}$.

On a $s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2 = \frac{d_{64}}{512\,s^4\,r^4} = \frac{\delta_{64}}{32\,s^2\,r^2}$.

5.2.65 X_{65}

On pourra consulter [5] [113].

112. p. 179
113. p. 179

$$X_{65} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(b+c)\,(2\,b')\,(2\,c')}{2\,d_{65}} \\ \frac{b\,(c+a)\,(2\,c')\,(2\,a')}{2\,d_{65}} \\ \frac{c\,(a+b)\,(2\,a')\,(2\,b')}{2\,d_{65}} \end{pmatrix}$$, avec : $d_{65} = a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d'_{65} = d_{4,\,4}$ et $d'_{65} = a\,b\,c = d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{65} = \frac{(r+\mathrm{R})\,X_1 - r\,X_3}{\mathrm{R}} = \frac{[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_6 - [s^2 - r\,(r+6\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{19}}{2\,s^2\,\mathrm{R}}$
$= \frac{(r+4\,\mathrm{R})\,X_7 - r\,X_8}{4\,\mathrm{R}} = \frac{-2\,r\,X_{10} + (2\,r+\mathrm{R})\,X_{12}}{\mathrm{R}}$
$= \frac{[s^2 - r\,(r+2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_{33} - [s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]\,r\,X_{64}}{2\,[s^2 - 2\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,\mathrm{R}}$.

On a $\mathrm{R} = \frac{d_{65}}{8\,s^2\,r} = \frac{d'_{65}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{65} \in (X_1X_3)$, $X_{65} \in (X_6X_{19})$, $X_{65} \in (X_7X_8)$, $X_{65} \in (X_{10}X_{12})$, $X_{65} \in (X_{33}X_{64})$.

5.2.66 X_{66} conjugé isogonal du point X_{22}

On pourra consulter [5] [114].

$$X_{66} = \begin{pmatrix} \frac{(a^4 - b^4 + c^4)\,(a^4 + b^4 - c^4)}{d_{66}} \\ \frac{(b^4 - c^4 + a^4)\,(b^4 + c^4 - a^4)}{d_{66}} \\ \frac{(c^4 - a^4 + b^4)\,(c^4 + a^4 - b^4)}{d_{66}} \end{pmatrix}$$, avec :

$d_{66} = -(a^8 + b^8 + c^8) + 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) = d_6\,\delta_{26} = -d_{8,\,1} + 2\,d_{8,\,7}$.

On vérifie que X_{66} est le conjugé isogonal du point X_{22}.

Relations avec les points précédents

$X_{66} = \frac{A_{1,\,66}\,X_1 + A_{2,\,66}\,X_2 + A_{3,\,66}\,X_3}{[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]\,\{-2\,s^4 + s^2\,[r\,(5\,r+16\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2] - r\,[r^2\,(r+10\,\mathrm{R}) + 32\,(r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\}}$,
avec :

$A_{1,\,66} = [s^2 + r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,\|2\,s^6 - s^4\,[r\,(7\,r + 24\,\mathrm{R}) + 12\,\mathrm{R}^2]$
$+ s^2\,\{r\,[2\,r^2\,(3\,r + 23\,\mathrm{R}) + 6\,(19\,r + 16\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 16\,\mathrm{R}^4\}$
$- r\,\langle r\,\{r\,[2\,r^2\,(3\,r + 23\,\mathrm{R}) + 6\,(19\,r + 16\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 192\,\mathrm{R}^4\} + 64\,\mathrm{R}^5\rangle\|$
$A_{2,\,66} = -3\,[s^2 - r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,\|2\,s^6 - s^4\,[r\,(7\,r + 24\,\mathrm{R}) + 12\,\mathrm{R}^2]$
$+ s^2\,\{r\,[2\,r^2\,(3\,r + 23\,\mathrm{R}) + 6\,(19\,r + 16\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 16\,\mathrm{R}^4\}$
$- r\,\langle r\,\{r\,[2\,r^2\,(3\,r + 23\,\mathrm{R}) + 6\,(19\,r + 16\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 192\,\mathrm{R}^4\} + 64\,\mathrm{R}^5\rangle\|$

114. p. 179

$A_{3,\,66} = 2\,s^8 - s^6\,[r\,(13\,r + 32\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2]$
$+\, s^4\,r\,[r^2\,(27\,r + 146\,\mathrm{R}) + 8\,(29\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]$
$-\, s^2\,r^2\,\{r\,[r^2\,(19\,r + 176\,\mathrm{R}) + 4\,(147\,r + 208\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 416\,\mathrm{R}^4\}$
$+\, r^3\,\langle r\,\{r\,[r^2\,(3\,r + 46\,\mathrm{R}) + 4\,(69\,r + 202\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 1152\,\mathrm{R}^4\} + 640\,\mathrm{R}^5\rangle$

On a $64\,s^2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,[s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\,r^2 = d_{66}$.

5.2.67 X_{67} conjugé isogonal du point X_{23}

On pourra consulter [5] [115].

$$X_{67} = \begin{pmatrix} \frac{(c^4+a^4-b^4-c^2\,a^2)\,(a^4+b^4-c^4-a^2\,b^2)}{d_{67}} \\ \frac{(a^4+b^4-c^4-a^2\,b^2)\,(b^4+c^4-a^4-b^2\,c^2)}{d_{67}} \\ \frac{(b^4+c^4-a^4-b^2\,c^2)\,(c^4+a^4-b^4-c^2\,a^2)}{d_{67}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{67} = -(a^8+b^8+c^8)+2\,(b^4\,c^4+c^4\,a^4+a^4\,b^4)-a^2\,b^2\,c^2\,(a^2+b^2+c^2) = d_6\,d_{23}$
$= -d_{8,\,1} + 2\,d_{8,\,7} - d_{8,\,9}$.

On vérifie que X_{67} est le conjugé isogonal du point X_{23}.

Relations avec les points précédents

$X_{67} = \frac{A_{1,\,67}\,X_1+A_{2,\,67}\,X_2+A_{3,\,67}\,X_3}{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,\{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]-9\,\mathrm{R}^2\}}$, avec :

$A_{1,\,67} = -6\,[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]$
$A_{2,\,67} = 6\,\{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[2\,s^2-2\,r\,(r+\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]-9\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,\mathrm{R}^2\}$
$A_{3,\,67} = 2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,[-s^2 + r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R})] - 36\,r^2\,\mathrm{R}^2$

On a $2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,\{2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\} = \frac{d_{67}}{16\,s^2\,r^2}$.

5.2.68 X_{68} point de Prasolov

On pourra consulter [5] [116].

$$X_{68} = \begin{pmatrix} \frac{q_1\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(q_3^2-\mathrm{S})}{4\,d_{68}} \\ \frac{q_2\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(q_1^2-\mathrm{S})}{4\,d_{68}} \\ \frac{q_3\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(q_2^2-\mathrm{S})}{4\,d_{68}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1\,(q_2^2-2\,c^2\,a^2)\,(q_3^2-2\,a^2\,b^2)}{d_{68}} \\ \frac{q_2\,(q_3^2-2\,a^2\,b^2)\,(q_1^2-2\,b^2\,c^2)}{d_{68}} \\ \frac{q_3\,(q_1^2-2\,b^2\,c^2)\,(q_2^2-2\,c^2\,a^2)}{d_{68}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

115. p. 179
116. p. 179

$d_{68} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{26} = d_3\,\delta_{68}$
$= d_{10,\,1} - 3\,d_{10,\,3} + 2\,d_{10,\,7} + 4\,d_{10,\,9} - 2\,d_{10,\,13}$ et
$\delta_{68} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^4\,a^2+a^2\,b^4)-2\,a^2\,b^2\,c^2 = \delta_{26}$
$= -d_{6,\,1} + d_{6,\,3} - 2\,d_{6,\,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{68} = \frac{-[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_2-[s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_3}{s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{3\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-3\,\mathrm{R}^2]\,X_2-[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2]\,X_{54}}{s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2} = \frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_4-2\,\mathrm{R}^2\,X_{52}}{s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_5-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2}$.

On a $s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2 = \frac{d_{68}}{512\,s^4\,r^4} = \frac{\delta_{68}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{68} \in (X_2X_{54})$, $X_{68} \in (X_4X_{52})$, $X_{68} \in (X_5X_6)$.

5.2.69 X_{69}

On pourra consulter [5] [117].

$X_{69} = \begin{pmatrix} \frac{q_1}{d_{69}} \\ \frac{q_2}{d_{69}} \\ \frac{q_3}{d_{69}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{69} = a^2 + b^2 + c^2 = d_6 = d_{2,\,1}$.

$X_{69} = \mathrm{Ceva}(X_2,\,X_{20}) = \mathrm{Ceva}(X_{63},\,X_{78})$ (cf. X_{78} ci-après).

Relations avec les points précédents

$X_{69} = \frac{-2\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,(s^2-r^2)\,X_2+4\,r^2\,X_3}{s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$= 3\,X_2-2\,X_6 = \frac{-r\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_7+s^2\,X_8}{s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,X_{20}+2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{64}}{s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{69}}{2}$.

Donc $X_{69} \in (X_2X_6)$, $X_{69} \in (X_7X_8)$, $X_{69} \in (X_{20}X_{64})$.

5.2.70 X_{70}

On pourra consulter [5] [118].

117. p. 179
118. p. 179

$$X_{70} = \begin{pmatrix} \frac{[a^4\,(q_1^2-\mathrm{S})+b^4\,(q_2^2-\mathrm{S})-c^4\,(q_3^2-\mathrm{S})]\,[a^4\,(q_1^2-\mathrm{S})-b^4\,(q_2^2-\mathrm{S})+c^4\,(q_3^2-\mathrm{S})]}{4\,d_{70}} \\ \frac{[b^4\,(q_2^2-\mathrm{S})+c^4\,(q_3^2-\mathrm{S})-a^4\,(q_1^2-\mathrm{S})]\,[b^4\,(q_2^2-\mathrm{S})-c^4\,(q_3^2-\mathrm{S})+a^4\,(q_1^2-\mathrm{S})]}{4\,d_{70}} \\ \frac{[c^4\,(q_3^2-\mathrm{S})+a^4\,(q_1^2-\mathrm{S})-b^4\,(q_2^2-\mathrm{S})]\,[c^4\,(q_3^2-\mathrm{S})-a^4\,(q_1^2-\mathrm{S})+b^4\,(q_2^2-\mathrm{S})]}{4\,d_{70}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{70} = -(a^{16}+b^{16}+c^{16})+4\,(b^{14}\,c^2+c^{14}\,a^2+a^{14}\,b^2)+4\,(b^2\,c^{14}+c^2\,a^{14}+a^2\,b^{14})$
$-4\,(b^{12}\,c^4+c^{12}\,a^4+a^{12}\,b^4)-8\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^{10}+b^{10}+c^{10})-4\,(b^4\,c^{12}+c^4\,a^{12}+a^4\,b^{12})$
$-4\,(b^{10}\,c^6+c^{10}\,a^6+a^{10}\,b^6)-4\,(b^6\,c^{10}+c^6\,a^{10}+a^6\,b^{10})+10\,(b^8\,c^8+c^8\,a^8+a^8\,b^8)$
$+\,4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^6\,c^4+c^6\,a^4+a^6\,b^4)+8\,a^4\,b^4\,c^4\,(a^4+b^4+c^4)$
$+\,4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^6+c^4\,a^6+a^4\,b^6)-8\,a^4\,b^4\,c^4\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{70}$
$= -d_{16,\,1}+4\,d_{16,\,3}-4\,d_{16,\,7}-8\,d_{16,\,9}-4\,d_{16,\,13}+10\,d_{16,\,21}+4\,d_{16,\,23}+8\,d_{16,\,25}$
$-\,8\,d_{16,\,29}$ et
$\delta_{70} = (a^{12}+b^{12}+c^{12})-2\,(b^{10}\,c^2+c^{10}\,a^2+a^{10}\,b^2)$
$-\,2\,(b^2\,c^{10}+c^2\,a^{10}+a^2\,b^{10})-(b^8\,c^4+c^8\,a^4+a^8\,b^4)+2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6+b^6+c^6)$
$-\,(b^4\,c^8+c^4\,a^8+a^4\,b^8)+4\,(b^6\,c^6+c^6\,a^6+a^6\,b^6)-2\,a^4\,b^4\,c^4$
$= d_{12,\,1}-2\,d_{12,\,3}-d_{12,\,7}+2\,d_{12,\,9}+4\,d_{12,\,13}-2\,d_{12,\,19}.$

Relation avec les points précédents

$X_{70} = \frac{A_{1,\,70}\,X_1+A_{2,\,70}\,X_2+A_{3,\,70}\,X_3}{s^4-2\,s^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]+r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R})+2\,(11\,r+12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]+7\,\mathrm{R}^4}$, avec :

$A_{1,\,70} = -\{s^2-[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]\}\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]$,
$A_{2,\,70} = 3\,\{s^2-[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]\}\,\{s^2-[r\,(r+2\,\mathrm{R})+\mathrm{R}^2]\}$,
$A_{3,\,70} = -\{s^4-s^2\,[4\,r\,(r+2\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]$
$+\,r\,[r^2\,(3\,r+16\,\mathrm{R})+(25\,r+12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]+2\,\mathrm{R}^4\}$.

On a $s^4-2\,s^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]$
$+\,r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R})+2\,(11\,r+12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]+7\,\mathrm{R}^4 = \frac{d_{70}}{16384\,s^6\,r^6} = \frac{\delta_{70}}{1024\,s^4\,r^4}$.

5.2.71 X_{71}

On pourra consulter [5] [119].

$$X_{71} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b+c)\,q_1}{d_{71}} \\ \frac{b^2\,(c+a)\,q_2}{d_{71}} \\ \frac{c^2\,(a+b)\,q_3}{d_{71}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{71} = -(b^4\,c+c^4\,a+a^4\,b)-(b\,c^4+c\,a^4+a\,b^4)+(b^3\,c^2+c^3\,a^2+a^3\,b^2)$
$+\,(b^2\,c^3+c^2\,a^3+a^2\,b^3)+2\,a\,b\,c\,(b\,c+c\,a+a\,b) = -d_{5,\,2}+d_{5,\,3}+2\,d_{5,\,5}.$

119. p. 179

Relations avec les points précédents

$$X_{71} = \frac{-[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})+4\,\mathrm{R}^2]\,X_1+6\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_3}{s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})}$$
$$= \frac{4\,s^2\,X_3-[3\,s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,X_{48}}{s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{-2\,s^2\,\mathrm{R}\,X_4+[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})+4\,\mathrm{R}^2]\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_9}{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})}$$
$$= \frac{[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6-s^2\,[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{31}}{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2}$$
$$= \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_{37}-2\,s^2\,\mathrm{R}\,X_{65}}{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r} = \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+\mathrm{R})\,X_{63}-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,\mathrm{R}\,X_{69}}{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r}$$

On a $s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{71}}{8\,s\,r^2}$.

Donc $X_{71} \in (X_3X_{48})$, $X_{71} \in (X_4X_9)$, $X_{71} \in (X_6X_{31})$, $X_{71} \in (X_{37}X_{65})$, $X_{71} \in (X_{63}X_{69})$.

5.2.72 X_{72}

On pourra consulter [5] [120].

$$X_{72} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(b+c)\,q_1}{2\,d_{72}} \\ \frac{b\,(c+a)\,q_2}{2\,d_{72}} \\ \frac{c\,(a+b)\,q_3}{2\,d_{72}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{72} = a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{65} = d_1\,d^{'}_{72} = d_{4,\,4}$ et $d^{'}_{72} = d^{'}_{65} = a\,b\,c = d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$$X_{72} = \frac{-(r+2\,\mathrm{R})\,X_1+3\,\mathrm{R}\,X_2+r\,X_3}{\mathrm{R}} = \frac{[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{2\,r\,\mathrm{R}}$$
$$= \frac{-r\,X_3+(r+\mathrm{R})\,X_{63}}{\mathrm{R}} = \frac{-r\,X_4+(r+\mathrm{R})\,X_8}{2\,\mathrm{R}} = \frac{2\,(r+\mathrm{R})\,X_{10}-(2\,r+\mathrm{R})\,X_{12}}{\mathrm{R}}$$
$$= \frac{-[s^2-(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{40}+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{64}}{2\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}}.$$

On a $\mathrm{R} = \frac{d_{72}}{8\,s^2\,r} = \frac{d^{'}_{72}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{72} \in (X_1X_6)$, $X_{72} \in (X_3X_{63})$, $X_{72} \in (X_4X_8)$, $X_{72} \in (X_{10}X_{12})$, $X_{72} \in (X_{40}X_{64})$.

5.2.73 X_{73}

On pourra consulter [5] [121].

$$X_{73} = \begin{pmatrix} \frac{(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})\,(b+c)\,a^2\,q_1}{d_{73}} \\ \frac{(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})\,(c+a)\,b^2\,q_2}{d_{73}} \\ \frac{(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(a+b)\,c^2\,q_3}{d_{73}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

120. p. 179
121. p. 179

$d_{73} = -(b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) - (b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6) - (b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2)$
$- (b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5) + 2\,(b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3)$
$+a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)+2\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4) = d_1\,d'_{73}$
$= -d_{7,\,2} - d_{7,\,3} + 2\,d_{7,\,5} + d_{7,\,6}$ et
$d'_{73} = -(b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5) + 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$+ 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) - a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2 = -d_{6,\,2} + 2\,d_{6,\,4} + 2\,d_{6,\,5} - d_{6,\,6} + 2\,d_{6,\,7}$

Relations avec les points précédents

$$X_{73} = \frac{(s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2)\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2+4\,r\,\mathrm{R}\,X_3}{s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2} = \frac{(s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2)\,X_1-2\,r\,\mathrm{R}\,X_4}{s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2}$$
$$= \frac{\{s^2\,[s^2-2\,r\,(r+5\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+4\,\mathrm{R})^2\,(r+2\,\mathrm{R})\}\,X_6+[s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-(r\,(r+4\,\mathrm{R})^2)]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_{41}}{s^2\,[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]}$$
$$= \frac{[-s^2+r\,(3\,r+8\,\mathrm{R})+4\,\mathrm{R}^2]\,(2\,r-\mathrm{R})\,X_{36}+2\,[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{54}}{[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,(2\,r+\mathrm{R})}$$
$$= \frac{[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})]\,X_{42}-4\,\mathrm{R}^2\,X_{65}}{s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2} = \frac{2\,[s^2-2\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,(r+\mathrm{R})\,X_{55}-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{64}}{[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,(r+2\,\mathrm{R})}.$$

On a $s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{73}}{32\,s^3\,r^2} = \frac{d'_{73}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{73} \in (X_1X_4)$, $X_{73} \in (X_6X_{41})$, $X_{73} \in (X_{36}X_{54})$, $X_{73} \in (X_{42}X_{65})$, $X_{73} \in (X_{55}X_{64})$.

5.2.74 X_{74}

On pourra consulter [5] [122].

$$X_{74} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b^2\,q_2-q_3\,q_1)\,(c^2\,q_3-q_1\,q_2)}{d_{74}} \\ \frac{b^2\,(c^2\,q_3-q_1\,q_2)\,(a^2\,q_1-q_2\,q_3)}{d_{74}} \\ \frac{c^2\,(a^2\,q_1-q_2\,q_3)\,(b^2\,q_2-q_3\,q_1)}{d_{74}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(3\,b^2\,q_2-\mathrm{S})\,(3\,c^2\,q_3-\mathrm{S})}{d_{74}} \\ \frac{b^2\,(3\,c^2\,q_3-\mathrm{S})\,(3\,a^2\,q_1-\mathrm{S})}{d_{74}} \\ \frac{c^2\,(3\,a^2\,q_1-\mathrm{S})\,(3\,b^2\,q_2-\mathrm{S})}{d_{74}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{74} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$- 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{74} = d_3\,d_{23}$
$= d_{10,\,1} - 3\,d_{10,\,3} + 2\,d_{10,\,7} + 5\,d_{10,\,9} - 4\,d_{10,\,13}$ et
$\delta_{74} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^4\,a^2+a^2\,b^4)-3\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{23}$
$= -d_{6,\,1} + d_{6,\,3} - 3\,d_{6,\,7}$.

$X_{74} = \mathrm{Ceva}(X_{15},\ X_{16})$.

122. p. 179

Relations avec les points précédents

$X_{74}=-\frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-3\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2-[3\,s^2-r\,(r+12\,\mathrm{R})-18\,\mathrm{R}^2]\,X_3}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2}$
$=\frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2]\,X_{20}+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{68}}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2}$
$=\frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-5\,\mathrm{R}^2]\,X_{24}+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{64}}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2}$
$=\frac{[3\,s^2-r\,(r+8\,\mathrm{R})-12\,\mathrm{R}^2]\,(2\,r+\mathrm{R})\,X_{35}-[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{73}}{2\,[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2]\,r}$

On a $2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2=\frac{d_{74}}{256\,s^4\,r^4}=\frac{\delta_{74}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{74}\in(X_{20}X_{68})$, $X_{74}\in(X_{24}X_{64})$, $X_{74}\in(X_{35}X_{73})$.

5.2.75 X_{75}

On pourra consulter [5] [123].

$X_{75}=\begin{pmatrix}\frac{b\,c}{d_{75}}\\ \frac{c\,a}{d_{75}}\\ \frac{a\,b}{d_{75}}\end{pmatrix}$, avec : $d_{75}=(b\,c+c\,a+a\,b)=d_{37}=d_{2,\,2}$.

$X_{75}=\mathrm{Ceva}(X_1,\,X_{63})=\mathrm{Ceva}(X_2,\,X_8)$.

Relations avec les points précédents

$X_{75}=\frac{-2\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,(s^2+r^2)\,X_2-4\,r2\,X_3}{s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})}=3\,X_2-2\,X_{37}=\frac{r\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_7+s^2\,X_8}{s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$=\frac{2\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{19}-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-3\,(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_{27}}{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]}$.

On a $s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})=d_{75}$.

Donc $X_{75}\in(X_2X_{37})$, $X_{75}\in(X_7X_8)$, $X_{75}\in(X_{19}X_{27})$.

5.2.76 $X_{76}\equiv\Omega''$ troisième point de Brocard

On pourra consulter [5] [124].

$X_{76}\equiv\Omega''=\begin{pmatrix}\frac{b^2\,c^2}{d_{76}}\\ \frac{c^2\,a^2}{d_{76}}\\ \frac{a^2\,b^2}{d_{76}}\end{pmatrix}$, avec :
$d_{76}=(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)=d_{39}=d_\Omega=d_{\Omega'}=d_{4,\,3}$.

$\omega_1(\Omega'')=\pi-\alpha$, $\omega_2(\Omega'')=\pi-\beta$, $\omega_3(\Omega'')=\pi-\gamma$.

On a $\Omega+\Omega'+\Omega''=3\,X_2$.

123. p. 179
124. p. 179

$X_{76} = \text{Ceva}(X_2,\, X_{69}) = \text{Ceva}(X_6,\, X_{22})$.

Relations avec les points précédents

$$X_{76} = \frac{-2\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,[s^4+2\,s^2\,r\,(r-2\,\mathrm{R})+r^3\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_2-4\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2\,X_3}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$$
$$= 3\,X_2 - 2\,X_{39} = \frac{4\,s^2\,r^2\,X_4+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2\,X_{69}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2} = \frac{-16\,s^2\,r\,\mathrm{R}\,X_{10}+[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2\,X_{75}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}.$$

On a $s^4 + 2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2 = d_{76}$.

Donc $X_{76} \in (X_2X_{39}),\ X_{76} \in (X_4X_{69}),\ X_{76} \in (X_{10}X_{75})$.

5.2.77 X_{77}

On pourra consulter [5] [125].

$$X_{77} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})\,q_1}{d_{77}} \\ \frac{b\,(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})\,q_2}{d_{77}} \\ \frac{c\,(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,q_3}{d_{77}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$d_{77} = -(a^5+b^5+c^5) - (b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) - (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)$$
$$+ 2\,(b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^2+b^2+c^2) + 2\,(b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$$
$$- 2\,a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b) = -d_{5,1} - d_{5,2} + 2\,d_{5,3} + 2\,d_{5,4} - 2\,d_{5,5}$$

Relations avec les points précédents

$$X_{77} = \frac{[s^2-2\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,X_1-3\,r\,\mathrm{R}\,X_2+4\,r\,\mathrm{R}\,X_3}{s^2-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}} = \frac{s^2\,X_1-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_7}{s^2-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}}$$
$$= \frac{[3\,s^2-r\,(r+8\,\mathrm{R})-12\,\mathrm{R}^2]\,r\,\mathrm{R}\,X_{29}+[s^2-2\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{34}}{[s^2-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]}$$
$$= \frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_{69}+s^2\,[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{73}}{(s^2+r^2)\,[s^2-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]}$$

On a $s^2 - (r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R} = \frac{d_{77}}{32\,s\,r^2}$.

Donc $X_{77} \in (X_1X_7),\ X_{77} \in (X_{29}X_{34}),\ X_{77} \in (X_{69}X_{73})$.

5.2.78 X_{78}

On pourra consulter [5] [126].

$$X_{78} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,a^{'})\,q_1}{d_{78}} \\ \frac{b\,(2\,b^{'})\,q_2}{d_{78}} \\ \frac{c\,(2\,c^{'})\,q_3}{d_{78}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

125. p. 179
126. p. 179

$d_{78} = (a^4+b^4+c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a+b+c)$
$= d_{46} = d_1\,d'_{78} = d_{4,1} - 2\,d_{4,3} + 2\,d_{4,4}$ et
$d'_{78} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 4\,a\,b\,c$
$= d'_{46} = d_{3,1} - d_{3,2} + 4\,d_{3,3}$

Relations avec les points précédents

$X_{78} = \frac{(r+2\,\mathrm{R})\,X_1 - 3\,\mathrm{R}\,X_2}{r-\mathrm{R}} = \frac{2\,r\,X_3 - (r+\mathrm{R})\,X_{63}}{r-\mathrm{R}} = \frac{-(r+4\,\mathrm{R})\,X_9 + (2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{r-\mathrm{R}}$
$= \frac{-[3\,s^2 - r\,(r+8\,\mathrm{R}) - 12\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{29} + [s^2 - r\,(r+2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_{33}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(r-\mathrm{R})}$
$= \frac{-[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,\mathrm{R}\,X_{69} + [s^2 + r\,(r-2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{73}}{(s^2+r^3)\,(r-\mathrm{R})}$

On a $r - \mathrm{R} = -\frac{d_{78}}{16\,s^2\,r} = -\frac{d'_{78}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{78} \in (X_1X_2)$, $X_{78} \in (X_3X_{63})$, $X_{78} \in (X_9X_{21})$, $X_{78} \in (X_{29}X_{33})$, $X_{78} \in (X_{69}X_{73})$.

5.2.79 X_{79}

On pourra consulter [5] [127].

$X_{79} = \begin{pmatrix} \frac{(q_2+c\,a)\,(q_3+a\,b)}{d_{79}} \\ \frac{(q_3+a\,b)\,(q_1+b\,c)}{d_{79}} \\ \frac{(q_1+b\,c)\,(q_2+c\,a)}{d_{79}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{79} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 3\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{21} = d_1\,d'_{79}$
$= -d_{4,1} + 2\,d_{4,3} + 3\,d_{4,4}$ et
$d'_{79} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + a\,b\,c$
$= d'_{21} = -d_{3,1} + d_{3,2} + d_{3,3}$

Relations avec les points précédents

$X_{79} = \frac{(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_1 + 6\,r\,X_2 - 6\,r\,X_3}{2\,r+3\,\mathrm{R}} = \frac{(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_1 + 6\,r\,X_{30}}{2\,r+3\,\mathrm{R}}$
$= \frac{r\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_9 - [r\,(r+2\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,X_{46}}{(2\,r+3\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}} = \frac{2\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21} - [4\,r\,(r+\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,X_{36}}{(2\,r+3\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}}$.

On a $2\,r + 3\,\mathrm{R} = \frac{d_{79}}{8\,s^2\,r} = \frac{d'_{79}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{79} \in (X_1X_{30})$, $X_{79} \in (X_9X_{46})$, $X_{79} \in (X_{21}X_{36})$.

5.2.80 X_{80}

On pourra consulter [5] [128].

127. p. 179
128. p. 179

$X_{80} = \begin{pmatrix} \frac{(q_2 - c\,a)\,(q_3 - a\,b)}{d_{80}} \\ \frac{(q_3 - a\,b)\,(q_1 - b\,c)}{d_{80}} \\ \frac{(q_1 - b\,c)\,(q_2 - c\,a)}{d_{80}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{80} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) - a\,b\,c\,(a + b + c) = d_1\,d'_{80}$ $= -d_{4,1} + 2\,d_{4,3} - d_{4,4}$ et

$d'_{80} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 3\,a\,b\,c$ $= -d_{11} = -d_{3,1} + d_{3,2} - 3\,d_{3,3}$

Relations avec les points précédents

$X_{80} = -\frac{(2\,r+\mathrm{R})\,X_1 - 6\,r\,X_2 + 2\,r\,X_3}{2\,r-\mathrm{R}} = -\frac{(2\,r+\mathrm{R})\,X_1 - 4\,r\,X_5}{2\,r-\mathrm{R}} = \frac{2\,(2\,r+\mathrm{R})\,X_{10} - (2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{2\,r-\mathrm{R}}$ $= \frac{-4\,\mathrm{R}\,X_{65} + (2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{79}}{2\,r-\mathrm{R}}$.

On a $2\,r - \mathrm{R} = \frac{d_{80}}{8\,s^2\,r} = \frac{d'_{80}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{80} \in (X_1X_5)$, $X_{80} \in (X_{10}X_{21})$, $X_{80} \in (X_{65}X_{79})$.

5.2.81 X_{81}

On pourra consulter [5] [129].

$X_{81} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(c+a)\,(a+b)}{d_{81}} \\ \frac{b\,(a+b)\,(b+c)}{d_{81}} \\ \frac{c\,(b+c)\,(c+a)}{d_{81}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{81} = (a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c$ $= d_{3,1} + d_{3,2} + 3\,d_{3,3}$.

$X_{81} = \mathrm{Ceva}(X_1,\, X_6)$.

Relations avec les points précédents

$X_{81} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - 3\,r\,\mathrm{R}\,X_2 - 2\,r^2\,X_3}{s^2-r\,(r+\mathrm{R})} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1 - r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{s^2-r\,(r+\mathrm{R})}$
$= \frac{3\,r\,\mathrm{R}\,X_2 + [s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2-r\,(r+\mathrm{R})} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_7 + [s^2-3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-12\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{27}}{2\,[s^2-r\,(r+\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})}$
$= \frac{-[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,\langle[s^2-r\,(r+5\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{28} - \{s^2\,(2\,r+\mathrm{R}) - r\,[r\,(2\,r+7\,\mathrm{R})+7\,\mathrm{R}^2]\}\,X_{60}\rangle}{[s^2-r\,(r+\mathrm{R})]\,\{s^2\,(r+\mathrm{R}) + r\,[r\,(r+3\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\}}$
$= \frac{-(r^2-4\,\mathrm{R}^2)\,X_{57} + [s^2-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,X_{77}}{s^2-r\,(r+\mathrm{R})}$.

On a $s^2 - r\,(r+\mathrm{R}) = \frac{d_{81}}{4\,s}$.

Donc $X_{81} \in (X_1X_{21})$, $X_{81} \in (X_2X_6)$, $X_{81} \in (X_7X_{27})$, $X_{81} \in (X_{28}X_{60})$, $X_{81} \in (X_{57}X_{77})$.

129. p. 179

5.2.82 X_{82}

On pourra consulter [5] [130].

$$X_{82} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(c^2+a^2)\,(a^2+b^2)}{d_{82}} \\ \frac{b\,(a^2+b^2)\,(b^2+c^2)}{d_{82}} \\ \frac{c\,(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}{d_{82}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{82} = (a^5 + b^5 + c^5) + (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$+ a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_{5,\,1} + d_{5,\,3} + d_{5,\,5}$.

$X_{82} = \text{Ceva}(X_1,\ X_{31})$.

Relations avec les points précédents

$X_{82} = \frac{\{s^4-6\,s^2\,r\,\mathrm{R}-r^2\,[r\,(r+2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\}\,X_1-3\,[s^2\,r\,\mathrm{R}-r^2\,(3\,r+8\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,X_2-4\,[s^2-r\,(r+3\,\mathrm{R})]\,r^2\,X_3}{s^4-s^2\,r\,(4\,r+9\,\mathrm{R})+r^2\,[(r+4\,\mathrm{R})\,(3\,r+7\,\mathrm{R})]}$
$= \frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{31}+[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_{75}}{s^4-s^2\,r\,(4\,r+9\,\mathrm{R})+r^2\,[(r+4\,\mathrm{R})\,(3\,r+7\,\mathrm{R})]}$

On a $s^4 - s^2\,r\,(4\,r + 9\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})\,(3\,r + 7\,\mathrm{R}) = \frac{d_{82}}{4\,s}$.

Donc $X_{82} \in (X_{31}X_{75})$.

5.2.83 X_{83}

On pourra consulter [5] [131].

$$X_{83} = \begin{pmatrix} \frac{(c^2+a^2)\,(a^2+b^2)}{d_{83}} \\ \frac{(a^2+b^2)\,(b^2+c^2)}{d_{83}} \\ \frac{(b^2+c^2)\,(c^2+a^2)}{d_{83}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{83} = (a^4 + b^4 + c^4) + 3\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{4,\,1} + 3\,d_{4,\,3}$.

$X_{83} = \text{Ceva}(X_2,\ X_6)$.

Relations avec les points précédents

$X_{83} = \frac{A_{1,\,83}\,X_1+A_{2,\,83}\,X_2+A_{3,\,83}\,X_3}{5\,s^4-2\,s^2\,r\,(3\,r+20\,\mathrm{R})+5\,r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{3\,\{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2+4\,s^2\,r^2\}\,X_2+2\,[s^2+2\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-2\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{32}}{5\,s^4-2\,s^2\,r\,(3\,r+20\,\mathrm{R})+5\,r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{4\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2\,X_6+\{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2+4\,s^2\,r^2\}\,X_{76}}{5\,s^4-2\,s^2\,r\,(3\,r+20\,\mathrm{R})+5\,r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{B_{10,\,83}\,X_{10}+B_{82,\,83}\,X_{82}}{[s^2-r\,(r+3\,\mathrm{R})]\,[5\,s^4-2\,s^2\,r\,(3\,r+20\,\mathrm{R})+5\,r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]}$, avec :

$A_{1,\,83} = 2\,[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]$,
$A_{2,\,83} = 3\{s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 6\,\mathrm{R}) + r^2\,[r\,(r + 12\,\mathrm{R}) + 32\,\mathrm{R}^2]\}$,

130. p. 179
131. p. 179

$A_{3,\,83} = -4\,[3\,s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r^2,$
$B_{10,\,83} = 2\,\{s^6 + s^4\,r\,(r - 12\,\mathrm{R}) - s^2\,r^2\,[r^2 - 8\,(r + 5\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]$
$- r^3\,[r^2\,(r + 12\,\mathrm{R}) + 16\,(3\,r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\}$
$B_{82,\,83} = [3\,s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,\{s^4 - s^2\,r\,(4\,r + 9\,\mathrm{R}) + r^2\,[r\,(3\,r + 19\,\mathrm{R}) + 28\,\mathrm{R}^2]\}$

On a $5\,s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r + 20\,\mathrm{R}) + 5\,r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = d_{83}$.

Donc $X_{83} \in (X_2X_{32})$, $X_{83} \in (X_6X_{76})$, $X_{83} \in (X_{10}X_{82})$.

5.2.84 X_{84}

On pourra consulter [5] [132].

$$X_{84} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(c\,q_3 + a\,q_1 - b\,q_2 - 2\,b\,c\,a)\,(a\,q_1 + b\,q_2 - c\,q_3 - 2\,c\,a\,b)}{d_{84}} \\ \frac{b\,(a\,q_1 + b\,q_2 - c\,q_3 - 2\,c\,a\,b)\,(b\,q_2 + c\,q_3 - a\,q_1 - 2\,a\,b\,c)}{d_{84}} \\ \frac{c\,(b\,q_2 + c\,q_3 - a\,q_1 - 2\,a\,b\,c)\,(c\,q_3 + a\,q_1 - b\,q_2 - 2\,b\,c\,a)}{d_{84}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{84} = (a^7 + b^7 + c^7) - (b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) - (b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)$
$- 3\,(b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^4 + b^4 + c^4) - 3\,(b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5)$
$+ 3\,(b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3) + a\,b\,c\,(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + a\,b\,c\,(b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3)$
$+3\,(b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4) - 4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a + b + c) = d_3\,\delta_{84}$
$= d_{7,\,1} - d_{7,\,2} - 3\,d_{7,\,3} + 2\,d_{7,\,4} + 3\,d_{7,\,5} + d_{7,\,6} - 4\ d_{7,\,7} + 2\,d_{7,\,8}$ et
$\delta_{84} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$

Relations avec les points précédents

$X_{84} = -\frac{(r + 2\,\mathrm{R})\,X_1 - 6\,\mathrm{R}\,X_2 - 2\,(r - 2\,\mathrm{R})\,X_3}{r} = \frac{-4\,\mathrm{R}\,X_3 + (r + 4\,\mathrm{R})\,X_9}{r} = \frac{2\,\mathrm{R}\,X_4 + (r - 2\,\mathrm{R})\,X_{57}}{r}$
$= \frac{(r + 2\,\mathrm{R})\,X_8 + (r - 2\,\mathrm{R})\,X_{20}}{r} = \frac{(r - \mathrm{R})^2\,X_{46} + (2\,r - \mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_{80}}{r^2}.$

On a $r = \frac{d_{84}}{128\,s^3\,r^3} = \frac{\delta_{84}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{84} \in (X_3X_9)$, $X_{84} \in (X_4X_{57})$, $X_{84} \in (X_8X_{20})$, $X_{84} \in (X_{46}X_{80})$.

5.2.85 X_{85}

On pourra consulter [5] [133].

$$X_{85} = \begin{pmatrix} \frac{b\,c\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})}{d_{85}} \\ \frac{c\,a\,(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})}{d_{85}} \\ \frac{a\,b\,(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})}{d_{85}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

132. pp. 179-180
133. p. 180

$d_{85} = -(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) - (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2)$
$+ a\,b\,c\,(a + b + c) = -d_{4,\,2} + 2\,d_{4,\,3} + d_{4,\,4}$.

$X_{85} = \mathrm{Ceva}(X_2,\ X_7) = \mathrm{Ceva}(X_{55},\ X_{77})$.

Relations avec les points précédents

$$X_{85} = \frac{-2\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_2-4\,r\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_3}{s^2+(r+4\,\mathrm{R})^2}$$
$$= \frac{r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2\,X_7+s^2\,r^2\,X_8}{[s^2+(r+4\,\mathrm{R})^2]\,r^2}$$
$$= \frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[3\,s^2-r\,(r+8\,\mathrm{R})-12\,\mathrm{R}^2]\,X_{29}-2\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{34}}{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,[s^2+(r+4\,\mathrm{R})^2]}$$

On a $s^2 + (r + 4\,\mathrm{R})^2 = \frac{d_{85}}{4\,r^2}$.

Donc $X_{85} \in (X_7X_8)$, $X_{85} \in (X_{29}X_{34})$.

5.2.86 X_{86}

On pourra consulter [5] [134].

$$X_{86} = \begin{pmatrix} \frac{(c+a)\,(a+b)}{d_{86}} \\ \frac{(a+b)\,(b+c)}{d_{86}} \\ \frac{(b+c)\,(c+a)}{d_{86}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{86} = (a^2 + b^2 + c^2) + 3\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_{2,\,1} + 3\,d_{2,\,2}$.

$X_{86} = \mathrm{Ceva}(X_1,\ X_2) = \mathrm{Ceva}(X_7,\ X_{77}) = \mathrm{Ceva}(X_{21},\ X_{81})$.

Relations avec les points précédents

$$X_{86} = \frac{2\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,(s^2+r^2)\,X_2-4\,r^2\,X_3}{5\,s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{4\,s^2\,X_1+[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{75}}{5\,s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})}$$
$$= \frac{3\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_2+2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{5\,s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_7+2\,s^2\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{[5\,s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})}$$
$$= \frac{(s^2-r^2)\,[3\,s^2-r\,(r+8\,\mathrm{R})-12\,\mathrm{R}^2]\,X_{29}+2\,[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{34}}{[5\,s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]}.$$

On a $5\,s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = d_{86}$.

Donc $X_{86} \in (X_1X_{75})$, $X_{86} \in (X_2X_6)$, $X_{86} \in (X_7X_{21})$, $X_{86} \in (X_{29}X_{34})$.

5.2.87 X_{87}

On pourra consulter [5] [135].

134. p. 180
135. p. 180

$$X_{87} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(b\,c-c\,a+a\,b)\,(b\,c+c\,a-a\,b)}{d_{87}} \\ \frac{b\,(c\,a-a\,b+b\,c)\,(c\,a+a\,b-b\,c)}{d_{87}} \\ \frac{c\,(a\,b-b\,c+c\,a)\,(a\,b+b\,c-c\,a)}{d_{87}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{87} = -(b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^2+b^2+c^2) - (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3) + a\,b\,c\,(b\,c+c\,a+a\,b) = -d_{5,3} + 2\,d_{5,4} + d_{5,5}$.

Relations avec les points précédents

$X_{87} = \frac{[s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,[r\,(r-8\,\mathrm{R})-16\,\mathrm{R}^2]]\,X_1-12\,[s^2+r\,(r-4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_2+32\,r^3\,\mathrm{R}\,X_3}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-10\,\mathrm{R})+r^2\,[r\,(r+12\,\mathrm{R})+32\,\mathrm{R}^2]}$
$= \frac{-16\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_6+[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2+r\,(r-8\,\mathrm{R})]\,X_{43}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-10\,\mathrm{R})+r^2\,[r\,(r+12\,\mathrm{R})+32\,\mathrm{R}^2]}$.

On a $s^4 + 2\,s^2\,r\,(r-10\,\mathrm{R}) + r^2\,[r\,(r+12\,\mathrm{R}) + 32\,\mathrm{R}^2] = -\frac{d_{87}}{2\,s}$.

Donc $X_{87} \in (X_6 X_{43})$.

5.2.88 X_{88}

On pourra consulter [5] [136].

$$X_{88} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(a-2\,b+c)\,(a+b-2\,c)}{d_{88}} \\ \frac{b\,(b-2\,c+a)\,(b+c-2\,a)}{d_{88}} \\ \frac{c\,(c-2\,a+b)\,(c+a-2\,b)}{d_{88}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{88} = (a^3+b^3+c^3) - 3\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - 3\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 15\,a\,b\,c = d_{3,1} - 3\,d_{3,2} + 15\,d_{3,3}$.

$X_{88} = \mathrm{Ceva}(X_1,\,X_{44}) = \mathrm{Ceva}(X_6,\,X_{36})$.

Relations avec les points précédents

$X_{88} = \frac{[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-9\,r\,\mathrm{R}\,X_2+6\,r^2\,X_3}{s^2+3\,r\,(r-5\,\mathrm{R})} = \frac{-27\,r\,\mathrm{R}\,X_2+[s^2+3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{45}}{s^2+3\,r\,(r-5\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2 + 3\,r\,(r-5\,\mathrm{R}) = -\frac{d_{88}}{4\,s}$.

Donc $X_{88} \in (X_2 X_{45})$.

5.2.89 X_{89}

On pourra consulter [5] [137].

$$X_{89} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(2\,a-b+2\,c)\,(2\,a+2\,b-c)}{4\,d_{89}} \\ \frac{b\,(2\,b-c+2\,a)\,(2\,b+2\,c-a)}{4\,d_{89}} \\ \frac{c\,(2\,c-a+2\,b)\,(2\,c+2\,a-b)}{4\,d_{89}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

136. p. 180
137. p. 180

$d_{89} = (a^3+b^3+c^3) + \frac{15}{4}\,a\,b\,c = d_{3,1} + \frac{15}{4}\,d_{3,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{89} = \frac{2\,[s^2+3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-9\,r\,\mathrm{R}\,X_2-12\,\mathrm{R}^2\,X_3}{2\,s^2-3\,r\,(2\,r-\mathrm{R})} = \frac{27\,r\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2-3\,r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{44}}{2\,s^2-3\,r\,(2\,r-\mathrm{R})}$
$= \frac{3\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6-[s^2+3\,r\,(r-5\,\mathrm{R})]\,X_{88}}{2\,s^2-3\,r\,(2\,r-\mathrm{R})}$

On a $2\,s^2-3\,r\,(2\,r-\mathrm{R}) = \frac{d_{89}}{s}$.

Donc $X_{89} \in (X_2X_{44})$, $X_{89} \in (X_6X_{88})$.

5.2.90 X_{90}

On pourra consulter [5] [138].

$X_{90} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(a\,q_1+b\,q_2-c\,q_3)\,(a\,q_1-b\,q_2+c\,q_3)}{d_{90}} \\ \frac{b\,(b\,q_2+c\,q_3-a\,q_1)\,(b\,q_2-c\,q_3+a\,q_1)}{d_{90}} \\ \frac{c\,(c\,q_3+a\,q_1-b\,q_2)\,(c\,q_3-a\,q_1+b\,q_2)}{d_{90}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{90} = (a^7+b^7+c^7) - (b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b) - (b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)$
$-3\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2) - 2\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4) - 3\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)$
$+3\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3) + a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b) + a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)$
$+3\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4) + 4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c)$
$= d_1\,d'_{90} = d_{7,1} - d_{7,2} - 3\,d_{7,3} - 2\,d_{7,4} + 3\,d_{7,5} + d_{7,6} + 4\,d_{7,7} - 2\,d_{7,8}$ et
$d'_{90} = (a^6+b^6+c^6) - 2\,(b^5\,c+c^5\,a+a^5\,b) - 2\,(b\,c^5+c\,a^5+a\,b^5)$
$-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)$
$+4\,(b^3\,c^3+c^3\,a^3+a^3\,b^3) - 2\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{6,1} - 2\,d_{6,2} - d_{6,3} + 2\,d_{6,4} + 4\,d_{6,5} - 2\,d_{6,7}$

Relations avec les points précédents

$X_{90} = -\frac{(r+\mathrm{R})^2\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2-2\,r\,(r-\mathrm{R})\,X_3}{r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2} = \frac{2\,r\,\mathrm{R}\,X_4+(r^2-\mathrm{R}^2)\,X_{46}}{r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2}$
$= \frac{r\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_9-(2\,r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_{35}}{r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2} = \frac{[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\,X_{33}-[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,X_{47}}{2\,[r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2]}$
$= \frac{(2\,r-\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_{36}+r^2\,X_{84}}{r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2} = \frac{r^2\,X_{40}+(2\,r-\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_{80}}{r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2} = \frac{(r^2-4\,\mathrm{R}^2)\,X_{57}+(2\,r+3\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_{79}}{r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2}$.

On a $r\,(r+2\,\mathrm{R})-\mathrm{R}^2 = \frac{d_{90}}{128\,s^3\,r^2} = \frac{d'_{90}}{64\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{90} \in (X_4X_{46})$, $X_{90} \in (X_9X_{35})$, $X_{90} \in (X_{33}X_{47})$, $X_{90} \in (X_{36}X_{84})$, $X_{90} \in (X_{40}X_{80})$, $X_{90} \in (X_{57}X_{79})$.

5.2.91 X_{91}

On pourra consulter [5] [139].

138. p. 180
139. p. 180

$$X_{91} = \begin{pmatrix} \frac{b\,c\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(q_3^2-\mathrm{S})}{4\,d_{91}} \\ \frac{c\,a\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(q_1^2-\mathrm{S})}{4\,d_{91}} \\ \frac{a\,b\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(q_2^2-\mathrm{S})}{4\,d_{91}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{91} = (b^9\,c + c^9\,a + a^9\,b) + (b\,c^9 + c\,a^9 + a\,b^9) + a\,b\,c\,(a^7 + b^7 + c^7)$
$- 4\,(b^7\,c^3 + c^7\,a^3 + a^7\,b^3) - 2\,a\,b\,c\,(b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) - 2\,a\,b\,c\,(b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)$
$+ 6\,(b^5\,c^5 + c^5\,a^5 + a^5\,b^5) - 4\,(b^3\,c^7 + c^3\,a^7 + a^3\,b^7) - 2\,a\,b\,c\,(b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2)$
$- 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5) + 2\,a\,b\,c\,(b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3)$
$+ 2\,a\,b\,c\,(b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4) = d_1\,d'_{91}$
$= d_{10,\,2} + d_{10,\,4} - 4\,d_{10,\,5} - 2\,d_{10,\,6} - 2\,d_{10,\,8} + 6\,d_{10,\,10} + 2\,d_{10,\,11} + 2\,d_{10,\,12}$ et
$d'_{91} = (b^8\,c + c^8\,a + a^8\,b) + (b\,c^8 + c\,a^8 + a\,b^8)$
$- (b^7\,c^2 + c^7\,a^2 + a^7\,b^2) - a\,b\,c\,(a^6 + b^6 + c^6) - (b^2\,c^7 + c^2\,a^7 + a^2\,b^7)$
$- 3\,(b^6\,c^3 + c^6\,a^3 + a^6\,b^3) - 3\,(b^3\,c^6 + c^3\,a^6 + a^3\,b^6)$
$+ 3\,(b^5\,c^4 + c^5\,a^4 + a^5\,b^4) + a\,b\,c\,(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + a\,b\,c\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$+ 3\,(b^4\,c^5 + c^4\,a^5 + a^4\,b^5) - 2\,a\,b\,c\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3)$
$+ a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + a^2\,b^2\,c^2\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a^3\,b^3\,c^3$
$= d_{9,\,2} - d_{9,\,3} - d_{9,\,4} - 3\,d_{9,\,5} + 3\,d_{9,\,7} + d_{9,\,8} - 2\,d_{9,\,9} + d_{9,\,11} - 2\,d_{9,\,12}$.

Relations avec les points précédents

$X_{91} = \frac{A_{1,\,91}\,X_1 + A_{2,\,91}\,X_2 + A_{3,\,91}\,X_3}{s^2\,(r-\mathrm{R}) + r^2\,(r+3\,\mathrm{R}) + 2\,(r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{B_{65,\,91}\,X_{65} + B_{68,\,91}\,X_{68}}{[s^2 - r\,(r+2\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2]\,[s^2\,(r-\mathrm{R}) + r^2\,(r+3\,\mathrm{R}) + 2\,(r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]}$, avec :

$A_{1,\,91} = -s^2\,(2r + \mathrm{R}) + r^2\,(2\,r + 7\,\mathrm{R}) + 2\,(4\,r + \mathrm{R})\,\mathrm{R}^2$,
$A_{2,\,91} = 3\,(s^2 + r^2 - 2\,\mathrm{R}^2)\,r$,
$A_{3,\,91} = -4\,r^2\,(r + \mathrm{R})$,
$B_{65,\,91}$
$= -\{s^4 - 2\,s^2\,[r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 4\,(5\,r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 4\,\mathrm{R}^4\}\,\mathrm{R}$,
$B_{68,\,91} = (s^2 + r^2 - 2\,\mathrm{R}^2)\,[s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\,r$.

On a $s^2\,(r - \mathrm{R}) + r^2\,(r + 3\,\mathrm{R}) + 2\,(r + \mathrm{R})\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{91}}{256\,s^4\,r^3} = \frac{d'_{91}}{128\,s^3\,r^3}$.

Donc $X_{91} \in (X_{65}X_{68})$.

5.2.92 X_{92}

On pourra consulter [5] [140].

$$X_{92} = \begin{pmatrix} \frac{b\,c\,q_2\,q_3}{d_{92}} \\ \frac{c\,a\,q_3\,q_1}{d_{92}} \\ \frac{a\,b\,q_1\,q_2}{d_{92}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

140. p. 180

$d_{92} = -(b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5) + a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$+ 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) = -d_{6,2} + d_{6,4} + 2\,d_{6,5}$

$X_{92} = \mathrm{Ceva}(X_1,\ X_{19}) = \mathrm{Ceva}(X_{47},\ X_{48})$.

Relations avec les points précédents

$X_{92} = \frac{-2\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1+3\,(s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2)\,X_2-4\,r\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_3}{s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{-2\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_1+[3\,s^2-r\,(r+8\,\mathrm{R})-12\,\mathrm{R}^2]\,X_{29}}{s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2} = \frac{2\,r\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_4+[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_8}{s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{2\,[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,X_{19}-[s^2-3\,(r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_{27}}{s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{-2\,[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{47}+[s^2\,(r+2\,\mathrm{R})+r^2\,(r-6\,\mathrm{R})-4\,(4\,r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\,X_{91}}{(s^2+r^2-4\,\mathrm{R}^2)\,r}$.

On a $s^2 + r^2 - 4\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{92}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{92} \in (X_1X_{29})$, $X_{92} \in (X_4X_8)$, $X_{92} \in (X_{19}X_{27})$, $X_{92} \in (X_{47}X_{91})$.

5.2.93 X_{93}

On pourra consulter [5] [141].

$X_{93} = \begin{pmatrix} \frac{b^2\,c^2\,(c^2\,a^2-\mathrm{S})\,(a^2\,b^2-\mathrm{S})\,q_2\,q_3}{d_{93}} \\ \frac{c^2\,a^2\,(a^2\,b^2-\mathrm{S})\,(b^2\,c^2-\mathrm{S})\,q_3\,q_1}{d_{93}} \\ \frac{a^2\,b^2\,(b^2\,c^2-\mathrm{S})\,(c^2\,a^2-\mathrm{S})\,q_1\,q_2}{d_{93}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{93} = -(b^{14}\,c^2 + c^{14}\,a^2 + a^{14}\,b^2) - (b^2\,c^{14} + c^2\,a^{14} + a^2\,b^{14})$
$+6\,(b^{12}\,c^4+c^{12}\,a^4+a^{12}\,b^4)+6\,(b^4\,c^{12}+c^4\,a^{12}+a^4\,b^{12})+7\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^{10}+b^{10}+c^{10})$
$- 13\,(b^{10}\,c^6 + c^{10}\,a^6 + a^{10}\,b^6) - 13\,(b^6\,c^{10} + c^6\,a^{10} + a^6\,b^{10})$
$- 15\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 15\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 16\,(b^8\,c^8 + c^8\,a^8 + a^8\,b^8) + 9\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4)$
$+ 9\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) + 9\,a^4\,b^4\,c^4\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$- 2\,a^4\,b^4\,c^4\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{93}$
$= -d_{16,3} + 6\,d_{16,7} + 7\,d_{16,9} - 13\,d_{16,13} - 15\,d_{16,15} + 16\,d_{16,21} + 9\,d_{16,23}$
$+ 9\,d_{16,25} - 2\,d_{16,29}$ et $\delta_{93} = (b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2) + (b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10})$
$- 4\,(b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) - 3\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6) - 4\,(b^4\,c^8 + c^4\,a^8 + a^4\,b^8)$
$+ 6\,(b^6\,c^6 + c^6\,a^6 + a^6\,b^6) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) + a^4\,b^4\,c^4$
$= d_{12,3} - 4\,d_{12,7} - 3\,d_{12,9} + 6\,d_{12,13} + 2\,d_{12,15} + d_{12,19}$.

Relation avec les points précédents

$X_{93} = \frac{A_{1,93}\,X_1+A_{2,93}\,X_2+A_{3,93}\,X_3}{s^4+2\,s^2\,[r\,(r-4\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]+r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R})+8\,(3\,r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]+13\,\mathrm{R}^4}$, avec :

141. p. 180

$A_{1,\,93} = -2\,[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]$,

$A_{2,\,93}$
$= 3\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,(3\,r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 5\,\mathrm{R}^4\}$,

$A_{3,\,93} = -2\,\{s^2\,(2\,r^2 - \mathrm{R}^2) + r\,[2\,r^2\,(r + 4\,\mathrm{R}) + (9\,r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + \mathrm{R}^4\}$.

On a
$s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 8\,(3\,r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 13\,\mathrm{R}^4$
$= \frac{d_{93}}{4096\,s^6\,r^6} = \frac{\delta_{93}}{256\,s^4\,r^4}$.

5.2.94 X_{94}

On pourra consulter [5] [142].

$$X_{94} = \begin{pmatrix} \frac{b^2\,c^2\,(3\,c^2\,a^2 - \mathrm{S})\,(3\,a^2\,b^2 - \mathrm{S})}{d_{94}} \\ \frac{c^2\,a^2\,(3\,a^2\,b^2 - \mathrm{S})\,(3\,b^2\,c^2 - \mathrm{S})}{d_{94}} \\ \frac{a^2\,b^2\,(3\,b^2\,c^2 - \mathrm{S})\,(3\,c^2\,a^2 - \mathrm{S})}{d_{94}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{94} = (b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2) + (b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10})$
$- 4\,(b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) - a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6) - 4\,(b^4\,c^8 + c^4\,a^8 + a^4\,b^8)$
$+ 6\,(b^6\,c^6 + c^6\,a^6 + a^6\,b^6) + 3\,a^4\,b^4\,c^4 = d_{12,\,3} - 4\,d_{12,\,7} - d_{12,\,9} + 6\,d_{12,\,13} + 3\,d_{12,\,19}$

$X_{94} = \mathrm{Ceva}(X_{49},\ X_{50})$.

Relations avec les points précédents

$X_{94} = \frac{A_{1,\,94}\,X_1 + A_{2,\,94}\,X_2 + A_{3,\,94}\,X_3}{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 4\,(7\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 27\,\mathrm{R}^4}$
$= \frac{B_{49,\,94}\,X_{49} + B_{93,\,94}\,X_{93}}{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 4\,(7\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 27\,\mathrm{R}^4}$, avec :

$A_{1,\,94} = -2\,[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]$,

$A_{2,\,94}$
$= 3\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 6\,(r + 2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 9\,\mathrm{R}^4\}$,

$A_{3,\,94} = -4\,[s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2]\,r^2$,

$B_{49,\,94} = -2\,[2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 7\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}^2 = -\frac{\mathrm{R}^2\,d_{49}}{128\,s^4\,r^4}$,

$B_{93,\,94} = s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 8\,(3\,r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 13\,\mathrm{R}^4$
$= \frac{d_{93}}{4096\,s^6\,r^6}$.

On a
$s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 4\,(7\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 27\,\mathrm{R}^4 = \frac{d_{94}}{256\,s^4\,r^4}$.

Donc $X_{94} \in (X_{49}X_{93})$.

142. p. 180

5.2.95 X_{95}

On pourra consulter [5] [143].

$$X_{95} = \begin{pmatrix} \frac{(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)}{d_{95}} \\ \frac{(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)}{d_{95}} \\ \frac{(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)}{d_{95}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{95} = (a^8 + b^8 + c^8) - 5\,(b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) - 5\,(b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$+8\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) = d_{8,\,1} - 5\,d_{8,\,3} + 8\,d_{8,\,7} + 5\,d_{8,\,9}$.

$X_{95} = \mathrm{Ceva}(X_2,\,X_3) = \mathrm{Ceva}(X_{54},\,X_{97})$ (cf. X_{97} ci-après).

Relations avec les points précédents

$$X_{95} = \frac{A_{1,\,95}\,X_1 + A_{2,\,95}\,X_2 + A_{3,\,95}\,X_3}{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(9\,r - 4\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2] + r\,(r + 2\,\mathrm{R})^2\,(r + 4\,\mathrm{R})}$$
$$= \frac{B_{54,\,95}\,X_{54} + B_{69,\,95}\,X_{69}}{\{s^2 - [r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(9\,r - 4\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2] + r\,(r + 2\,\mathrm{R})^2\,(r + 4\,\mathrm{R})\}}, \text{ avec :}$$

$A_{1,\,95} = -2\,[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2] = A_{1,\,93}$,
$A_{2,\,95} = 3\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2] + r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})^2\}$,
$A_{3,\,95} = 4\,[3\,s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\,r^2$,
$B_{54,\,95} = 8\,s^2\,[2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 5\,\mathrm{R}^2]\,r^2$,
$B_{69,\,95} = [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]$
$\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2] + (r + 2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}$.

On a
$s^4 + 2\,s^2\,[r\,(9\,r - 4\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2] + r\,(r + 2\,\mathrm{R})^2\,(r + 4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{95}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{95} \in (X_{54}X_{69})$.

5.2.96 X_{96}

On pourra consulter [5] [144].

$$X_{96} = \begin{pmatrix} \frac{(q_2^2-\mathrm{S})\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)}{4\,d_{96}} \\ \frac{(q_3^2-\mathrm{S})\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)}{4\,d_{96}} \\ \frac{(q_1^2-\mathrm{S})\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)}{4\,d_{96}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(q_2^2-\mathrm{S})\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}+q_3\,q_1)\,(\mathrm{S}+q_1\,q_2)}{16\,d_{96}} \\ \frac{(q_3^2-\mathrm{S})\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}+q_1\,q_2)\,(\mathrm{S}+q_2\,q_3)}{16\,d_{96}} \\ \frac{(q_1^2-\mathrm{S})\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}+q_2\,q_3)\,(\mathrm{S}+q_3\,q_1)}{16\,d_{96}} \end{pmatrix},$$
avec :

143. p. 180
144. p. 180

$d_{96} = (a^{16}+b^{16}+c^{16}) - 7\,(b^{14}\,c^2+c^{14}\,a^2+a^{14}\,b^2) - 7\,(b^2\,c^{14}+c^2\,a^{14}+a^2\,b^{14})$
$+ 22\,(b^{12}\,c^4 + c^{12}\,a^4 + a^{12}\,b^4) + 29\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^{10} + b^{10} + c^{10})$
$+ 22\,(b^4\,c^{12} + c^4\,a^{12} + a^4\,b^{12}) - 41\,(b^{10}\,c^6 + c^{10}\,a^6 + a^{10}\,b^6)$
$- 45\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 45\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$- 41\,(b^6\,c^{10} + c^6\,a^{10} + a^6\,b^{10}) + 50\,(b^8\,c^8 + c^8\,a^8 + a^8\,b^8)$
$+ 23\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 26\,a^4\,b^4\,c^4\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 23\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 6\,a^4\,b^4\,c^4\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{96}$
$= d_{16,\,1} - 7\,d_{16,\,3} + 22\,d_{16,\,7} + 29\,d_{16,\,9} - 41\,d_{16,\,13} - 45\,d_{16,\,15} + 50\,d_{16,\,21} + 23\,d_{16,\,23}$
$+ 26\,d_{16,\,25} - 6\,d_{16,\,29}$ et $\delta_{96} = -(a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 5\,(b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2)$
$+ 5\,(b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10}) - 11\,(b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) - 11\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6)$
$-11\,(b^4\,c^8+c^4\,a^8+a^4\,b^8)+14\,(b^6\,c^6+c^6\,a^6+a^6\,b^6)+6\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)$
$+ 6\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) - 2\,a^4\,b^4\,c^4$
$= -d_{12,\,1} + 5\,d_{12,\,3} - 11\,d_{12,\,7} - 11\,d_{12,\,9} + 14\,d_{12,\,13} + 6\,d_{12,\,15} - 2\,d_{12,\,19}$.

$X_{96} = \mathrm{Ceva}(X_3,\ X_{68})$.

Relations avec les points précédents

$X_{96} = \frac{A_{1,\,96}\,X_1+A_{2,\,96}\,X_2+A_{3,\,96}\,X_3}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+[r\,(r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]}$
$= \frac{B_{2,\,96}\,X_2+B_{54,\,96}\,X_{54}}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+[r\,(r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]}$
$= \frac{B_{76,\,96}\,X_{76}+B_{95,\,96}\,X_{95}}{8\,s^2\{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+[r\,(r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]\}\,r^2}$, avec :

$A_{1,\,96} = 2\,\{s^4 - 2\,s^2\,(r + \mathrm{R})\,\mathrm{R} - r\,(r + 2\,\mathrm{R})\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}$,
$A_{2,\,96} = -3\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2] + (r^2 + 2\,\mathrm{R}^2)\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}$,
$A_{3,\,96} = 2\,\{s^4-4\,s^2\,[r\,(r+2\,\mathrm{R})+\mathrm{R}^2]+[r\,(r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\}$,
$B_{2,\,96} = -3\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2] + (r + 2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}$,
$B_{54,\,96} = 2\,\{2\,s^4 - s^2\,[4\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 9\,\mathrm{R}^2]$
$+ [r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\,[2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 5\,\mathrm{R}^2]\}$,
$B_{76,\,96} = -\{s^8 + 2\,s^6\,[2\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]$
$+ s^4\,(6\,r^4 - 16\,r^3\,\mathrm{R} + 90\,r^2\,\mathrm{R}^2 + 72\,r\,\mathrm{R}^3 + 8\,\mathrm{R}^4)$
$+ s^2\,(4\,r^6 + 16\,r^5\,\mathrm{R} - 58\,r^4\,\mathrm{R}^2 - 304\,r^3\,\mathrm{R}^3 - 272\,r^2\,\mathrm{R}^4 - 64\,r\,\mathrm{R}^5)$
$+ r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}$,
$B_{95,\,96} = \{s^8 + 2\,s^6\,[2\,r\,(3\,r - 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]$
$+ s^4\,(-106\,r^4 - 80\,r^3\,\mathrm{R} + 90\,r^2\,\mathrm{R}^2 + 72\,r\,\mathrm{R}^3 + 8\,\mathrm{R}^4)$
$+ s^2\,(12\,r^6 + 80\,r^5\,\mathrm{R} - +70\,r^4\,\mathrm{R}^2 - 304\,r^3\,\mathrm{R}^3 - 304\,r^2\,\mathrm{R}^4 - 64\,r\,\mathrm{R}^5)$
$+ r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\}$.

On a $\{s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + [r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2]\}$
$= -\frac{d_{96}}{4096\,s^6\,r^6} = -\frac{\delta_{96}}{256\,s^4\,r^4}$.

Donc $X_{96} \in (X_2X_{54})$, $X_{96} \in (X_{76}X_{95})$.

5.2.97 X_{97}

On pourra consulter [5] [145].

$$X_{97} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,q_1\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)}{d_{97}} \\ \frac{b^2\,q_2\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)}{d_{97}} \\ \frac{c^2\,q_3\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)}{d_{97}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{97} = -(a^{12}+b^{12}+c^{12})+4\,(b^{10}\,c^2+c^{10}\,a^2+a^{10}\,b^2)+4\,(b^2\,c^{10}+c^2\,a^{10}+a^2\,b^{10})$
$-\,7\,(b^8\,c^4+c^8\,a^4+a^8\,b^4)-11\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6+b^6+c^6)-7\,(b^4\,c^8+c^4\,a^8+a^4\,b^8)$
$+\,8\,(b^6\,c^6+c^6\,a^6+a^6\,b^6)+7\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)$
$+\,7\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)$
$= -d_{12,\,1}+4\,d_{12,\,3}-7\,d_{12,\,7}-11\,d_{12,\,9}+8\,d_{12,\,13}+7\,d_{12,\,15}.$

Relations avec les points précédents

$X_{97} = \frac{A_{1,\,97}\,X_1+A_{2,\,97}\,X_2+A_{3,\,97}\,X_3}{s^4-s^2\,[2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+7\,\mathrm{R}^2]+(r+2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]}$
$= \frac{B_{2,\,97}\,X_2+B_{95,\,97}\,X_{95}}{2\,\{s^4-s^2\,[2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+7\,\mathrm{R}^2]+(r+2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]\}}$
$= \frac{B_{3,\,97}\,X_3+B_{54,\,97}\,X_{54}}{s^4-s^2\,[2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+7\,\mathrm{R}^2]+(r+2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2]}$, avec :

$A_{1,\,97} = [s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]$,
$A_{2,\,97} = -3\,[s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,(2\,r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}$,
$A_{3,\,97} = -2\,[3\,s^2-(r+2\,\mathrm{R})^2]\,r^2$,
$B_{2,\,97} = 3\,\{s^4+2\,s^2\,[r\,(r-4\,\mathrm{R})-3\,\mathrm{R}^2]+(r+2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\}$
$= 6\,\frac{B_{69,\,95}}{d_6}$,
$B_{95,\,97} = -\{s^4+2\,s^2\,[r\,(9\,r-4\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+2\,\mathrm{R})^2\,(r+4\,\mathrm{R})\} = -\frac{d_{95}}{d_3}$,
$B_{3,\,97} = -\{s^4+2\,s^2\,[r\,(r-4\,\mathrm{R})-3\,\mathrm{R}^2]+(r+2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+2\,\mathrm{R}^2]\}$
$= -\frac{1}{3}\,B_{2,\,97}$,
$B_{54,\,97} = 2\,s^4-\,s^2\,[4\,r\,(r+4\,\mathrm{R})+13\,\mathrm{R}^2]+(r+2\,\mathrm{R})^2\,[2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})+5\,\mathrm{R}^2]$.

On a
$s^4-s^2\,[2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+7\,\mathrm{R}^2]+(r+2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+3\,\mathrm{R}^2] = -\frac{d_{97}}{512\,s^4\,r^4}$.

Donc $X_{97} \in (X_2X_{95})$, $X_{97} \in (X_3X_{54})$,

5.2.98 $X_{98} \equiv Ta$ point de Tarry

On pourra consulter [5] [146] [8] [147]

145. p. 180
146. p. 180
147. p. 1786 “Tarry Point”

$$X_{98} \equiv Ta = \begin{pmatrix} \frac{(c^4+a^4-b^2\,c^2-b^2\,a^2)\,(a^4+b^4-c^2\,a^2-c^2\,b^2)}{d_{98}} \\ \frac{(a^4+b^4-c^2\,a^2-c^2\,b^2)\,(b^4+c^4-a^2\,b^2-a^2\,c^2)}{d_{98}} \\ \frac{(b^4+c^4-a^2\,b^2-a^2\,c^2)\,(c^4+a^4-b^2\,c^2-b^2\,a^2)}{d_{98}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(d_{32}-b^2\,d_6)\,(d_{32}-c^2\,d_6)}{d_{98}} \\ \frac{(d_{32}-c^2\,d_6)\,(d_{32}-a^2\,d_6)}{d_{98}} \\ \frac{(d_{32}-a^2\,d_6)\,(d_{32}-b^2\,d_6)}{d_{98}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(d_6\,q_2-\mathrm{S})\,(d_6\,q_3-\mathrm{S})}{4\,d_{98}} \\ \frac{(d_6\,q_3-\mathrm{S})\,(d_6\,q_1-\mathrm{S})}{4\,d_{98}} \\ \frac{(d_6\,q_1-\mathrm{S})\,(d_6\,q_2-\mathrm{S})}{4\,d_{98}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{98} = (a^8 + b^8 + c^8) - 3\,(b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) - 3\,(b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$+ 4\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) = d_3\,\delta_{98}$
$= d_{8,1} - 3\,d_{8,3} + 4\,d_{8,7} + d_{8,9}$ et
$\delta_{98} = -(a^4 + b^4 + c^4) + (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = -d_{99} = -d_{4,1} + d_{4,3}$

Le point de Tarry $X_{98} \equiv Ta$ appartient au cercle circonscrit.

Relations avec les points précédents

$X_{98} = \frac{A_{1,98}\,X_1+A_{2,98}\,X_2+A_{3,98}\,X_3}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2} = \frac{B_{3,98}\,X_3+B_{76,98}\,X_{76}}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{B_{4,98}\,X_4+B_{32,98}\,X_{32}}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2} = \frac{B_{5,98}\,X_5+B_{83,98}\,X_{83}}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{B_{23,98}\,X_{23}+B_{94,98}\,X_{94}}{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-3\,\mathrm{R}^2]\,[s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]}$, avec :

$A_{1,98} = 2\,[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] = [s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,d_6$,
$A_{2,98} = -3\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 2\,\mathrm{R}) + r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})]$,
$A_{3,98} = 2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R})] = d_6\,[s^2 - r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R})]$,
$B_{3,98} = 2\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$,
$B_{76,98} = -[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$,
$B_{4,98} = -[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$,
$B_{32,98} = 2\,\{[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]^2 - 4\,s^2\,r^2\}$,
$B_{5,98} = -4\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$,
$B_{83,98} = [5\,s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r + 20\,\mathrm{R}) + 5\,r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$,
$B_{23,98} = [2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 9\,\mathrm{R}^2]$
$\{s^4 - r^2\,[2\,r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2] + r\,(r + 4\,\mathrm{R})\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2]\}$,
$B_{94,98} = -[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]$
$\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2] + [r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 9\,\mathrm{R}^2]\}$.

On a $s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = -\frac{d_{98}}{16\,s^2\,r^2} = -\delta_{98}$

Donc $X_{98} \in (X_3X_{76})$, $X_{98} \in (X_4X_{32})$, $X_{98} \in (X_5X_{83})$, $X_{98} \in (X_{23}X_{94})$.

5.2.99 $X_{99} \equiv St$ point de Steiner

On pourra consulter [5] [148] [8] [149].

148. p. 180
149. p. 1730 “Steiner Points”

$$X_{99} \equiv St = \begin{pmatrix} -\frac{(c^2-a^2)\,(a^2-b^2)}{d_{99}} \\ -\frac{(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)}{d_{99}} \\ -\frac{(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)}{d_{99}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$
$d_{99} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{4,\,1} - d_{4,\,3}$.

Le point de Steiner $X_{99} \equiv St$ appartient au cercle circonscrit.

Relations avec les points précédents

$X_{99} = \frac{A_{1,\,99}\,X_1 + A_{2,\,99}\,X_2 + A_{3,\,99}\,X_3}{s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2} = \frac{-16\,s^2\,r^2\,X_3 + [s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_{76}}{s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{-4\,[s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_{39} + [5\,s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r+20\,\mathrm{R}) + 5\,r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_{83}}{s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{B_{69,\,99}\,X_{69} + B_{74,\,99}\,X_{74}}{[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]}$, avec :

$A_{1,\,99} = -2\,[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] = -[s^2 + r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,d_6$
$= -A_{1,\,98}$,
$A_{2,\,99} = 3\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 2\,\mathrm{R}) + r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})]$,
$A_{3,\,99} = -4\,[5\,s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r^2$,
$B_{69,\,99} = [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]$
$\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2] + r\,(r + 4\,\mathrm{R})\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 6\,\mathrm{R}^2]\}$
$= \frac{1}{2}\,d_6\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r - 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2] + r\,(r + 4\,\mathrm{R})\,[r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 6\,\mathrm{R}^2]\}$,
$B_{74,\,99} = -8\,s^2\,[2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 9\,\mathrm{R}^2]\,r^2$.

On a $s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = d_{99}$.

Donc $X_{99} \in (X_3X_{76})$, $X_{99} \in (X_{39}X_{83})$, $X_{99} \in (X_{69}X_{74})$.

5.2.100 X_{100} anticomplément du point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$

On pourra consulter [5] [150].

$$X_{100} = \begin{pmatrix} -\frac{a\,(c-a)\,(a-b)}{d_{100}} \\ -\frac{b\,(a-b)\,(b-c)}{d_{100}} \\ -\frac{c\,(b-c)\,(c-a)}{d_{100}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$
$d_{100} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c$
$= d_{11} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 3\,d_{3,\,3}$.

On vérifie que $\overrightarrow{X_{100}X_{11}} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{X_{100}G}$; donc X_{100} est l'anticomplément du point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$.

150. p. 180

Relations avec les points précédents

$X_{100} = \frac{2\,\mathrm{R}\,X_1 - 3\,\mathrm{R}\,X_2 + 2\,r\,X_3}{2\,r - \mathrm{R}} = -\frac{[s^2 - 3\,r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,X_1 - [s^2 + 3\,r\,(r - 5\,\mathrm{R})]\,X_{88}}{3\,r\,(2\,r - \mathrm{R})}$
$= 3\,X_2 - 2\,X_{11} = \frac{2\,r\,X_3 - \mathrm{R}\,X_8}{2\,r - \mathrm{R}} = -\frac{4\,\mathrm{R}\,X_{10} - (2\,r + 3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{2\,r - \mathrm{R}}$
$= \frac{-[s^2 - 3\,r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,X_{31} + [s^2 + r\,(r - 8\,\mathrm{R}]\,X_{43}}{2\,r\,(2\,r - \mathrm{R})} = \frac{r\,X_{40} + (r - \mathrm{R})\,X_{78}}{2\,r - \mathrm{R}} = \frac{[s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R})]\,X_{42} - [s^2 - r\,(r + \mathrm{R})]\,X_{81}}{r\,(2\,r - \mathrm{R})}$
$= \frac{-[s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{72} + [2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 9\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{74}}{[s^2 - r\,(r + 5\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,(2\,r - \mathrm{R})}$.

On a $2\,r - \mathrm{R} = -\frac{d_{100}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{100} \in (X_1 X_{88})$, $X_{100} \in (X_2 X_{11})$, $X_{100} \in (X_3 X_8)$, $X_{100} \in (X_{10} X_{21})$, $X_{100} \in (X_{31} X_{43})$, $X_{100} \in (X_{40} X_{78})$, $X_{100} \in (X_{42} X_{81})$, $X_{100} \in (X_{72} X_{74})$.

5.2.101 X_{101}

On pourra consulter [5] [151].

$X_{101} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2\,(c-a)\,(a-b)}{d_{101}} \\ -\frac{b^2\,(a-b)\,(b-c)}{d_{101}} \\ -\frac{c^2\,(b-c)\,(c-a)}{d_{101}} \end{pmatrix}$, avec :

$d_{101} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) - (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + a\,b\,c\,(a + b + c)$
$= d_{4,\,1} - d_{4,\,2} + d_{4,\,4}$.

Relations avec les points précédents

$X_{101} = \frac{[s^2 + (r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,X_1 - 6\,(r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2 + 2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,X_3}{3\,s^2 - (r + 4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{-2\,s^2\,\mathrm{R}\,X_1 + [s^2\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) - r\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\,X_{41}}{[3\,s^2 - (r + 4\,\mathrm{R})^2]\,r} = \frac{-2\,(r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_9 + [3\,s^2 - r\,(r + 6\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2]\,X_{48}}{3\,s^2 - (r + 4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{B_{10,\,101}\,X_{10} + B_{98,\,101}\,X_{98}}{[3\,s^2 - (r + 4\,\mathrm{R})^2]\,\{s^4 - 4\,s^2\,r\,(r + 2\,\mathrm{R}) + r^2\,[r\,(3\,r + 16\,\mathrm{R}) + 16\,\mathrm{R}^2]\}}$
$= \frac{-[s^2 + r\,(r + 6\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2]\,\{5\,s^2 - 3\,[r\,(r + 6\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2]\}\,X_{71} + 4\,s^2\,[2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 9\,\mathrm{R}^2]\,X_{74}}{3\,s^4 - 2\,s^2\,[r\,(5\,r + 22\,\mathrm{R}) + 26\,\mathrm{R}^2] + 3\,r^2\,[r\,(r + 12\,\mathrm{R}) + 52\,\mathrm{R}^2] + 96\,(3\,r + 2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^3}$, avec :

$\frac{1}{2}\,B_{10,\,101} = s^6 + s^4\,[r\,(r - 10\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2]$
$- s^2\,r\,\{r\,[r\,(r - 8\,\mathrm{R}) - 64\,\mathrm{R}^2] - 64\,\mathrm{R}^3\}$
$- r^2\,\langle r\,\{r\,[r\,(r + 14\,\mathrm{R}) + 72\,\mathrm{R}^2]\} + (160\,r + 128\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^3\rangle$,

$B_{98,\,101} = [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$.

On a $3\,s^2 - (r + 4\,\mathrm{R})^2 = -\frac{d_{101}}{4\,r^2}$.

Donc $X_{101} \in (X_1 X_{41})$, $X_{101} \in (X_9 X_{48})$, $X_{101} \in (X_{10} X_{98})$, $X_{101} \in (X_{71} X_{74})$.

151. p. 180

5.3 Quelques autres points qui sont des centres au sens de C. Kimberling [5] [6]

5.3.1 X_{104}

$$X_{104} = \begin{pmatrix} \frac{a\,[-a^3+a^2\,b+a\,(b-c)^2-b\,(b^2-c^2)]\,[-a^3+a^2\,c+a\,(b-c)^2+c\,(b^2-c^2)]}{d_{104}} \\ \frac{b\,[-b^3+b^2\,c+b\,(c-a)^2-c\,(c^2-a^2)]\,[-b^3+b^2\,a+b\,(c-a)^2+a\,(c^2-a^2)]}{d_{104}} \\ \frac{c\,[-c^3+c^2\,a+c\,(a-b)^2-a\,(a^2-b^2)]\,[-c^3+c^2\,b+c\,(a-b)^2+b\,(a^2-b^2)]}{d_{104}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{104} = (a^7+b^7+c^7)-(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)-(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)-3\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)$
$+\,3\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)-3\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)+3\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$
$+\,a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)+3\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)$
$-\,6\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_3\,\delta_{104}$
$= d_{7,1}-d_{7,2}-3\,d_{7,3}+3\,d_{7,4}+3\,d_{7,5}+d_{7,6}-6\,d_{7,7}+2\,d_{7,8}$ et
$\delta_{104} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)-3\,a\,b\,c = -d_{11}$
$= -d_{3,1}+d_{3,2}-3\,d_{3,3}$

Relation avec les points précédents

$X_{104} = \frac{2\,\mathrm{R}\,X_1-3\,\mathrm{R}\,X_2+2\,(\mathrm{R}-r)\,X_3}{-2\,r+\mathrm{R}}$.

On a $-2\,r+\mathrm{R} = -\frac{d_{104}}{64\,s^3\,r^3} = -\frac{\delta_{104}}{4\,s\,r}$.

5.3.2 X_{110} foyer de la parabole de Kiepert

$$X_{110} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(c^2-a^2)\,(a^2-b^2)}{d_{110}} \\ \frac{b^2\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)}{d_{110}} \\ \frac{c^2\,(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)}{d_{110}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{110} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-3\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{23}$
$= -d_{6,1}+d_{6,3}-3\,d_{6,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{110} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-3\,(2\,r+3\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+[s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2}$
$= \frac{-[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,\mathrm{R}\,X_1+\{s^2\,(2\,r+\mathrm{R})-r\,[r\,(2\,r+7\,\mathrm{R})+7\,\mathrm{R}^2]\}\,X_{60}}{[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2]\,r}$
$= \frac{B_{2,110}\,X_2+B_{98,110}\,X_{98}}{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2]}$
$= 2\,X_3-X_{74} = \frac{-2\,\mathrm{R}^2\,X_5+[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-7\,\mathrm{R}^2]\,X_{49}}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2}$, avec :

$B_{2,110}$
$= 3\,\{s^4+2\,s^2\,[r\,(r-4\,\mathrm{R})-3\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+4\,\mathrm{R})\,[r\,(r+4\,\mathrm{R})+6\,\mathrm{R}^2]\} = 6\,\frac{B_{69,99}}{d_6}$,
$B_{98,110} = s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2 = d_{99}$.

On a $2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{110}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{110} \in (X_1X_{60})$, $X_{110} \in (X_2X_{98})$, $X_{110} \in (X_3X_{74})$, $X_{110} \in (X_5X_{49})$.

5.3.3 X_{111} point de Parry

$X_{111} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(2\,b^2-c^2-a^2)\,(2\,c^2-a^2-b^2)}{d_{111}} \\ \frac{b^2\,(2\,c^2-a^2-b^2)\,(2\,a^2-b^2-c^2)}{d_{111}} \\ \frac{c^2\,(2\,a^2-b^2-c^2)\,(2\,b^2-c^2-a^2)}{d_{111}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{111} = (a^6+b^6+c^6)-3\,(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)-3\,(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)+15\,a^2\,b^2\,c^2$
$= d_{6,1} - 3\,d_{6,3} + 15\,d_{6,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{111} = \frac{A_{1,111}\,X_1+A_{2,111}\,X_2+A_{3,111}\,X_3}{4\{-s^6+3\,s^4\,r\,(-3\,r+4\,\mathrm{R})+3\,s^2\,r^2\,(3\,r^2+8\,r\,\mathrm{R}+20\,\mathrm{R}^2)+r^3\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}}$
$= \frac{B_{2,111}\,X_2+B_{99,111}\,X_{99}}{4\{-s^6+3\,s^4\,r\,(-3\,r+4\,\mathrm{R})+3\,s^2\,r^2\,(3\,r^2+8\,r\,\mathrm{R}+20\,\mathrm{R}^2)+r^3\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}}$
$= \frac{B_{6,111}\,X_6+B_{110,111}\,X_{110}}{4\{-s^6+3\,s^4\,r\,(-3\,r+4\,\mathrm{R})+3\,s^2\,r^2\,(3\,r^2+8\,r\,\mathrm{R}+20\,\mathrm{R}^2)+r^3\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}}$, avec :

$A_{1,111} = -4\,[s^2 + r\,(r+2\,\mathrm{R}]\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]^2 = d_6\,A_{1,99} = -d_6\,A_{1,98}$,
$A_{2,111} = 24\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(r-5\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,r\,\mathrm{R}$,
$A_{3,111} = -8\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[5\,s^2 + r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2 = d_6\,A_{3,99}$,
$B_{2,111} = 6\,[-s^6 - s^4\,r\,(r-12\,\mathrm{R}) + s^2\,r^2\,(r^2 - 8\,r\,\mathrm{R} + 24\,\mathrm{R}^2)$
$+ r^3\,(r^3 + 12\,r^2\,\mathrm{R} + 48\,r\,\mathrm{R}^2 + 64\,\mathrm{R}^3)] = A_{2,111} - d_6\,A_{2,99}$,
$B_{99,111} = 2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2] = d_6\,d_{99}$,
$B_{6,111} = -4\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]$
$= -2\,B_{99,111} = -2\,d_6\,d_{99}$,
$B_{110,111} = -48\,s^2\,[2\,s^2 - 2\,r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 9\,\mathrm{R}^2]\,r^2 = -3\,d_{110}$.

On a
$4\{-s^6 - 3\,s^4\,r\,(3\,r-4\,\mathrm{R}) + 3\,s^2\,r^2\,(3\,r^2+8\,r\,\mathrm{R}+20\,\mathrm{R}^2) + r^3\,(r+4\,\mathrm{R})^3\} = d_{111}$

Donc $X_{111} \in (X_2X_{99})$, $X_{111} \in (X_6X_{110})$.

5.3.4 X_{115} centre de l'hyperbole de Kiepert ; milieu du segment $[X_{13}X_{14}]$

$X_{115} = \begin{pmatrix} \frac{(b^2-c^2)^2}{2\,d_{115}} \\ \frac{(c^2-a^2)^2}{2\,d_{115}} \\ \frac{(a^2-b^2)^2}{2\,d_{115}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{115} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{99} = d_{4,1} - d_{4,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{115} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1-6\{4\,s^2\,r^2+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\}\,X_2+2\,r^2\,[5\,s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{X_{13}+X_{14}}{2}$.

On a $s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = d_{115}$

Donc $X_{115} \in (X_{13}X_{14})$.

5.3.5 X_{140} milieu du segment $[X_3X_5]$

$$X_{140} = \begin{pmatrix} \frac{2\,a^4-3\,a^2\,(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2}{4\,d_{140}} \\ \frac{2\,b^4-3\,b^2\,(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2}{4\,d_{140}} \\ \frac{2\,c^4-3\,c^2\,(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2}{4\,d_{140}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{140} = (a^4 + b^4 + c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = -d_3 = d_1\,d^{'}_{140} = d_{4,\,1} - 2\,d_{4,\,3}$ et $d^{'}_{140} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 2\,a\,b\,c = -d^{'}_3$ $= d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 2\,d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{140} = \frac{3\,X_2+X_3}{4} = \frac{3\,X_2-X_5}{2} = \frac{3\,X_3+X_4}{4} = \frac{X_3+X_5}{3} = \frac{-X_4+3\,X_5}{2}$
$= \frac{(2\,r-\mathrm{R})\,X_{11}+(2\,r+\mathrm{R})\,X_{35}}{4\,r} = \frac{(2\,r+\mathrm{R})\,X_{12}+(2\,r-\mathrm{R})\,X_{36}}{4\,r}$
$= \frac{\sqrt{3}\,\{s^2+[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{15}-\{\sqrt{3}\,s^2-[10\,s+\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{18}}{16\,s\,r}$
$= \frac{-\sqrt{3}\,\{s^2-[2\,\sqrt{3}\,s-(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{16}+\{\sqrt{3}\,s^2+[10\,s-\sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,X_{17}}{16\,s\,r}$.

On a $4 = -\frac{d_{140}}{4\,s^2\,r^2} = -\frac{d^{'}_{140}}{2\,s\,r^2}$.

Donc $X_{140} \in (X_2X_3)$, $X_{140} \in (X_2X_5)$, $X_{140} \in (X_3X_4)$, $X_{140} \in (X_3X_5)$, $X_{140} \in (X_4X_5)$, $X_{140} \in (X_{11}X_{35})$, $X_{140} \in (X_{12}X_{36})$ $X_{140} \in (X_{15}X_{18})$, $X_{140} \in (X_{16}X_{17})$.

5.3.6 X_{141} complément du point symédian $X_6 \equiv K$; milieu du segment $[X_{67}X_{110}]$

$$X_{141} = \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2}{2\,d_{141}} \\ \frac{c^2+a^2}{2\,d_{141}} \\ \frac{a^2+b^2}{2\,d_{141}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{141} = (a^2 + b^2 + c^2) = d_6 = d_{2,\,1}$.

On a $\overrightarrow{X_{141}X_6} = 3\,\overrightarrow{X_{141}G}$; donc X_{141} est le complément du point symédian $X_6 \equiv K$.

Remarque :
$b^2 + c^2 = 2\,\Delta\,[\cot(\alpha) + \cot(\omega)]$,
$c^2 + a^2 = 2\,\Delta\,[\cot(\beta) + \cot(\omega)]$,
$a^2 + b^2 = 2\,\Delta\,[\cot(\gamma) + \cot(\omega)]$.

Relations avec les points précédents

$X_{141} = \frac{-[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_2+2\,r^2\,X_3}{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]} = \frac{3\,X_2-X_6}{2} = \frac{3\,X_2+X_{69}}{4}$
$= \frac{B_{3,\,141}\,X_3+B_{66,\,141}\,X_{66}}{D_{141}} = \frac{X_{67}+X_{110}}{2}$, avec :

$B_{3,\,141} = 2\,s^6 - s^4\,[r\,(7\,r + 24\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2]$
$+ s^2\,r\,[2\,r^2\,(3\,r + 23\,\mathrm{R}) + 8\,(13\,r + 8\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]$
$- r^2\,\{r\,[r^2\,(r + 14\,\mathrm{R}) + 8\,(9\,r + 20\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 128\,\mathrm{R}^4\}$,
$B_{66,\,141} = 2\,s^6 - s^4\,[r\,(7\,r + 24\,\mathrm{R}) + 16\,\mathrm{R}^2]$
$+ s^2\,\{r\,[2\,r^2\,(3\,r + 23\,\mathrm{R}) + 4\,(31\,r + 32\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 32\,\mathrm{R}^4\}$
$- r\,\langle r\,\{r\,[r^2\,(r + 14\,\mathrm{R}) + 4\,(19\,r + 50\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 256\,\mathrm{R}^4\} + 128\,\mathrm{R}^5\rangle$,
$D_{141} = 2\,\|2\,s^6 - s^4\,[r\,(7\,r + 24\,\mathrm{R}) + 12\,\mathrm{R}^2]$
$+ s^2\,\{r\,[2\,r^2\,(3\,r + 23\,\mathrm{R}) + 6\,(19\,r + 16\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 16\,\mathrm{R}^4\}$
$- r\,\langle r\,\{r\,[r^2\,(r + 14\,\mathrm{R}) + 2\,(37\,r + 90\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 192\,\mathrm{R}^4\} + 64\,\mathrm{R}^5\rangle\|$

On a $2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] = d_{141}$.

Donc $X_{141} \in (X_2X_6)$, $X_{141} \in (X_2X_{69})$, $X_{141} \in (X_3X_{66})$, $X_{141} \in (X_{67}X_{110})$.

5.3.7 X_{142} complément du “Mittenpunkt” $X_9 \equiv M$

$X_{142} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(b+c)-(b-c)^2}{2\,d_{142}} \\ \frac{b\,(c+a)-(c-a)^2}{2\,d_{142}} \\ \frac{c\,(a+b)-(a-b)^2}{2\,d_{142}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{142} = -(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_7 = -d_{2,1} + 2\,d_{2,2}$.

On a $\overrightarrow{X_{142}X_9} = 3\,\overrightarrow{X_{142}G}$; donc X_{142} est le complément du “Mittenpunkt” $X_9 \equiv M$.

Relations avec les points précédents

$X_{142} = \frac{(r+2\,\mathrm{R})\,X_1+3\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_2-2\,r\,X_3}{2\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{3\,X_2+X_7}{4} = \frac{3\,X_2-X_9}{2}$.

On a $2\,(r + 4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{142}}{2\,r}$.

Donc $X_{142} \in (X_2X_7)$, $X_{142} \in (X_2X_9)$.

5.3.8 X_{144} anticomplément du point de Gergonne $X_7 \equiv Ge$

$$X_{144} = \begin{pmatrix} \frac{3\,a^2-2\,a\,(b+c)-(b-c)^2}{d_{144}} \\ \frac{3\,b^2-2\,b\,(c+a)-(c-a)^2}{d_{144}} \\ \frac{3\,c^2-2\,c\,(a+b)-(a-b)^2}{d_{144}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{144} = (a^2 + b^2 + c^2) - 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = -d_7 = d_{2,\,1} - 2\,d_{2,\,2}$.

On a $\overrightarrow{X_{144}X_7} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{X_{144}G}$; donc X_{144} est l'anticomplément du point de Gergonne $X_7 \equiv Ge$.

Relations avec les points précédents

$X_{144} = \frac{-4\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_1-3\,(r-4\,\mathrm{R})\,X_2+8\,r\,X_3}{r+4\,\mathrm{R}} = 3\,X_2 - 2\,X_7 = -3\,X_2 + 4\,X_9$ $= 9\,X_2 - 8\,X_{142} = -3\,X_7 + 4\,X_{142} = 3\,X_9 - 2\,X_{142} = \frac{r\,X_{20}+4\,\mathrm{R}\,X_{72}}{r+4\,\mathrm{R}}$.

On a $r + 4\,\mathrm{R} = -\frac{d_{144}}{4\,r}$.

Donc $X_{144} \in (X_2X_7)$, $X_{144} \in (X_2X_9)$, $X_{144} \in (X_2X_{142})$, $X_{144} \in (X_7X_{142})$, $X_{144} \in (X_9X_{142})$, $X_{144} \in (X_{20}X_{72})$.

5.3.9 X_{145} anticomplément du point de Nagel $X_8 \equiv Na$

$$X_{145} = \begin{pmatrix} \frac{3\,a-b-c}{d_{145}} \\ \frac{3\,b-c-a}{d_{145}} \\ \frac{3\,c-a-b}{d_{145}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{145} = a + b + c = d_1 = d_{1,\,1}$.

On a $\overrightarrow{X_{145}X_8} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{X_{145}G}$; donc X_{145} est l'anticomplément du point de Nagel $X_8 \equiv Na$.

Relations avec les points précédents

$X_{145} = 4\,X_1 - 3\,X_2 = 3\,X_1 - 2\,X_{10} = -3\,X_8 + 4\,X_{10} = \frac{-2\,(r-\mathrm{R})\,X_{56}+(2\,r-\mathrm{R})\,X_{100}}{\mathrm{R}}$

On a $1 = \frac{d_{145}}{2\,s}$.

Donc $X_{145} \in (X_1X_2)$, $X_{145} \in (X_1X_{10})$, $X_{145} \in (X_8X_{10})$, $X_{145} \in (X_{56}X_{100})$.

5.3.10 X_{165} centre de gravité du triangle excentral $J_1J_2J_3$

$$X_{165} \triangleq \frac{J_1+J_2+J_3}{3} = \begin{pmatrix} \frac{a\,[-3\,a^2+2\,a\,(b-c)+(b-c)^2]}{3\,d_{165}} \\ \frac{b\,[-3\,b^2+2\,b\,(c-a)+(c-a)^2]}{3\,d_{165}} \\ \frac{c\,[-3\,c^2+2\,c\,(a-b)+(a-b)^2]}{3\,d_{165}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{165} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)-2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{165} = \frac{-X_1+4\,X_3}{3} = \frac{2\,X_{10}+X_{20}}{3} = \frac{(r+\mathrm{R})\,X_{63}+(2\,r-\mathrm{R})\,X_{100}}{3\,r}$.

On a $3 = \frac{3\,d_{165}}{8\,s\,r^2}$.

Donc $X_{165} \in (X_1X_3)$, $X_{165} \in (X_{10}X_{20})$, $X_{165} \in (X_{63}X_{100})$.

5.3.11 $X_{175} \equiv So^{'}$ point isopérimétrique ou point de Soddy extérieur

$X_{175} \equiv So^{'} = \begin{pmatrix} \frac{a-r_1}{d_{175}} \\ \frac{b-r_2}{d_{175}} \\ \frac{c-r_3}{d_{175}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{175} = (a+b+c) - (r_1+r_2+r_3) = d_1 - (r_1+r_2+r_3)$.

Relations avec les points précédents

$X_{175} = \frac{2\,[s-(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-3\,r\,X_2+4\,r\,X_3}{2\,s-(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{2\,s\,X_1-(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{2\,s-(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $2\,s-(r+4\,\mathrm{R}) = d_{175}$.

Donc $X_{175} \in (X_1X_7)$.

5.3.12 $X_{176} \equiv So$ point d'égal detour ou point de Soddy intérieur

$X_{176} \equiv So = \begin{pmatrix} \frac{a+r_1}{d_{176}} \\ \frac{b+r_2}{d_{176}} \\ \frac{c+r_3}{d_{176}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{176} = (a+b+c) + (r_1+r_2+r_3) = d_1 + (r_1+r_2+r_3)$.

Relations avec les points précédents

$X_{176} = \frac{2\,[s+(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,r\,X_2-4\,r\,X_3}{2\,s+(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{2\,s\,X_1+(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{2\,s+(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $2\,s+(r+4\,\mathrm{R}) = d_{176}$.

Donc $X_{176} \in (X_1X_7)$.

5.3.13 X_{181} point d'Apollonius

$$X_{181} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,[a^2\,(b+c)^2-(b^2-c^2)^2]}{2\,d_{181}} \\ \frac{b^2\,[b^2\,(c+a)^2-(c^2-a^2)^2]}{2\,d_{181}} \\ \frac{c^2\,[c^2\,(a+b)^2-(a^2-b^2)^2]}{2\,d_{181}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{181} = a\,b\,c\,(a^3+b^3+c^3) + 3\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{6,4} + 3\,d_{6,7}$.

Remarque :
$a^2\,(b+c)^2 - (b^2-c^2)^2 = 4\,a^2\,b\,c\,[\cos(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2})]^2$,
$b^2\,(c+a)^2 - (c^2-a^2)^2 = 4\,b^2\,c\,a\,[\cos(\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2})]^2$,
$c^2\,(a+b)^2 - (a^2-b^2)^2 = 4\,c^2\,a\,b\,[\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})]^2$.

Relations avec les points précédents

$$X_{181} = \frac{[s^2\,(r+\mathrm{R})+r^2\,(r+3\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,r^2\,\mathrm{R}\,X_2-(s^2+r^2)\,r\,X_3}{(s^2-3\,r^2)\,\mathrm{R}} = \frac{2\,s\,X_1+(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{2\,s+(r+4\,\mathrm{R})}$$
$$= \frac{-2\,[s^2\,r+r^2\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{10}+(s^2+r^2)\,(2\,r+\mathrm{R})\,X_{12}}{(s^2-3\,r^2)\,\mathrm{R}} = \frac{[s^2-3\,r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_{31}+6\,r\,\mathrm{R}\,X_{51}}{s^2-3\,r^2}$$
$$= \frac{[s^2+r\,(r-8\,\mathrm{R})]\,r\,X_{43}-(s^2+r^2)\,(r-2\,\mathrm{R})\,X_{57}}{2\,(s^2-3\,r^2)\,\mathrm{R}}.$$

On a $(s^2-3\,r^2)\,\mathrm{R} = \frac{d_{181}}{8\,s^2\,r}$.

Donc $X_{181} \in (X_1X_7)$, $X_{181} \in (X_{10}X_{12})$, $X_{181} \in (X_{31}X_{51})$, $X_{181} \in (X_{43}X_{57})$.

5.3.14 X_{182} point milieu du diamètre de Brocard $[X_3X_6]$

$$X_{182} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,[a^4-a^2\,(b^2+c^2)-2\,b^2\,c^2]}{d_{182}} \\ \frac{b^2\,[b^4-b^2\,(c^2+a^2)-2\,c^2\,a^2]}{d_{182}} \\ \frac{c^2\,[c^4-c^2\,(a^2+b^2)-2\,a^2\,b^2]}{d_{182}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{182} = (a^6+b^6+c^6) - (b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2) - (b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4) - 6\,a^2\,b^2\,c^2$
$= d_3\,\delta_{182} = d_{6,1} - d_{6,3} - 6\,d_{6,7}$ et $\delta_{182} = -(a^2+b^2+c^2) = -d_6 = -d_{2,1}$.

Relations avec les points précédents

$$X_{182} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,r\,\mathrm{R}\,X_2+[s^2-r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]} = \frac{X_3+X_6}{2}.$$

On a $2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})] = -\frac{d_{182}}{16\,s^2\,r^2} = -\delta_{182}$.

Donc $X_{182} \in (X_3X_6)$.

5.3.15 X_{183}

$$X_{183} = \begin{pmatrix} \frac{-a^4+a^2\,(b^2+c^2)+2\,b^2\,c^2}{d_{183}} \\ \frac{-b^4+b^2\,(c^2+a^2)+2\,c^2\,a^2}{d_{183}} \\ \frac{-c^4+c^2\,(a^2+b^2)+2\,a^2\,b^2}{d_{183}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{183} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 4\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = -d_{4,1} + 4\,d_{4,3}$.

Remarque :
$-a^4 + a^2\,(b^2 + c^2) + 2\,b^2\,c^2 = 2\,d_6\,\Delta\,[\cot(\alpha) + \tan(\omega)]$,
$-b^4 + b^2\,(c^2 + a^2) + 2\,c^2\,a^2 = 2\,d_6\,\Delta\,[\cot(\beta) + \tan(\omega)]$,
$-c^4 + c^2\,(a^2 + b^2) + 2\,a^2\,b^2 = 2\,d_6\,\Delta\,[\cot(\gamma) + \tan(\omega)]$.

Relations avec les points précédents

$X_{183} = \frac{3\,[s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_2+2\,[-s^4+2\,s^2\,r\,(r+8\,\mathrm{R})-r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_6}{s^4+2\,s^2\,r\,(5\,r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{3\,X_2-2\,[\cos(\omega)]^2\,X_6}{3-2\,[\cos(\omega)]^2}$.

On a $s^4 + 2\,s^2\,r\,(5\,r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = \frac{d_{183}}{2}$.

Donc $X_{183} \in (X_2X_6)$.

5.3.16 X_{186}

$$X_{186} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(q_1^2-b^2\,c^2)\,q_2\,q_3}{d_{186}} \\ \frac{b^2\,(q_2^2-c^2\,a^2)\,q_3\,q_1}{d_{186}} \\ \frac{c^2\,(q_3^2-a^2\,b^2)\,q_1\,q_2}{d_{186}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{186} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6)$
$- 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{74} = d_3\,\delta_{186} = d_3\,d_{23}$
$= d_{10,1} - 3\,d_{10,3} + 2\,d_{10,7} + 5\,d_{10,9} - 4\,d_{10,13}$ et
$\delta_{186} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) - 3\,a^2\,b^2\,c^2$
$= d_{23} = -d_{6,1} + d_{6,3} - 3\,d_{6,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{186} = \frac{-3\,\mathrm{R}^2\,X_2+[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]\,X_3}{2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2} = \frac{2\,X_3+X_{23}}{3}$.

On a $2\,s^2 - 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 9\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{186}}{256\,s^4\,r^4} = \frac{\delta_{186}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{186} \in (X_2X_3)$, $X_{186} \in (X_3X_{23})$.

5.3.17 X_{187} centre de Schoute ; milieu du segment $[X_{15}X_{16}]$

$$X_{187}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,(2\,a^2-b^2-c^2)}{2\,d_{187}}\\ \frac{b^2\,(2\,b^2-c^2-a^2)}{2\,d_{187}}\\ \frac{c^2\,(2\,c^2-a^2-b^2)}{2\,d_{187}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{187}=(a^4+b^4+c^4)-(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)=d_{99}=d_{4,\,1}-d_{4,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{187}=\frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_2-2\,[7\,s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2\,X_3}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$=\frac{X_{15}+X_{16}}{2}$.

On a $s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2=d_{187}$.

Donc $X_{187}\in(X_{15}X_{16})$.

5.3.18 X_{191}

$$X_{191}=\begin{pmatrix}\frac{a\,[-a^3-a^2\,(b+c)+a\,(b^2+b\,c+c^2)+b^3+b^2\,c+b\,c^2+c^3]}{d_{191}}\\ \frac{b\,[-b^3-b^2\,(c+a)+b\,(c^2+c\,a+a^2)+c^3+c^2\,a+c\,a^2+a^3]}{d_{191}}\\ \frac{c\,[-c^3-c^2\,(a+b)+c\,(a^2+a\,b+b^2)+a^3+a^2\,b+a\,b^2+b^3]}{d_{191}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{191}=-(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+3\,a\,b\,c\,(a+b+c)=d_{21}=d_1\,d_{191}^{'}$
$=-d_{4,\,1}+2\,d_{4,\,3}+3\,d_{4,\,4}$ et
$d_{191}^{'}=-(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)+a\,b\,c=d_{21}^{'}$
$=-d_{3,\,1}+d_{3,\,2}+d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{191}=\frac{-(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_1+6\,\mathrm{R}\,X_2+4\,r\,X_3}{2\,r+3\,\mathrm{R}}=-X_1+2\,X_{21}=\frac{(r+4\,\mathrm{R})\,X_9+(r-\mathrm{R})\,X_{46}}{2\,r+3\,\mathrm{R}}$
$=\frac{6\,\mathrm{R}\,X_{30}+(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{40}}{2\,r+3\,\mathrm{R}}=\frac{(2\,r+\mathrm{R})\,X_{35}+2\,\mathrm{R}\,X_{72}}{2\,r+3\,\mathrm{R}}$.

On a $2\,r+3\,\mathrm{R}=\frac{d_{191}}{8\,s^2\,r}=\frac{d_{191}^{'}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{191}\in(X_1X_{21})$, $X_{191}\in(X_9X_{46})$, $X_{191}\in(X_{30}X_{40})$, $X_{191}\in(X_{35}X_{72})$.

5.3.19 X_{230} ; milieu du segment $[X_{115}X_{187}]$

$$X_{230}=\begin{pmatrix}\frac{2\,a^4-a^2\,(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2}{4\,d_{230}}\\ \frac{2\,b^4-b^2\,(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2}{4\,d_{230}}\\ \frac{2\,c^4-c^2\,(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2}{4\,d_{230}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{230}=(a^4+b^4+c^4)-(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)=d_{99}=d_{4,\,1}-d_{4,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{230} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,[s^2\,r\,(2\,r+\mathrm{R})-r^2\,(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,X_2-2\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2\,X_3}{s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$= \frac{X_{115}+X_{187}}{2}$.

On a $s^4-2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2 = d_{230}$.

Donc $X_{230} \in (X_{115}X_{187})$.

5.3.20 X_{256} premier point de Sharygin

$$X_{256} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(b^2+c\,a)\,(c^2+a\,b)}{d_{256}} \\ \frac{b\,(c^2+a\,b)\,(a^2+b\,c)}{d_{256}} \\ \frac{c\,(a^2+b\,c)\,(b^2+c\,a)}{d_{256}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{256} = (b^3\,c^2+c^3\,a^2+a^3\,b^2)+a\,b\,c\,(a^2+b^2+c^2)+(b^2\,c^3+c^2\,a^3+a^2\,b^3)$
$+\,a\,b\,c\,(b\,c+c\,a+a\,b) = d_{5,3}+d_{5,4}+d_{5,5}$

Relations avec les points précédents

$X_{256} = \frac{[s^4-2\,s^2\,r\,(r+2\,\mathrm{R})+r^3\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1+24\,r^3\,\mathrm{R}\,X_2+4\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-2\,\mathrm{R})+r^3\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{2\,[s^2+r\,(r-4\,\mathrm{R})]\,r\,(r+4\,\mathrm{R})\,X_9+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2+r\,(r-8\,\mathrm{R})]\,X_{43}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-2\,\mathrm{R})+r^3\,(r+4\,\mathrm{R})}$

On a $s^4+2\,s^2\,r\,(r-2\,\mathrm{R})+r^3\,(r+4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{256}}{2\,s}$.

Donc $X_{256} \in (X_9X_{43})$.

5.3.21 X_{284}

$$X_{284} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(2\,a')\,(c+a)\,(a+b)}{d_{284}} \\ \frac{b^2\,(2\,b')\,(a+b)\,(b+c)}{d_{284}} \\ \frac{c^2\,(2\,c')\,(b+c)\,(c+a)}{d_{284}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{284} = -(a^5+b^5+c^5)+(b^3\,c^2+c^3\,a^2+a^3\,b^2)+a\,b\,c\,(a^2+b^2+c^2)$
$+\,(b^2\,c^3+c^2\,a^3+a^2\,b^3)+2\,a\,b\,c\,(b\,c+c\,a+a\,b) = -d_{5,1}+d_{5,3}+d_{5,4}+2\,d_{5,5}$

Relations avec les points précédents

$X_{284} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_1-6\,r\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}\,X_2+2\,[s^2-r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,r\,X_3}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{2\,s^2\,(r+\mathrm{R})\,X_1+[s^2-r\,(r+6\,\mathrm{R})-8\,\mathrm{R}^2]\,r\,X_{19}}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{2\,s^2\,r\,X_3+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_6}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{-[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,(r+4\,\mathrm{R}))\,X_9+2\,s^2\,(2\,r+3\,\mathrm{R}))\,X_{21}}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{2\,s^2\,(2\,r+\mathrm{R})\,X_{35}-[s^2+(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,X_{71}}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{2\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,\mathrm{R}\,X_{37}+[3\,s^2-(r+4\,\mathrm{R})^2]\,r\,X_{101}}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{[s^2-(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(r-2\,\mathrm{R})\,X_{57}+2\,[s^2-(r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\,(r+2\,\mathrm{R})\,X_{77}}{s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2\,(3\,r+2\,\mathrm{R})-r\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})=\frac{d_{284}}{8\,s\,r}$.

Donc $X_{284}\in(X_1X_{19})$, $X_{284}\in(X_3X_6)$, $X_{284}\in(X_9X_{21})$, $X_{284}\in(X_{35}X_{71})$, $X_{284}\in(X_{37}X_{101})$, $X_{284}\in(X_{57}X_{77})$.

5.3.22 X_{291} second point de Sharygin

$X_{291}=\begin{pmatrix}\frac{a\,(b^2-c\,a)\,(c^2-a\,b)}{d_{291}}\\ \frac{b\,(c^2-a\,b)\,(a^2-b\,c)}{d_{291}}\\ \frac{c\,(a^2-b\,c)\,(b^2-c\,a)}{d_{291}}\end{pmatrix}$, avec :

$d_{291}=-(b^3\,c^2+c^3\,a^2+a^3\,b^2)+a\,b\,c\,(a^2+b^2+c^2)-(b^2\,c^3+c^2\,a^3+a^2\,b^3)$
$+\,a\,b\,c\,(b\,c+c\,a+a\,b)=d_1\,d'_{291}=-d_{5,\,3}+d_{5,\,4}+d_{5,\,5}$ et
$d'_{291}=-(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+a\,b\,c\,(a+b+c)=-d_{4,\,3}+d_{4,\,4}$.

Relations avec les points précédents

$X_{291}=\frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(3\,r+8\,\mathrm{R})]\,X_1-12\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_2+4\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2\,X_3}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-8\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$=\frac{-[s^4+2\,s^2\,r^2+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_1+2\,[s^4+2\,s^2\,r\,(r-4\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,X_{39}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-8\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$=\frac{-6\,[3\,s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}\,X_2+[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})]\,X_{38}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-8\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$=\frac{[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})]\,[3\,s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{42}-2\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2-r\,(r+\mathrm{R})]\,X_{81}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-8\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$
$=\frac{[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,[s^2+r\,(r-8\,\mathrm{R})]\,X_{43}+2\,[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\,(r-2\,\mathrm{R})\,X_{57}}{s^4+2\,s^2\,r\,(r-8\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2}$.

On a $s^4+2\,s^2\,r\,(r-8\,\mathrm{R})+r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2=-\frac{d_{291}}{2\,s}=-d'_{291}$.

Donc $X_{291}\in(X_1X_{39})$, $X_{291}\in(X_2X_{38})$, $X_{291}\in(X_{42}X_{81})$, $X_{291}\in(X_{43}X_{57})$.

5.3.23 X_{329}

$X_{329}=\begin{pmatrix}\frac{3\,a^5+5\,a^4\,(b+c)-4\,a^2\,(b^3+b^2\,c+b\,c^2+c^3)-3\,a\,{b^2-c^2}^2-b^5-b^4\,c+2\,b^3\,c^2+2\,b^2\,c^3-b\,c^4-c^5}{d_{329}}\\ \frac{3\,b^5+5\,b^4\,(c+a)-4\,b^2\,(c^3+c^2\,a+c\,a^2+a^3)-3\,b\,{c^2-a^2}^2-c^5-c^4\,a+2\,c^3\,a^2+2\,c^2\,a^3-c\,a^4-a^5}{d_{329}}\\ \frac{3\,c^5+5\,c^4\,(a+b)-4\,c^2\,(a^3+a^2\,b+a\,b^2+b^3)-3\,c\,{a^2-b^2}^2-a^5-a^4\,b+2\,a^3\,b^2+2\,a^2\,b^3-a\,b^4-b^5}{d_{329}}\end{pmatrix}$,

avec :
$d_{329}=(a^5+b^5+c^5)+(b^4\,c+c^4\,a+a^4\,b)+(b\,c^4+c\,a^4+a\,b^4)$
$-2\,(b^3\,c^2+c^3\,a^2+a^3\,b^2)-2\,(b^2\,c^3+c^2\,a^3+a^2\,b^3)-2\,a\,b\,c\,(b\,c+c\,a+a\,b)=d_1\,d'_{329}$
$=d_{5,\,1}+d_{5,\,2}-2\,d_{5,\,3}-2\,d_{5,\,5}$ et
$d'_{329}=(a^4+b^4+c^4)-2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)=-d_3=d_{4,\,1}-2\,d_{4,\,3}$

Relations avec les points précédents

$X_{329}=-2\,X_1-3\,X_2+6\,X_3=-2\,X_1+3\,X_{376}=-3\,X_4+4\,X_{10}=-2\,X_{10}+3\,X_{40}=\frac{3\,X_{20}-X_{145}}{2}$.

On a $1 = -\frac{d_{329}}{32\,s^3\,r^2} = -\frac{d'_{329}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{329} \in (X_1 X_{376})$, $X_{329} \in (X_4 X_{10})$, $X_{329} \in (X_{10} X_{40})$, $X_{329} \in (X_{20} X_{145})$.

5.3.24 X_{354} point de Weill

$$X_{354} = \begin{pmatrix} \frac{a\,[a\,(b+c)-(b-c)^2]}{6\,d_{354}} \\ \frac{b\,[b\,(c+a)-(c-a)^2]}{6\,d_{354}} \\ \frac{c\,[c\,(a+b)-(a-b)^2]}{6\,d_{354}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_{354} = a\,b\,c = d'_{65} = d_{3,\,3}$$

Relations avec les points précédents

$X_{354} = \frac{r\,(r+3\,\mathrm{R})\,X_1 - r^2\,X_3}{3\,r\,\mathrm{R}} = \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{37}-[s^2+r\,(r-2\,\mathrm{R})]\,X_{38}}{6\,r\,\mathrm{R}}$.

On a $3\,r\,\mathrm{R} = \frac{3\,d_{354}}{4\,s}$.

Donc $X_{354} \in (X_1 X_3)$, $X_{354} \in (X_{37} X_{38})$.

5.3.25 X_{376} ; milieu du segment $[X_2 X_{20}]$

$$X_{376} = \begin{pmatrix} \frac{5\,a^4-4\,a^2\,(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{3\,d_{376}} \\ \frac{5\,b^4-4\,b^2\,(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2}{3\,d_{376}} \\ \frac{5\,c^4-4\,c^2\,(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2}{3\,d_{376}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{376} = (a^4+b^4+c^4) - 2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = -d_3 = d_1\,d'_{376} = d_{4,\,1} - 2\,d_{4,\,3}$ et $d'_{376} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 2\,a\,b\,c = -d'_3$ $= d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 2\,d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{376} = -X_2 + 2\,X_3 = \frac{X_2+X_{20}}{2} = \frac{-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_{69}+2\,[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R}^2]\,X_{74}}{3\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R}^2]}$.

On a $1 = -\frac{d_{376}}{16\,s^2\,r^2} = -\frac{d'_{376}}{8\,s\,r^2}$.

Donc $X_{376} \in (X_2 X_3)$, $X_{376} \in (X_2 X_{20})$, $X_{376} \in (X_{69} X_{74})$.

5.3.26 X_{378}

$$X_{378} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,q_2\,q_3\,[a^4-2\,a^2\,(b^2+c^2)+b^4+4\,b^2\,c^2+c^4]}{d_{378}} \\ \frac{b^2\,q_3\,q_1\,[b^4-2\,b^2\,(c^2+a^2)+c^4+4\,c^2\,a^2+a^4]}{d_{378}} \\ \frac{c^2\,q_1\,q_2\,[c^4-2\,c^2\,(a^2+b^2)+a^4+4\,a^2\,b^2+b^4]}{d_{378}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{378} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{378}$
$= d_{10,\,1} - 3\,d_{10,\,3} + 2\,d_{10,\,7} + 2\,d_{10,\,9} + 2\,d_{10,\,13}$ et
$\delta_{378} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^4\,a^2 + a^2\,b^4) = d_{22}$
$= -d_{6,\,1} + d_{6,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{378} = \frac{3\,\mathrm{R}^2\,X_2 + [s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,X_3}{s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2} = 2\,X_3 - X_{22}$
$= \frac{[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6 + [2\,s^2 - 2\,r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 9\,\mathrm{R}^2]\,X_{74}}{3\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]} = \frac{[s^2 - r\,(r+2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{33} + [s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]\,(2\,r - \mathrm{R})\,X_{36}}{2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,r}$
$= \frac{-[s^2 - r\,(r+6\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\,X_{34} + [s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]\,(2\,r + \mathrm{R})\,X_{35}}{2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,r} = \frac{[2\,s^2 - 2\,r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 5\,\mathrm{R}^2]\,X_{54} + [s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]\,X_{64}}{3\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]}$

On a $s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2 = \frac{d_{378}}{512\,s^4\,r^4} = \frac{\delta_{378}}{32\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{378} \in (X_2X_3)$, $X_{378} \in (X_3X_{22})$, $X_{378} \in (X_6X_{74})$, $X_{378} \in (X_{33}X_{36})$, $X_{378} \in (X_{34}X_{35})$, $X_{378} \in (X_{54}X_{64})$

5.3.27 X_{381} milieu du segment $[X_2X_4]$

$$X_{381} = \begin{pmatrix} \frac{a^4 + a^2\,(b^2+c^2) - 2\,(b^2-c^2)^2}{3\,d_{381}} \\ \frac{b^4 + b^2\,(c^2+a^2) - 2\,(c^2-a^2)^2}{3\,d_{381}} \\ \frac{c^4 + c^2\,(a^2+b^2) - 2\,(a^2-b^2)^2}{3\,d_{381}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{381} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{381} = -d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3}$
et $d'_{381} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d'_3$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{381} = 2\,X_2 - X_3 = \frac{X_2 + X_4}{2} = \frac{X_3 + 2\,X_4}{3} = \sqrt{3}\,\frac{-[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6 + \{s^2 + 2\,[2\,\sqrt{3}\,s - (r+4\,\mathrm{R})]\}\,X_{13}}{6\,s\,r}$

On a $1 = \frac{d_{381}}{16\,s^2\,r^2} = \frac{d'_{381}}{8\,s\,r^2}$.

Donc $X_{381} \in (X_2X_3)$, $X_{381} \in (X_2X_4)$, $X_{381} \in (X_3X_4)$, $X_{381} \in (X_6X_{13})$

5.3.28 X_{382}

$$X_{382} = \begin{pmatrix} \frac{3\,a^4 - a^2\,(b^2+c^2) - 2\,(b^2-c^2)^2}{d_{381}} \\ \frac{3\,b^4 - b^2\,(c^2+a^2) - 2\,(c^2-a^2)^2}{d_{381}} \\ \frac{3\,c^4 - c^2\,(a^2+b^2) - 2\,(a^2-b^2)^2}{d_{381}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{382} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{382} = -d_{4,\,1} + 2\,d_{4,\,3}$
et

$d'_{382} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+\,a\,b^2)-2\,a\,b\,c = d'_3$
$= -d_{3,\,1}+d_{3,\,2}-2\,d_{3,\,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{382} = 6\,X_2 - 5\,X_3 = \frac{-3\,X_2+5\,X_4}{2} = -X_3+2\,X_4$

On a $1 = \frac{d_{382}}{16\,s^2\,r^2} = \frac{d'_{382}}{8\,s\,r^2}$.

Donc $X_{382} \in (X_2X_3)$, $X_{382} \in (X_2X_4)$, $X_{382} \in (X_3X_4)$.

5.3.29 X_{390}

$$X_{390} = \begin{pmatrix} \frac{-(2\,a')\,[3\,a^2+(b-c)^2]}{d_{390}} \\ \frac{-(2\,b')\,[3\,b^2+(c-a)^2]}{d_{390}} \\ \frac{-(2\,c')\,[3\,c^2+(a-b)^2]}{d_{390}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{390} = (a^3+b^3+c^3)-(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)-(b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2)-6\,a\,b\,c$
$= d_{3,\,1}-d_{3,\,2}-6\,d_{3,\,3} = -d_1\,d'_{390}$ et $d'_{390} = (a^2+b^2+c^2)-2\,(b\,c+c\,a+a\,b)$
$= -d_7 = d_{2,\,1}-2\,d_{2,\,2}$.

Relations avec les points précédents

$X_{390} = \frac{4\,\mathrm{R}\,X_1-3\,r\,X_2+4\,r\,X_3}{r+4\,\mathrm{R}} = 2\,X_1 - X_7 = \frac{9\,r\,X_2-4\,(2\,r-\mathrm{R})\,X_{11}}{r+4\,\mathrm{R}} = -X_8+2\,X_9$

On a $r+4\,\mathrm{R} = -\frac{d_{390}}{8\,s\,r} = -\frac{d'_{390}}{4\,r}$.

Donc $X_{390} \in (X_1X_7)$, $X_{390} \in (X_2X_{11})$, $X_{390} \in (X_8X_9)$.

5.3.30 X_{468} intersection de la droite ou ligne d'Euler et de l'axe orthique L_3 (cf. ci-après)

$$X_{468} = \begin{pmatrix} \frac{(-2\,a^2+b^2+c^2)\,q_2\,q_3}{4\,d_{468}} \\ \frac{(-2\,b^2+c^2+a^2)\,q_3\,q_1}{4\,d_{468}} \\ \frac{(-2\,c^2+a^2+b^2)\,q_1\,q_2}{4\,d_{468}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{468} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-3\,a^2\,b^2\,c^2$
$= d_{23} = -d_{6,\,1}+d_{6,\,3}-3\,d_{6,\,7}$.

Relations avec les points précédents

$X_{468} = \frac{3\,[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})-6\,\mathrm{R})^2]\,X_2+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_3}{2\,[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R})^2]} = \frac{3\,X_2+X_{23}}{4} = \frac{X_4+3\,X_{186}}{4}$.

On a $2\,[2\,s^2-2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})-9\,\mathrm{R})^2] = \frac{d_{468}}{8\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{468} \in (X_2X_3)$, $X_{468} \in (X_2X_{23})$, $X_{468} \in (X_4X_{186})$. Et X_{468} appartient à l'axe orthique L_3 (cf. ci-après).

5.3.31 X_{481} premier point d'Eppstein

$X_{481} = \begin{pmatrix} \frac{a-2\,r_1}{d_{481}} \\ \frac{b-2\,r_2}{d_{481}} \\ \frac{c-2\,r_3}{d_{481}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{481} = (a+b+c) - 2\,(r_1+r_2+r_3) = d_1 - 2\,(r_1+r_2+r_3)$.

Relations avec les points précédents

$X_{481} = \frac{[s-2\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X-3\,r\,X_2+4\,r\,X_3}{s-(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{s\,X_1-(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{s-(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s-(r+4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{481}}{2}$.

Donc $X_{481} \in (X_1X_7)$.

5.3.32 X_{482} deuxième point d'Eppstein

$X_{482} = \begin{pmatrix} \frac{a+2\,r_1}{d_{482}} \\ \frac{b+2\,r_2}{d_{482}} \\ \frac{c+2\,r_3}{d_{482}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{482} = (a+b+c) + 2\,(r_1+r_2+r_3) = d_1 + 2\,(r_1+r_2+r_3)$.

Relations avec les points précédents

$X_{482} = \frac{[s+2\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+3\,r\,X_2-4\,r\,X_3}{s+(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{s\,X_1+(r+4\,\mathrm{R})\,X_7}{s+(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s+(r+4\,\mathrm{R}) = \frac{d_{482}}{2}$.

Donc $X_{482} \in (X_1X_7)$.

5.3.33 X_{485} point de Vecten

$X_{485} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2+4\,a^2\,\Delta}{2\,d_{485}} \\ \frac{b^2\,(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2+4\,b^2\,\Delta}{2\,d_{485}} \\ \frac{c^2\,(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2+4\,c^2\,\Delta}{2\,d_{485}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{485} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+2\,(a^2+b^2+c^2)\,\Delta = d_3+2\,d_6\,\Delta$
$= (-d_{4,1}+2\,d_{4,3})+2\,d_{2,1}\,\Delta$.

Relations avec les points précédents

$X_{485} = \frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1+6\,(s-\mathrm{R})\,r\,X_2-2\,(s+r)\,r\,X_3}{s^2+4\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{4\,s\,r\,X_5+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2+4\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2+4\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})=\frac{d_{485}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{485}\in(X_5X_6)$.

5.3.34 X_{486} point de Vecten intérieur

$$X_{486}=\begin{pmatrix}\frac{a^2\,(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2-4\,a^2\,\Delta}{2\,d_{486}}\\ \frac{b^2\,(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2-4\,b^2\,\Delta}{2\,d_{486}}\\ \frac{c^2\,(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2-4\,c^2\,\Delta}{2\,d_{486}}\end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{486}=-(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)-2\,(a^2+b^2+c^2)\,\Delta=d_3-2\,d_6\,\Delta$ $=(-d_{4,1}+2\,d_{4,3})-2\,d_{2,1}\,\Delta$.

Relations avec les points précédents

$X_{486}=\frac{[s^2+r\,(r+2\,\mathrm{R})]\,X_1-6\,(s+\mathrm{R})\,r\,X_2+2\,(s-r)\,r\,X_3}{s^2-4\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})}=\frac{-4\,s\,r\,X_5+[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{s^2-4\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})}$.

On a $s^2-4\,s\,r-r\,(r+4\,\mathrm{R})=-\frac{d_{486}}{4\,s\,r}$.

Donc $X_{486}\in(X_5X_6)$.

5.3.35 X_{521} point à l'infini

Attention : ce point n'étant pas à distance fini est tel que la somme de ses coordonnées aréolaires n'est pas égale à un mais à zéro.

$$X_{521}=\begin{pmatrix}a\,(2\,a')\,(b-c)\,q_1\\ b\,(2\,b')\,(c-a)\,q_2\\ c\,(2\,c')\,(a-b)\,q_3\end{pmatrix}\text{ et } d_{521}=0.$$

Relations avec les points précédents

$X_{521}=\frac{A_{1,\,521}\,X_1+A_{2,\,521}\,\,X_2+A_{3,\,521}\,X_3}{s^4+2\,s^2\,[r\,(r-10\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+4\,\mathrm{R})^3}\,\mathrm{D}$
$=\frac{16\,s^4\,[s^2-(r+\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(2\,r-\mathrm{R})}{\{s^4+2\,s^2\,[r\,(r-10\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}\,(r+2\,\mathrm{R})}\,\mathrm{D}\,(X_{59}-X_{100})$, avec :

$A_{1,\,521}=-16\,s^2\,r\,\{s^2\,(r-3\,\mathrm{R})+r\,[r\,(r+3\,\mathrm{R})+8\,\mathrm{R}^2]+12\,\mathrm{R}^3\}$
$A_{2,\,521}=-48\,s^2\,r\,\{s^2-[r\,(3\,r+4\,\mathrm{R})+4\,\mathrm{R}^2]\}\,\mathrm{R}$
$A_{3,\,521}=16\,s^2\,r\,\{s^2+[r\,(r-6\,\mathrm{R})-4\,\mathrm{R}^2]\}\,r$

On a $0=d_{521}$.

Donc $X_{521}\in(X_{59}X_{100})$.

5.3.36 X_{546} ; milieu du segment $[X_4X_5] \equiv [HN]$

$$X_{546} = \begin{pmatrix} \frac{2\,a^4+a^2\,(b^2+c^2)-3\,(b^2-c^2)^2}{4\,d_{546}} \\ \frac{2\,b^4+b^2\,(c^2+a^2)-3\,(c^2-a^2)^2}{4\,d_{546}} \\ \frac{2\,c^4+c^2\,(a^2+b^2)-3\,(a^2-b^2)^2}{4\,d_{546}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{546} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{546} = -d_{4,1}+2\,d_{4,3}$ et $d'_{546} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+\,a\,b^2)-2\,a\,b\,c = d'_3$ $= -d_{3,1}+d_{3,2}-2\,d_{3,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{546} = \frac{9\,X_2-5\,X_3}{4} = \frac{X_4+X_5}{2}$.

On a $4 = \frac{d_{546}}{4\,s^2\,r^2} = \frac{d'_{546}}{2\,s\,r^2}$.

Donc $X_{546} \in (X_2X_3)$, $X_{546} \in (X_4X_5)$.

5.3.37 X_{547} ; milieu des segments $[X_2X_5] \equiv [GN]$ et $[X_{381}X_{549}]$

$$X_{547} = \begin{pmatrix} \frac{-2\,a^4+7\,a^2\,(b^2+c^2)-5\,(b^2-c^2)^2}{12\,d_{547}} \\ \frac{-2\,b^4+7\,b^2\,(c^2+a^2)-5\,(c^2-a^2)^2}{12\,d_{547}} \\ \frac{-2\,c^4+7\,c^2\,(a^2+b^2)-5\,(a^2-b^2)^2}{12\,d_{547}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{547} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{547} = -d_{4,1}+2\,d_{4,3}$ et $d'_{547} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+\,a\,b^2)-2\,a\,b\,c = d'_3$ $= -d_{3,1}+d_{3,2}-2\,d_{3,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{547} = \frac{5\,X_2-X_3}{4} = \frac{X_2+X_5}{2}$.

On a $4 = \frac{d_{547}}{4\,s^2\,r^2} = \frac{d'_{547}}{2\,s\,r^2}$.

Donc $X_{547} \in (X_2X_3)$, $X_{547} \in (X_2X_5)$.

5.3.38 X_{548} ; milieu du segment $[X_5X_{20}] \equiv [NL]$

$$X_{548} = \begin{pmatrix} \frac{-6\,a^4+5\,a^2\,(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2}{d_{548}} \\ \frac{-6\,b^4+5\,b^2\,(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2}{d_{548}} \\ \frac{-6\,c^4+5\,c^2\,(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2}{d_{548}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{548} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{548} = -d_{4,1}+2\,d_{4,3}$ et $d'_{548} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+\,a\,b^2)-2\,a\,b\,c = d'_3$ $= -d_{3,1}+d_{3,2}-2\,d_{3,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{548} = \frac{-3\,X_2+7\,X_3}{4} = \frac{X_5+X_{20}}{2}$.

On a $4 = \frac{d_{548}}{4\,s^2\,r^2} = \frac{d'_{548}}{2\,s\,r^2}$.

Donc $X_{548} \in (X_2X_3)$, $X_{548} \in (X_5X_{20})$.

5.3.39 X_{549} ; milieu du segment $[X_2X_3] \equiv [GO]$

$$X_{549} = \begin{pmatrix} \frac{-4\,a^4+5\,a^2\,(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{6\,d_{549}} \\ \frac{-4\,b^4+5\,b^2\,(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2}{6\,d_{549}} \\ \frac{-4\,c^4+5\,c^2\,(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2}{6\,d_{549}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{549} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3 = d_1\; d'_{549} = -d_{4,1}+2\,d_{4,3}$ et $d'_{549} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+\,a\,b^2)-2\,a\,b\,c = d'_3$ $= -d_{3,1}+d_{3,2}-2\,d_{3,3}$.

Relation avec les points précédents

$X_{549} = \frac{X_2+X_3}{2} = -X_{281}+2\,X_{547}$.

On a $2 = \frac{d_{549}}{8\,s^2\,r^2} = \frac{d'_{549}}{4\,s\,r^2}$.

Donc $X_{549} \in (X_2X_3)$, $X_{549} \in (X_{281}X_{547})$.

5.3.40 X_{550} ; milieu du segment $[X_3X_{20}] \equiv [OL]$

$$X_{550} = \begin{pmatrix} \frac{-4\,a^4+3\,a^2\,(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2}{2\,d_{550}} \\ \frac{-4\,b^4+3\,b^2\,(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2}{2\,d_{550}} \\ \frac{-4\,c^4+3\,c^2\,(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2}{2\,d_{550}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{550} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2) = d_3 = d_1\; d'_{550} = -d_{4,1}+2\,d_{4,3}$ et $d'_{550} = -(a^3+b^3+c^3)+(b^2\,c+c^2\,a+a^2\,b)+(b\,c^2+c\,a^2+\,a\,b^2)-2\,a\,b\,c = d'_3$ $= -d_{3,1}+d_{3,2}-2\,d_{3,3}$.

Relations avec les points précédents

$X_{550} = \frac{-3\,X_2+5\,X_3}{2} = \frac{X_3+X_{20}}{2}$.

On a $2 = \frac{d_{550}}{8\,s^2\,r^2} = \frac{d'_{550}}{4\,s\,r^2}$.

Donc $X_{550} \in (X_2X_3)$, $X_{550} \in (X_3X_{20})$.

5.3.41 X_{551} ; milieu du segment $[X_1X_2] \equiv [IG]$

$X_{551} = \begin{pmatrix} \frac{4\,a+b+c}{6\,d_{551}} \\ \frac{4\,b+c+a}{6\,d_{551}} \\ \frac{4\,c+a+b}{6\,d_{551}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{551} = (a+b+c) = d_1 = d_{1,\,1}$.

Relation avec les points précédents

$X_{551} = \frac{X_1+X_2}{2}$.

On a $2 = \frac{d_{551}}{s}$.

Donc $X_{551} \in (X_1X_2)$.

5.3.42 X_{560} ; quatrième point puissance

$X_{560} = \begin{pmatrix} \frac{a^5}{d_{560}} \\ \frac{b^5}{d_{560}} \\ \frac{c^5}{d_{560}} \end{pmatrix}$, avec : $d_{560} = a^5 + b^5 + c^5 = d_{5,\,1}$.

On a $d_{560} = 2\,s\,[s^4 - 10\,s^2\,r\,(r+\mathrm{R}) + 5\,r^2\,(r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]$.

5.3.43 X_{657}

$X_{657} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\,(b-c)\,(2\,a')^2}{d_{657}} \\ \frac{b^2\,(c-a)\,(2\,b')^2}{d_{657}} \\ \frac{c^2\,(a-b)\,(2\,c')^2}{d_{657}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{657} = -(b-c)\,(c-a)\,(a-b)\,[(a^2+b^2+c^2) - 2\,(b\,c+c\,a+a\,b)] = d_7\,\mathrm{D}$.

Relations avec les points précédents

$X_{657} = \frac{A_{1,\,657}\,X_1 + A_{2,\,657}\,X_2 + A_{3,\,657}\,X_3}{\{s^4+2\,S^2\,[r\,(r-10\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}\,(r+4\,\mathrm{R})}$
$= \frac{-4\,s^2\,[s^2-(r+\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,(2\,r-\mathrm{R})\,X_{59} + [3\,s^2-(r+4\,\mathrm{R})^2]^2\,r\,X_{101}}{\{s^4+2\,S^2\,[r\,(r-10\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}\,(r+4\,\mathrm{R})}$, avec :

$A_{1,\,657} = s^2\,(3\,r - 8\,\mathrm{R}) + 2\,s^2\,[r^2\,(3\,r+7\,\mathrm{R}) + 4\,(3\,r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]$
$+ r\,\{r\,[3\,r^2\,(r+2\,\mathrm{R}) - 16\,(r+3\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] - 32\,\mathrm{R}^4\}$
$A_{2,\,657} = 6\,\{2\,s^4 - s^2\,[3\,r\,(r+6\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2]\}$
$+ r\,[-r^2\,(5\,r+8\,\mathrm{R}) + 24\,(r+2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R}\}$
$A_{3,\,657} = -2\{s^4\,r + 2\,s^2\,r^2\,(r+2\,\mathrm{R}) + r^2\,[r^2\,(r-20\,\mathrm{R}) - 80\,(r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\}$

On a $\{s^4 + 2\,S^2\,[r\,(r-10\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2] + r\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}\,(r+4\,\mathrm{R}) = -\frac{d_{657}\,\mathrm{D}}{16\,r^3}$

Donc $X_{657} \in (X_{59}X_{101})$

5.3.44 X_{1001} ; milieu du segment $[X_1X_9] \equiv [IM]$

$$X_{1001} = \begin{pmatrix} \frac{a\,[a^2-a\,(b+c)-2\,b\,c]}{d_{1001}} \\ \frac{b\,[b^2-b\,(c+a)-2\,c\,a]}{d_{1001}} \\ \frac{c\,[c^2-c\,(a+b)-2\,a\,b]}{d_{1001}} \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$d_{1001} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 6\,a\,b\,c = d_{390}$
$= d_{3,1} - d_{3,2} - 6\,d_{3,3} = d_1\,d'_{1001}$ et $d'_{1001} = (a^2+b^2+c^2) - 2\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$= d'_{390} = -d_7 = d_{2,1} - 2\,d_{2,2}$.

Relations avec les points précédents

$X_{1001} = \frac{\mathrm{R}\,X_1+3\,\mathrm{R}\,X_2+r\,X_3}{r+4\,\mathrm{R}} = \frac{[s^2+r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_1-[s^2-r\,(r+4\,\mathrm{R})]\,X_6}{2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})} = \frac{X_1+X_9}{2}$
$= \frac{3\,(r+\mathrm{R})\,X_2-(2\,r-\mathrm{R})\,X_{11}}{r+4\,\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}\,X_7+(2\,r+3\,\mathrm{R})\,X_{21}}{2\,(r+2\,\mathrm{R})}$.

On a $r + 4\,\mathrm{R} = -\frac{d_{1001}}{8\,s\,r} = -\frac{d'_{1001}}{4\,r}$.

Donc $X_{1001} \in (X_1X_6)$, $X_{1001} \in (X_1X_9)$, $X_{1001} \in (X_2X_{11})$,
$X_{1001} \in (X_7X_{21})$.

5.3.45 X_{1113} première intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (la plus proche de X_4)

$$X_{1113} = \begin{pmatrix} \frac{(\mathrm{J}-1)\,a^2\,q_1+q_2\,q_3}{d_{1113}} \\ \frac{(\mathrm{J}-1)\,b^2\,q_2+q_3\,q_1}{d_{1113}} \\ \frac{(\mathrm{J}-1)\,c^2\,q_3+q_1\,q_2}{d_{1113}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } d_{1113} = \mathrm{J}\,d_3 = \mathrm{J}\,(-d_{4,1} + 2\,d_{4,3}).$$

Remarque : On a $||\overrightarrow{OH}|| = \mathrm{J}\,\mathrm{R}$ et $X_{1113} = \frac{3\,\mathrm{R}\,X_2+(||\overrightarrow{OH}||-3\,\mathrm{R})\,X_3}{||\overrightarrow{OH}||}$.

Relations avec les points précédents

$X_{1113} = \frac{3\,X_2+(\mathrm{J}-3)\,X_3}{\mathrm{J}} = \frac{3\,(\mathrm{J}-1)\,X_2-(\mathrm{J}-3)\,X_4}{2\,\mathrm{J}} = \frac{(\mathrm{J}-1)\,X_3+X_4}{\mathrm{J}}$.

On a $\mathrm{J} = \frac{d_{1113}}{16\,s^2\,r^2}$.

Donc $X_{1113} \in (X_2X_3)$, $X_{1113} \in (X_2X_4)$, $X_{1113} \in (X_3X_4)$.

On peut vérifier que X_{1113} est la première intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (cf. ci-après) (la plus proche de X_4).

5.3.46 X_{1114} seconde intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (la moins proche de X_4)

$X_{1114} = \begin{pmatrix} \frac{(\mathrm{J}+1)\, a^2\, q_1 - q_2\, q_3}{d_{1114}} \\ \frac{(\mathrm{J}+1)\, b^2\, q_2 - q_3\, q_1}{d_{1114}} \\ \frac{(\mathrm{J}+1)\, c^2\, q_3 - q_1\, q_2}{d_{1114}} \end{pmatrix}$, avec :
$d_{1114} = \mathrm{J}\, d_3 = d_{1113} = \mathrm{J}\,(-d_{4,\,1} + 2\, d_{4,\,3})$.

Remarque : On a $||\overrightarrow{OH}|| = \mathrm{J}\,\mathrm{R}$ et $X_{1114} = \frac{-3\,\mathrm{R}\, X_2 + (||\overrightarrow{OH}|| + 3\,\mathrm{R})\, X_3}{||\overrightarrow{OH}||}$.

Relations avec les points précédents

$X_{1114} = \frac{-3\, X_2 + (\mathrm{J}+3)\, X_3}{\mathrm{J}} = \frac{3\,(\mathrm{J}+1)\, X_2 - (\mathrm{J}+3)\, X_4}{2\,\mathrm{J}} = \frac{(\mathrm{J}+1)\, X_3 - X_4}{\mathrm{J}}$.

On a $\mathrm{J} = \frac{d_{1114}}{16\, s^2\, r^2}$.

Donc $X_{1114} \in (X_2 X_3)$, $X_{1114} \in (X_2 X_4)$, $X_{1114} \in (X_3 X_4)$.

On peut vérifier que X_{1114} est la seconde intersection de la ligne d'Euler avec le cercle circonscrit (cf. ci-après) (la moins proche de X_4).

6 Vecteurs et distances entre points quelconques ou entre quelques points particuliers du triangle

Considérons deux vecteurs quelconques :

$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, avec $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, avec :
$w_1 + w_2 + w_3 = 0$ (la somme des trois coordonnées aréolaires d'un vecteur est nulle) et considérons la forme bilinéaire symétrique :

$\delta(\vec{V},\, \vec{W}) \triangleq \frac{1}{2}\,(q_1\, v_1\, w_1 + q_2\, v_2\, w_2 + q_3\, v_3\, w_3)$. On a :

$\delta(\vec{V},\, \vec{W}) = -\frac{1}{2}\,[a^2\,(v_2\, w_3 + v_3\, w_2) + b^2\,(v_3\, w_1 + v_1\, w_3) + c^2\,(v_1\, w_2 + v_2\, w_1)]$.

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont orthogonaux ($\vec{V} \perp \vec{W}$) ssi $\delta(\vec{V},\, \vec{W}) = 0$.

Considérons la forme quadratique :

$\delta(\vec{V},\, \vec{V}) \triangleq \frac{1}{2}\,(q_1\, v_1^2 + q_2\, v_2^2 + q_3\, v_3^2)$. Alors $||\vec{V}|| \triangleq \sqrt{\delta(\vec{V},\, \vec{V})}$.

Soient P et Q deux points quelconques du triangle. On a (rappel) :

$P = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} x_1(Q) \\ x_2(Q) \\ x_3(Q) \end{pmatrix}$.

Posons $\vec{V} = \overrightarrow{PQ}$. On a $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, avec :

$v_1 = x_1(Q) - x_1(P)$, $v_2 = x_2(Q) - x_2(P)$, $v_3 = x_3(Q) - x_3(P)$ et donc on a bien $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

On a $||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{\delta(\overrightarrow{PQ},\, \overrightarrow{PQ})}$
$= \sqrt{\frac{1}{2}\,\{q_1\,[x_1(Q) - x_1(P)]^2 + q_2\,[x_2(Q) - x_2(P)]^2 + q_3\,[x_3(Q) - x_3(P)]^2\}}$.

On fait de même pour calculer la distance entre deux points quelconques ou particuliers du triangle.

Par exemple on trouve :

$\tilde{a} \triangleq ||\overrightarrow{\tilde{B}\tilde{C}}|| = 2\,a$, $\tilde{b} \triangleq ||\overrightarrow{\tilde{C}\tilde{A}}|| = 2\,b$, $\tilde{c} \triangleq ||\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}|| = 2\,c$.

$\bar{a} \triangleq ||\overrightarrow{\bar{B}\bar{C}}|| = \frac{2\,a^3\,b\,c}{q_2\,q_3},\ \bar{b} \triangleq ||\overrightarrow{\bar{C}\bar{A}}|| = \frac{2\,b^3\,c\,a}{q_3\,q_1},\ \bar{c} \triangleq ||\overrightarrow{\bar{A}\bar{B}}|| = \frac{2\,c^3\,a\,b}{q_1\,q_2}.$

$\hat{a} \triangleq ||\overrightarrow{\hat{B}\hat{C}}|| = \sqrt{\frac{-a^2+3\,b^2+3\,c^2+4\,\sqrt{3}\,\Delta}{2}},$
$\hat{b} \triangleq ||\overrightarrow{\hat{C}\hat{A}}|| = \sqrt{\frac{-b^2+3\,c^2+3\,a^2+4\,\sqrt{3}\,\Delta}{2}},$
$\hat{c} \triangleq ||\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}|| = \sqrt{\frac{-c^2+3\,a^2+3\,b^2+4\,\sqrt{3}\,\Delta}{2}}.$

$\breve{a} \triangleq ||\overrightarrow{\breve{B}\breve{C}}|| = \sqrt{\frac{-a^2+3\,b^2+3\,c^2-4\,\sqrt{3}\,\Delta}{2}},$
$\breve{b} \triangleq ||\overrightarrow{\breve{C}\breve{A}}|| = \sqrt{\frac{-b^2+3\,c^2+3\,a^2-4\,\sqrt{3}\,\Delta}{2}},$
$\breve{c} \triangleq ||\overrightarrow{\breve{A}\breve{B}}|| = \sqrt{\frac{-c^2+3\,a^2+3\,b^2-4\,\sqrt{3}\,\Delta}{2}}.$

$||\overrightarrow{I_b I_c}|| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4-2\,a^3\,b-2\,a^3\,c+4\,a^2\,b\,c+2\,a\,b^3-2\,a\,b^2\,c-2\,a\,b\,c^2+2\,a\,c^3-b^4+2\,b^2\,c^2-c^4}{b\,c}},$
$||\overrightarrow{I_c I_a}|| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^4-2\,b^3\,c-2\,b^3\,a+4\,b^2\,c\,a+2\,b\,c^3-2\,b\,c^2\,a-2\,b\,c\,a^2+2\,b\,a^3-c^4+2\,c^2\,a^2-a^4}{c\,a}},$
$||\overrightarrow{I_a I_b}|| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^4-2\,c^3\,a-2\,c^3\,b+4\,c^2\,a\,b+2\,c\,a^3-2\,c\,a^2\,b-2\,c\,a\,b^2+2\,c\,b^3-a^4+2\,a^2\,b^2-b^4}{a\,b}}.$

6.1 Calcul de l'angle de deux vecteurs

On pourra consulter [3] [152] où l'auteur définit la mesure de l'angle de deux vecteurs par un couple de scalaires qui représente un point de la droite projective et où la tangente de cet angle n'est définie que dans un cas particulier.

Rappel : $(\vec{V},\, \vec{W})$ représente l'angle des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

Soit $\vec{V} \times \vec{W} \triangleq v_1\,w_2 - v_2\,w_1$. Alors un remarque que :
$\vec{V} \times \vec{W} = v_1\,w_2 - v_2\,w_1 = v_2\,w_3 - v_3\,w_2 = v_3\,w_1 - v_1\,w_3$.

En effet $v_1\,w_2 - v_2\,w_1 = v_1\,(-w_3 - w_1) + (v_3 + v_1)\,w_1 = v_3\,w_1 - v_1\,w_3$
$= v_3\,(-w_2 - w_3) + (v_2 + v_3)\,w_3 = v_2\,w_3 - v_3\,w_2$.

Alors $\tan(\vec{V},\, \vec{W}) = \frac{2\,\Delta\,\vec{V}\times\vec{W}}{\delta(\vec{V},\,\vec{W})}$.

On remarque que si $\vec{V} \perp \vec{W}$ on a $\delta(\vec{V},\, \vec{W}) = 0$ et on trouve bien $\tan(\vec{V},\, \vec{W}) = \infty$.

152. pp. 87-91 §2 "Angle entre deux vecteurs" et p. 117

7 Équations de quelques droites, axes ou lignes, en coordonnées aréolaires

On pourra consulter [3] [153].

Soit $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (rappel $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) le point courant du plan du triangle ABC.

Ce point appartient à une droite (D) ssi :

$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 = 0$ [il s'agit donc d'*une* équation de la droite (D)] ou, bien entendu :

$\bar{u}_1\, x_1 + \bar{u}_2\, x_2 + \bar{u}_2\, x_3 = 0$, avec $\bar{u}_1 = \lambda\, u_1$, $\bar{u}_2 = \lambda\, u_2$, $\bar{u}_3 = \lambda\, u_3$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ [il s'agit donc d'une infinité d'équations de la droite (D)].

Remarque : Comme $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ il y a beaucoup d'autres équations possibles pour la droite (D) : par exemple $(u_1 - u_2)\, x_2 + (u_1 - u_3)\, x_3 = u_1$.

Un vecteur $\vec{V}$ qui donne la direction de la droite (D) est :

$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} u_2 - u_3 \\ -u_1 + u_3 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$. Et on a bien $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Soit $\vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -q_2 & q_3 \\ q_1 & 0 & -q_3 \\ -q_1 & q_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (q_2 + q_3)\, u_1 - q_3\, u_2 - q_2\, u_3 \\ -q_3\, u_1 + (q_3 + q_1)\, u_2 - q_1\, u_3 \\ -q_2\, u_1 - q_1\, u_2 + (q_1 + q_2)\, u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\, a^2\, u_1 - q_3\, u_2 - q_2\, u_3 \\ -q_3\, u_1 + 2\, b^2\, u_2 - q_1\, u_3 \\ -q_2\, u_1 - q_1\, u_2 + 2\, c^2\, u_3 \end{pmatrix}$.

Alors le vecteur $\vec{W}$ est orthogonal au vecteur $\vec{V}$ et donne donc la direction perpendiculaire à la droite (D) ; en effet on vérifie que :

$\delta(\vec{V}, \vec{W}) \triangleq \frac{1}{2}\, (q_1\, v_1\, w_1 + q_2\, v_2\, w_2 + q_3\, v_3\, w_3) = 0$.

Soient deux droites (D) et $(D^{'})$ d'équations respectives :
$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 = 0$ et $u_1^{'}\, x_1 + u_2^{'}\, x_2 + u_3^{'}\, x_3 = 0$
et $\vec{V}'$ et $\vec{W}'$ les vecteurs attachés à la droite $(D^{'})$ comme les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ le sont à la droite (D).

153. pp. 36-38 § 2 "Droites du plan affine"

• Les droites (D) et $(D^{'})$ sont parallèles ssi :

$u_1\, v_1^{'} + u_2\, v_2^{'} + u_3\, v_3^{'} = 0$ [3] [154].

• Lorsque les droites (D) et $(D^{'})$ ne sont pas parallèles i.e. lorsque $u_1\, v_1^{'} + u_2\, v_2^{'} + u_3\, v_3^{'} \neq 0$ leur intersection est le point :

$$\begin{pmatrix} \frac{u_2\, u_3^{'} - u_3\, u_2^{'}}{u_1\, v_1^{'} + u_2\, v_2^{'} + u_3\, v_3^{'}} \\ \frac{u_3\, u_1^{'} - u_1\, u_3^{'}}{u_1\, v_1^{'} + u_2\, v_2^{'} + u_3\, v_3^{'}} \\ \frac{u_1\, u_2^{'} - u_2\, u_1^{'}}{u_1\, v_1^{'} + u_2\, v_2^{'} + u_3\, v_3^{'}} \end{pmatrix}$$

• Les droites (D) et $(D^{'})$ sont perpendiculaires ssi les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont orthogonaux ou si les vecteurs $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ le sont i. e. ssi :

$q_1\, v_1\, v_1^{'} + q_2\, v_2\, v_2^{'} + q_3\, v_3\, v_3^{'} = 0$ ou $q_1\, w_1\, w_1^{'} + q_2\, w_2\, w_2^{'} + q_3\, w_3\, w_3^{'} = 0$ (on peut vérifier que ces deux conditions sont équivalentes).

⋄ Si la droite (D) passe par les points P et Q on note $(D) \triangleq (PQ)$ et on a :

$u_1 = x_2(P)\, x_3(Q) - x_3(P)\, x_2(Q)$,
$u_2 = x_3(P)\, x_1(Q) - x_1(P)\, x_3(Q)$,
$u_3 = x_1(P)\, x_2(Q) - x_2(P)\, x_1(Q)$.

⋄ Si la droite (D) passe par le point P et à pour vecteur directeur $\vec{V}$ on note $(D) \triangleq (P, \vec{V})$ et on a :

$u_1 = x_2(P)\, v_3 - x_3(P)\, v_2$,
$u_2 = x_3(P)\, v_1 - x_1(P)\, v_3$,
$u_3 = x_1(P)\, v_2 - x_2(P)\, v_1$.

Exemple 1 : droite (BC). On a $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$; donc :

$(BC)\ :\ x_1 = 0$.

Exemple 2 : droite (AH). On a $u_1 = 0$, $u_2 = -\frac{q_1\, q_2}{S}$, $u_3 = \frac{q_3\, q_1}{S}$ ou, avec $\lambda = \frac{S}{q_1}$: $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = -q_2$, $\bar{u}_3 = q_3$; donc :

$(AH)\ :\ -q_2\, x_2 + q_3\, x_3 = 0$.

Exemple 3 : droite $(J_2 J_3)$. On a $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{a\, c}{2\, b'\, c'}$, $u_3 = \frac{a\, b}{2\, b'\, c'}$ ou, avec $\lambda = \frac{2\, b^{'}\, c^{'}}{a}$: $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = c$, $\bar{u}_3 = b$; donc :

$(J_2 J_3)\ :\ c\, x_2 + b\, x_3 = 0$.

154. p. 37

7.1 Équations de quelques droites quelconques

$$\begin{aligned}
(P_{BA}P_{CA}) &: [1-x_1(P)]\,x_1 - x_1(P)\,x_2 - x_1(P)\,x_3 = 0,\\
(P_{CB}P_{AB}) &: -x_2(P)\,x_1 + [1-x_2(P)]\,x_2 - x_2(P)\,x_3 = 0,\\
(P_{AC}P_{BC}) &: -x_3(P)\,x_1 - x_3(P)\,x_2 + [1-x_3(P)]\,x_3 = 0,
\end{aligned}$$

7.2 Équations de quelques droites particulières

7.2.1 Équations de quelques céviennes du triangle ABC

Cotés du triangle ABC

$$\begin{aligned}
(BC) &: x_1 = 0,\\
(CA) &: x_2 = 0,\\
(AB) &: x_3 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tan(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}) = \tan(\alpha) = \tfrac{4\,\Delta}{q_1},\\
&\tan(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{BA}) = \tan(\beta) = \tfrac{4\,\Delta}{q_2},\\
&\tan(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{CB}) = \tan(\gamma) = \tfrac{4\,\Delta}{q_3}.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le premier point de Brocard Ω

$$\begin{aligned}
(A\Omega) &: -c^2\,x_2 + a^2\,x_3 = 0,\\
(B\Omega) &: b^2\,x_1 - a^2\,x_3 = 0,\\
(C\Omega) &: -b^2\,x_1 + c^2\,x_2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\tan(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{A\Omega}) = \tan(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{B\Omega}) = \tan(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{C\Omega}) = \tan(\omega) = \tfrac{4\,\Delta}{d_6}.$$

Céviennes passant par le deuxième point de Brocard $\Omega^{'}$

$$\begin{aligned}
(A\Omega^{'}) &: -a^2\,x_2 + b^2\,x_3 = 0,\\
(B\Omega^{'}) &: c^2\,x_1 - b^2\,x_3 = 0,\\
(C\Omega^{'}) &: -c^2\,x_1 + a^2\,x_2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tan(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{A\Omega^{'}}) = \tan(\alpha-\omega) = \tfrac{4\,a^2\,\Delta}{-a^4+a^2\,(b^2+c^2)+2\,b^2\,c^2},\\
&\tan(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{B\Omega^{'}}) = \tan(\beta-\omega) = \tfrac{4\,b^2\,\Delta}{-b^4+b^2\,(c^2+a^2)+2\,c^2\,a^2},\\
&\tan(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{C\Omega^{'}}) = \tan(\gamma-\omega) = \tfrac{4\,c^2\,\Delta}{-c^4+c^2\,(a^2+b^2)+2\,a^2\,b^2}.
\end{aligned}$$

Céviennes passant par le centre du cercle inscrit I : bissectrices du triangle ABC

$$\begin{aligned}
(AI) &: -c\,x_2 + b\,x_3 = 0,\\
(BI) &: c\,x_1 - a\,x_3 = 0,\\
(CI) &: -b\,x_1 + a\,x_2 = 0.
\end{aligned}$$

$\tan(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AI}) = \tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{4\,\Delta}{q_1+2\,b\,c}$,
$\tan(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{BI}) = \tan(\frac{\beta}{2}) = \frac{4\,\Delta}{q_2+2\,c\,a}$,
$\tan(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{CI}) = \tan(\frac{\gamma}{2}) = \frac{4\,\Delta}{q_3+2\,a\,b}$.

Céviennes passant par le centre de gravité G : médianes du triangle ABC

On pourra consulter [3] [155].

$(AG)\ :\ -x_2 + x_3 = 0$,
$(BG)\ :\ x_1 - x_3 = 0$,
$(CG)\ :\ -x_1 + x_2 = 0$.

$\tan(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AG}) = \frac{4\,\Delta}{-a^2+b^2+3\,c^2}$,
$\tan(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{BG}) = \frac{4\,\Delta}{-b^2+c^2+3\,a^2}$,
$\tan(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{CG}) = \frac{4\,\Delta}{-c^2+a^2+3\,b^2}$.

Céviennes passant par le centre du cercle circonscrit 0

$(AO)\ :\ -c^2\,q_3\,x_2 + b^2\,q_2\,x_3 = 0$,
$(BO)\ :\ c^2\,q_3\,x_1 - a^2\,q_1\,x_3 = 0$,
$(CO)\ :\ -b^2\,q_2\,x_1 + a^2\,q_1\,x_2 = 0$.

$\tan(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AO}) = \cot(\gamma) = \frac{q_3}{4\,\Delta}$,
$\tan(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{BO}) = \cot(\alpha) = \frac{q_1}{4\,\Delta}$,
$\tan(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{CO}) = \cot(\beta) = \frac{q_2}{4\,\Delta}$.

Céviennes passant par l'orthocentre H : hauteurs du triangle ABC

On pourra consulter [3] [156].

$(AH)\ :\ -q_2\,x_2 + q_3\,x_3 = 0$,
$(BH)\ :\ q_1\,x_1 - q_3\,x_3 = 0$,
$(CH)\ :\ -q_1\,x_1 + q_2\,x_2 = 0$.

$\tan(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AH}) = \frac{q_2}{4\,\Delta}$,
$\tan(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{BH}) = \frac{q_3}{4\,\Delta}$,
$\tan(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{CH}) = \frac{q_1}{4\,\Delta}$.

Céviennes passant par le centre du cercle d'Euler N

155. pp. 108-109 § 1 "Les médianes et le barycentre"
156. pp. 110-111 § 3 "Les hauteurs et l'orthocentre"

$(AN)\ :\ -(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_2+(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_3=0,$
$(BN)\ :\ (\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_1-(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_3=0,$
$(CN)\ :\ -(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_1+(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_2=0.$

Céviennes passant par le point symédian K

$(AK)\ :\ -c^2\,x_2+b^2\,x_3=0,$
$(BK)\ :\ c^2\,x_1-a^2\,x_3=0,$
$(CK)\ :\ -b^2\,x_1+a^2\,x_2=0.$

Céviennes passant par le point de Gergonne Ge

$(AGe)\ :\ -(2\,b)'\,x_2+(2\,c)'\,x_3=0,$
$(BGe)\ :\ (2\,a)'\,x_1-(2\,c)'\,x_3=0,$
$(CGe)\ :\ -(2\,a)'\,x_1+(2\,b)'\,x_2=0.$

Céviennes passant par le point de Nagel Na

$(ANa)\ :\ -(2\,c^{'})\,x_2+(2\,b^{'})\,x_3=0,$
$(BNa)\ :\ (2\,c^{'})\,x_1-(2\,a^{'})\,x_3=0,$
$(CNa)\ :\ -(2\,b^{'})\,x_1+(2\,a^{'})\,x_2=0.$

Céviennes passant par le "Mittenpunk" M

$(AM)\ :\ -c\,(2\,c^{'})\,x_2+b\,(2\,b^{'})\,x_3=0,$
$(BM)\ :\ c\,(2\,c^{'})\,x_1-a\,(2\,a^{'})\,x_3=0,$
$(CM)\ :\ -b\,(2\,b^{'})\,x_1+a\,(2\,a^{'})\,x_2=0.$

Céviennes passant par le point de Spieker Sp

$(ASp)\ :\ -(a+b)\,x_2+(c+a)\,x_3=0,$
$(BSp)\ :\ (a+b)\,x_1-(b+c)\,x_3=0,$
$(CSp)\ :\ -(c+a)\,x_1+(b+c)\,x_2=0.$

Céviennes passant par le point de Feuerbach F

$(AF)\ :\ -(2\,c^{'})\,(a-b)^2\,x_2+(2\,b^{'})\,(c-a)^2\,x_3=0,$
$(BF)\ :\ (2\,c^{'})\,(a-b)^2\,x_1-(2\,a^{'})\,(b-c)^2\,x_3=0,$
$(CF)\ :\ -(2\,b^{'})\,(c-a)^2\,x_1+(2\,a^{'})\,(b-c)^2\,x_2=0.$

7.2.2 Équations des cotés de quelques triangles

Triangle $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$

$(\tilde{B}\tilde{C})\ :\ x_2+x_3=0,$
$(\tilde{C}\tilde{A})\ :\ x_1+x_3=0,$
$(\tilde{A}\tilde{B})\ :\ x_1+x_2=0.$

Triangle $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$$
\begin{aligned}
(\bar{B}\bar{C}) &: c^2\,x_2 + b^2\,x_3 = 0,\\
(\bar{C}\bar{A}) &: c^2\,x_1 + a^2\,x_3 = 0,\\
(\bar{A}\bar{B}) &: b^2\,x_1 + a^2\,x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Triangle $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$

$$
\begin{aligned}
(\hat{B}\hat{C}) &: (4\,\Delta - \sqrt{3}\,q_1)\,x_1 + 2\,(4\,\Delta + \sqrt{3}\,c^2)\,x_2 + 2\,(4\,\Delta + \sqrt{3}\,b^2)\,x_3 = 0,\\
(\hat{C}\hat{A}) &: 2\,(4\,\Delta + \sqrt{3}\,c^2)\,x_1 + (4\,\Delta - \sqrt{3}\,q_2)\,x_2 + 2\,(4\,\Delta + \sqrt{3}\,a^2)\,x_3 = 0,\\
(\hat{A}\hat{B}) &: +2\,(4\,\Delta + \sqrt{3}\,b^2)\,x_1 + 2\,(4\,\Delta + \sqrt{3}\,a^2)\,x_2 + (4\,\Delta - \sqrt{3}\,q_3)\,x_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Triangle $\check{A}\check{B}\check{C}$

$$
\begin{aligned}
(\check{B}\check{C}) &: (4\,\Delta + \sqrt{3}\,q_1)\,x_1 + 2\,(4\,\Delta - \sqrt{3}\,c^2)\,x_2 + 2\,(4\,\Delta - \sqrt{3}\,b^2)\,x_3 = 0,\\
(\check{C}\check{A}) &: 2\,(4\,\Delta - \sqrt{3}\,c^2)\,x_1 + (4\,\Delta + \sqrt{3}\,q_2)\,x_2 + 2\,(4\,\Delta - \sqrt{3}\,a^2)\,x_3 = 0,\\
(\check{A}\check{B}) &: +2\,(4\,\Delta - \sqrt{3}\,b^2)\,x_1 + 2\,(4\,\Delta - \sqrt{3}\,a^2)\,x_2 + (4\,\Delta + \sqrt{3}\,q_3)\,x_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Triangle de contact $I_aI_bI_c$

$$
\begin{aligned}
(I_bI_c) &: -a^{'}\,x_1 + b^{'}\,x_2 + c^{'}\,x_3 = 0,\\
(I_cI_a) &: a^{'}\,x_1 - b^{'}\,x_2 + c^{'}\,x_3 = 0,\\
(I_aI_b) &: a^{'}\,x_1 + b^{'}\,x_2 - c^{'}\,x_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Triangle excentral $J_1J_2J_3$

$$
\begin{aligned}
(J_2J_3) &: c\,x_2 + b\,x_3 = 0,\\
(J_3J_1) &: c\,x_1 + a\,x_3 = 0,\\
(J_1J_2) &: b\,x_1 + a\,x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Triangle orthique $H_aH_bH_c$

$$
\begin{aligned}
(H_bH_c) &: -q_1\,x_1 + q_2\,x_2 + q_3\,x_3 = 0,\\
(H_cH_a) &: q_1\,x_1 - q_2\,x_2 + q_3\,x_3 = 0,\\
(H_aH_b) &: q_1\,x_1 + q_2\,x_2 - q_3\,x_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Triangle d'Euler $E_1E_2E_3$

$$
\begin{aligned}
(E_2E_3) &: (\mathrm{S} + 2\,a^2\,q_1)\,x_1 - q_2\,q_3\,x_2 - q_2\,q_3\,x_3 = 0,\\
(E_3E_1) &: -q_3\,q_1\,x_1 + (\mathrm{S} + 2\,b^2\,q_2)\,x_2 - q_3\,q_1\,x_3 = 0,\\
(E_1E_2) &: -q_1\,q_2\,x_1 - q_1\,q_2\,x_2 + (\mathrm{S} + 2\,c^2\,q_3)\,x_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Triangle $K_{AB}K_{BC}K_{CA}$

$(K_{BC}K_{CA})$: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)\,x_1 + c^2\,a^2\,x_2 - a^2\,(a^2+b^2)\,x_3 = 0$,
$(K_{CA}K_{AB})$: $-b^2\,(b^2+c^2)\,x_1 + (b^2+c^2)(c^2+a^2)\,x_2 + a^2\,b^2\,x_3 = 0$,
$(K_{AB}K_{BC})$: $b^2\,c^2\,x_1 - c^2\,(c^2+a^2)\,x_2 + (c^2+a^2)(a^2+b^2)\,x_3 = 0$.

Triangle $K_{AC}K_{BA}K_{CB}$

$(K_{BA}K_{CB})$: $(b^2+c^2)(c^2+a^2)\,x_1 - a^2\,(c^2+a^2)\,x_2 + a^2\,b^2\,x_3 = 0$,
$(K_{CB}K_{AC})$: $b^2\,c^2\,x_1 + (c^2+a^2)(a^2+b^2)\,x_2 - b^2\,(a^2+b^2)\,x_3 = 0$,
$(K_{AC}K_{BA})$: $-c^2\,(b^2+c^2)\,x_1 + c^2\,a^2\,x_2 + (a^2+b^2)(b^2+c^2)\,x_3 = 0$.

Triangle $K^*_{BA}K^*_{CB}K^*_{AC}$

$(K^*_{CB}K^*_{AC})$: $q_3\,q_1\,x_1 + 4\,c^2\,a^2\,x_2 - 2\,a^2\,q_3\,x_3 = 0$,
$(K^*_{AC}K^*_{BA})$: $-2\,b^2\,q_1\,x_1 + q_1\,q_2\,x_2 + 4\,a^2\,b^2\,x_3 = 0$,
$(K^*_{BA}K^*_{CB})$: $4\,b^2\,c^2\,x_1 - 2\,c^2\,q_2\,x_2 + q_2\,q_3\,x_3 = 0$.

Triangle $K^*_{CA}K^*_{AB}K^*_{BC}$

$(K^*_{AB}K^*_{BC})$: $q_1\,q_2\,x_1 - 2\,a^2\,q_2\,x_2 + 4\,a^2\,b^2\,x_3 = 0$,
$(K^*_{BC}K^*_{CA})$: $4\,b^2\,c^2\,x_1 + q_2\,q_3\,x_2 - 2\,b^2\,q_3\,x_3 = 0$,
$(K^*_{CA}K^*_{AB})$: $-2\,c^2\,q_1\,x_1 + 4\,c^2\,a^2\,x_2 + q_3\,q_1\,x_3 = 0$.

7.2.3 Équations des droites L_i

À tout point X_i on associe la droite L_i d'équation :

$\frac{x_1(X_i)}{a^2}\,x_1 + \frac{x_2(X_i)}{b^2}\,x_2 + \frac{x_3(X_i)}{c^2}\,x_3 = 0$ [3] [5].

Particularités de certaines de ces droites

Droite L_1. $L_1 \perp (X_1X_3)$, (X_4X_8), (X_5X_{10}).

Droite L_2, droite ou axe de Lemoine. $L_2 \perp (X_2X_{51})$, (X_3X_6), (X_4X_{69}), $(X_{66}X_{68})$.

Droite L_3, axe orthique. $L_3 \perp (X_1X_{79})$, (X_2X_3), $(X_{11}X_{36})$, $(X_{12}X_{35})$, $(X_{13}X_{15})$, $(X_{14}X_{16})$, $(X_{64}X_{68})$.

Droite L_4. $L_4 \perp (X_3X_{64})$, (X_4X_{51}).

Droite L_5. $L_5 \perp (X_3X_{49})$, (X_4X_{52}).

Droite L_6, droite de l'infini. Elle est perpendiculaire à toute droite.

Droite L_7. $L_7 \perp (X_3X_{101})$.

Droite L_8. $L_8 \perp (X_{40}X_{43})$.

Droite L_9. $L_9 \perp (X_1X_3)$, (X_4X_8), (X_5X_{10}).

Droite L_{10}. $L_{10} \perp (X_3X_{31})$.

Droite L_{13}. $L_{13} \perp (X_3X_{74}), (X_4X_{94})$.

Droite L_{14}. $L_{14} \perp (X_3X_{74}), (X_4X_{94})$.

Droite L_{15}. $L_{15} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{16}. $L_{16} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{17}. $L_{17} \perp (X_3X_{54}), (X_4X_{93}), (X_5X_{51})$.

Droite L_{18}. $L_{18} \perp (X_3X_{54}), (X_4X_{93}), (X_5X_{51})$.

Droite L_{19}. $L_{19} \perp (X_1X_{84}), (X_4X_{65}), (X_{40}X_{64})$.

Droite L_{22}. $L_{22} \perp (X_4X_{83})$.

Droite L_{24}. $L_{24} \perp (X_4X_{54})$.

Droite L_{25}. $L_{25} \perp (X_3X_{66}), (X_4X_6), (X_{20}X_{64}), (X_{67}X_{74})$.

Droite L_{31}. $L_{31} \perp (X_1X_7), (X_4X_9)$.

Droite L_{32}. $L_{32} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{33}. $L_{33} \perp (X_1X_{64})$.

Droite L_{34}. $L_{34} \perp (X_1X_{84}), (X_4X_{65}), (X_{40}X_{64})$.

Droite L_{37}. $L_{37} \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.

Droite L_{39}. $L_{39} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{41}. $L_{41} \perp (X_1X_4), (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), (X_{36}X_{80})$.

Droite L_{42}. $L_{42} \perp (X_1X_7), (X_4X_9)$.

Droite L_{44}. $L_{44} \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.

Droite L_{45}. $L_{45} \perp (X_1X_3), (X_4X_8), (X_5X_{10})$.

Droite L_{48}. $L_{48} \perp (X_1X_4), (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), (X_{36}X_{80})$.

Droite L_{49}. $L_{49} \perp (X_3X_{70}), (X_{26}X_{68})$.

Droite L_{50}. $L_{50} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{51}. $L_{51} \perp (X_3X_{66}), (X_4X_6), (X_{20}X_{64}), (X_{67}X_{74})$.

Droite L_{52}. $L_{52} \perp (X_1X_{79}), (X_2X_3), (X_{11}X_{36}), (X_{12}X_{35}), (X_{13}X_{15}), (X_{14}X_{16}), (X_{64}X_{68})$.

Droite L_{53}. $L_{53} \perp (X_3X_{64}), (X_4X_{51})$.

Droite L_{54}. $L_{54} \perp (X_4X_{54})$.

Droite L_{55}. $L_{55} \perp (X_1X_7)$, (X_4X_9).

Droite L_{56}. $L_{56} \perp (X_1X_4)$, (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), $(X_{36}X_{80})$.

Droite L_{57}. $L_{57} \perp (X_3X_9)$, (X_4X_7), $(X_{20}X_{72})$.

Droite L_{58}. $L_{58} \perp (X_1X_{79})$, (X_2X_3), $(X_{11}X_{36})$, $(X_{12}X_{35})$, $(X_{13}X_{15})$, $(X_{14}X_{16})$, $(X_{64}X_{68})$.

Droite L_{61}. $L_{61} \perp (X_1X_{79})$, (X_2X_3), $(X_{11}X_{36})$, $(X_{12}X_{35})$, $(X_{13}X_{15})$, $(X_{14}X_{16})$, $(X_{64}X_{68})$.

Droite L_{62}. $L_{62} \perp (X_1X_{79})$, (X_2X_3), $(X_{11}X_{36})$, $(X_{12}X_{35})$, $(X_{13}X_{15})$, $(X_{14}X_{16})$, $(X_{64}X_{68})$.

Droite L_{63}. $L_{63} \perp (X_3X_{37})$, (X_4X_{75}).

Droite L_{64}. $L_{64} \perp (X_4X_{64})$.

Droite L_{65}. $L_{65} \perp (X_1X_{84})$, (X_4X_{65}), $(X_{40}X_{64})$.

Droite L_{66}. $L_{66} \perp (X_4X_{66})$, (X_6X_{64}).

Droite L_{67}. $L_{67} \perp (X_4X_{67})$, (X_6X_{74}).

Droite L_{68}. $L_{68} \perp (X_3X_{49})$, (X_4X_{52}).

Droite L_{69}. $L_{69} \perp (X_2X_{51})$, (X_3X_6), (X_4X_{69}), $(X_{66}X_{68})$.

Droite L_{70}. $L_{70} \perp (X_4X_{70})$.

Droite L_{71}. $L_{71} \perp (X_1X_7)$, (X_4X_9).

Droite L_{72}. $L_{72} \perp (X_1X_3)$, (X_4X_8), (X_5X_{10}).

Droite L_{73}. $L_{73} \perp (X_1X_4)$, (X_3X_{10}), (X_8X_{20}), $(X_{36}X_{80})$.

Droite L_{74}. $L_{74} \perp (X_4X_{74})$.

Droite L_{81}. $L_{81} \perp (X_2X_{51})$, (X_3X_6), (X_4X_{69}), $(X_{66}X_{68})$.

Droite L_{86}. $L_{86} \perp (X_2X_{51})$, (X_3X_6), (X_4X_{69}), $(X_{66}X_{68})$.

Droite L_{97}. $L_{97} \perp (X_4X_{95})$.

Droite L_{101}. $L_{101} \perp (X_1X_5)$, (X_3X_8).

Les droites L_i parallèles

• $L_1 \parallel L_9$, L_{37}, L_{44}, L_{45}, L_{72}, • $L_2 \parallel L_{69}$, L_{81}, L_{86},
• $L_3 \parallel L_{15}$, L_{16}, L_{32}, L_{39}, L_{50}, L_{52}, L_{58}, L_{61}, L_{62}, • $L_5 \parallel L_{68}$, • $L_{17} \parallel L_{18}$,
• $L_{19} \parallel L_{34}$, L_{65}, • $L_{31} \parallel L_{42}$, L_{55}, L_{71}, • $L_{41} \parallel L_{48}$, L_{56}, L_{73}, • $L_{76} \parallel L_{83}$,
• $L_{88} \parallel L_{89}$.

7.2.4 Équations de quelques droites ayant un nom particulier

Médiatrices du triangle ABC

On pourra consulter [3] [157].

$$\begin{array}{lcl} (OG_A) \equiv (OO_a) & : & (b^2 - c^2)\, x_1 + a^2\, x_2 - a^2\, x_3 = 0, \\ (OG_B) \equiv (OO_b) & : & -b^2\, x_1 + (c^2 - a^2)\, x_2 + b^2\, x_3 = 0, \\ (OG_C) \equiv (OO_c) & : & c^2\, x_1 - c^2\, x_2 + (a^2 - b^2)\, x_3 = 0. \end{array}$$

Droite ou axe de Lemoine

Il s'agit de la droite L_2.
$b^2\, c^2\, x_1 + c^2\, a^2\, x_2 + a^2\, b^2\, x_3 = 0$.
On vérifie que le point X_{187} appartient à cette droite.

Droite ou axe de orthique

Il s'agit de la droite L_3.
$q_1\, x_1 + q_2\, x_2 + q_3\, x_3 = 0$.
On vérifie que le point X_{468} appartient à cette droite.

Droite de l'infini

Il s'agit de la droite L_6.
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
On vérifie que les points X_{30} et X_{521} appartienent à cette droite.

7.2.5 Équations de quelques droites joignant deux points particuliers du triangle ABC

Équations de quelques droites $(X_1 X_i)$; $i = 2,\ 3,\ \ldots$

Droite $(X_1 X_2) \equiv (IG)$

$(b - c)\, x_1 + (c - a)\, x_2 + (a - b)\, x_3 = 0$.

On vérifie que les points $X_8 \equiv Na$, $X_{10} \equiv Sp$, X_{42}, X_{43}, X_{78} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1 X_3) \equiv (IO)$

$(2\, a')\, b\, c\, (b - c)\, x_1 + (2\, b')c\, a\, (c - a)\, x_2 + (2\, c')a\, b\, (a - b)\, x_3 = 0$.

On vérifie que les points X_{35}, X_{36}, X_{40}, X_{46}, X_{55}, X_{56}, X_{57}, X_{65} appartiennent à cette droite.

157. p. 111 § 4 “Les médiatrices”

Elle est $\perp$ à L_1, L_9, L_{37}, L_{44}, L_{45}, L_{72}.

Droite $(X_1X_4) \equiv (IH)$

$2\,a^{'}\,(b-c)\,q_1\,x_1 + 2\,b^{'}\,(c-a)\,q_2\,x_2 + 2\,c^{'}\,(a-b)\,q_3\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points X_{33}, X_{34}, X_{73} appartiennent à cette droite.

Elle est $\perp$ à L_{41}, L_{48}, L_{56}, L_{73}.

Droite $(X_1X_5) \equiv (IN)$

$(b-c)\,(q_1 - b\,c)\,(q_1 + 2\,b\,c)\,x_1 + (c-a)\,(q_2 - c\,a)\,(q_2 + 2\,c\,a)\,x_2$
$+ (a-b)\,(q_3 - a\,b)\,(q_3 + 2\,a\,b)\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points $X_{11} \equiv F$, X_{12}, X_{80} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_6) \equiv (IK)$

$(b-c)\,b\,c\,x_1 + (c-a)\,c\,a\,x_2 + (a-b)\,a\,b\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points $X_9 \equiv M$, X_{37}, X_{44}, X_{45}, X_{72} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_7) \equiv (IGe)$

$(2\,a^{'})^2\,(b-c)\,x_1 + (2\,b^{'})^2\,(c-a)\,x_2 + (2\,c^{'})^2\,(a-b)\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points $X_{20} \equiv L$, X_{77} appartiennent à cette droite.

Elle est $\perp$ à L_{31}, L_{42}, L_{55}, L_{71}.

Droite $(X_1X_{19}) \equiv (IX_{19})$

$b\,c\,(b^2 - c^2)\,q_1\,x_1 + c\,a\,(c^2 - a^2)\,q_2\,x_2 + a\,b\,(a^2 - b^2)\,q_3\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points X_{28}, X_{48} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_{21}) \equiv (ISc)$

$b\,c\,(b^2 - c^2)\,x_1 + c\,a\,(c^2 - a^2)\,x_2 + a\,b\,(a^2 - b^2)\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points X_{31}, X_{38}, X_{47}, X_{58}, X_{63}, X_{81} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_1X_{29}) \equiv (IX_{29})$

$a\,(b^2 - c^2)\,q_1^2\,x_1 + b\,(c^2 - a^2)\,q_2^2\,x_2 + c\,(a^2 - b^2)\,q_3^2\,x_2 = 0.$

On vérifie que le point X_{92} appartient à cette droite.

Droite $(X_1X_{30}) \equiv (IX_{30})$

$(q_1{+}b\,c)\,(b\,q_2{-}c\,q_3)\,x_1{+}(q_2{+}c\,a)\,(c\,q_3{-}a\,q_1)\,x_2{+}(q_3{+}a\,b)\,(a\,q_1{-}b\,q_2)\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{79} appartient à cette droite.

Droite $(X_1X_{41}) \equiv (I X_{41})$

$b\,c\,(b-c)\,[d_6 - (2\,s)\,a]\,x_1 + c\,a\,(c-a)\,[d_6 - (2\,s)\,b]\,x_2$
$+\,a\,b\,(a-b)\,[d_6 - (2\,s)\,c]\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

Droite $(X_1X_{75}) \equiv (I X_{75})$

$a\,(b^2-c^2)\,x_1 + b\,(c^2-a^2)\,x_2 + c\,(a^2-b^2)\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{86} appartient à cette droite.

Droite $(X_1X_{88}) \equiv (I X_{88})$

$b\,c\,(b-c)\,(-2\,a+b+c)\,x_1 + c\,a\,(c-a)\,(-2\,b+c+a)\,x_2$
$+\,a\,b\,(a-b)\,(-2\,c+a+b)\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_2X_i) **;** $i = 3,\ 4,\ \ldots$

Droite ou ligne d'Euler $(X_2X_3) \equiv (GO) = (X_2X_4) \equiv (GH)$

On pourra consulter [3] [158].

$(b^2-c^2)\,q_1\,x_1 + (c^2-a^2)\,q_2\,x_2 + (a^2-b^2)\,q_3\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points $X_5 \equiv N$, $X_{20} \equiv L$, $X_{21} \equiv Sc$, $X_{22} \equiv Ex$, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{26}, X_{27}, X_{28}, X_{29}, X_{30}, X_{468} appartiennent à cette droite.

Elle est $\perp$ à L_3, L_{15}, L_{16}, L_{32}, L_{39}, L_{50}, L_{52}, L_{58}, L_{61}, L_{62}.

Droite $(X_2X_6) \equiv (GK)$

$(b^2-c^2)\,x_1 + (c^2-a^2)\,x_2 + (a^2-b^2)\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points X_{69}, X_{81}, X_{86} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_2X_7) \equiv (G Ge)$

$(2\,a^{'})\,(b-c)\,x_1 + (2\,b^{'})\,(c-a)\,x_2 + (2\,c^{'})\,(a-b)\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points $X_9 \equiv M$, X_{57}, X_{63} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_2X_8) \equiv (G Na)$

158. p. 112 § 5 “La droite d'Euler”

$(2\,a^{'})\,(b-c)\,x_1 + (2\,b^{'})\,(c-a)\,x_2 + (2\,c^{'})\,(a-b)\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points $X_{10} \equiv Sp$, X_{57} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_2X_{11}) \equiv (GF)$

$$(b-c)\,(b^2+c^2-a\,b-a\,c)\,x_1 + (c-a)\,(c^2+a^2-b\,c-b\,a)\,x_2$$
$$+\,(a-b)\,(a^2+b^2-c\,a-c\,b)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{55}, X_{100} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_2X_{12}) \equiv (GX_{12})$

$$(2\,a^{'})\,(b-c)\,(a\,b+a\,c+b^2+c^2)\,x_1 + (2\,b^{'})\,(c-a)\,(b\,c+b\,a+c^2+a^2)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,(a-b)\,(c\,a+c\,b+a^2+b^2)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{56} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{13}) \equiv (GX)$

$$(b^2-c^2)\,(3\,q_1+4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_1 + (c^2-a^2)\,(3\,q_2+4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(3\,q_3+4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point $X_{16} \equiv S^{'}$ appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{14}) \equiv (GX^{'})$

$$(b^2-c^2)\,(3\,q_1-4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_1 + (c^2-a^2)\,(3\,q_2-4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(3\,q_3-4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{15} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{17}) \equiv (GX_{17})$

$$(b^2-c^2)\,(q_1+4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_1 + (c^2-a^2)\,(q_2+4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(q_3+4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{62} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{18}) \equiv (GX_{18})$

$$(b^2-c^2)\,(q_1-4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_1 + (c^2-a^2)\,(q_2-4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(q_3-4\,\sqrt{3}\,\Delta)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{61} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{32}) \equiv (GX_{32})$

$(b^4-c^4)\,x_1 + (c^4-a^4)\,x_2 + (a^4-b^4)\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{83} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{37}) \equiv (GX_{37})$

$a\,(b-c)\,x_1 + b\,(c-a)\,x_2 + c\,(a-b)\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{75} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{39}) \equiv (G\frac{\Omega+\Omega'}{2})$

$a^2\,(b^2-c^2)\,x_1 + b^2\,(c^2-a^2)\,x_2 + c^2\,(a^2-b^2)\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{76} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{44}) \equiv (GX_{44})$

$(b-c)\,[2\,(b+c)-a]\,x_1 + (c-a)\,[2\,(c+a)-b]\,x_2 + (a-b)\,[2\,(a+b)-c]\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{89} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{45}) \equiv (GX_{45})$

$(b-c)\,[b+c-2\,a]\,x_1 + (c-a)\,[c+a-2\,b]\,x_2 + (a-b)\,[a+b-2\,c]\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{88} appartient à cette droite.

Droite $(X_2X_{54}) \equiv (GX_{54})$

$(b^2-c^2)\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_1 + (c^2-a^2)\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_2$
$+ (a^2-b^2)\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points X_{68}, X_{96} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_2X_{95}) \equiv (GX_{95})$

$(b^2-c^2)\,q_1\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_1 + (c^2-a^2)\,q_2\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_2 + (a^2-b^2)\,q_3\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_3$
$= 0.$

On vérifie que le point X_{97} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_3X_i) **;** $i = 4,\, 5,\, \ldots$

Droite $(X_3X_4) \equiv (OH)$

$(b^2-c^2)\,q_1\,x_1 + (c^2-a^2)\,q_2\,x_2 + (a^2-b^2)\,q_3\,x_3 = 0.$

On vérifie que les points $X_5 \equiv N$, $X_{20} \equiv L$, X_{26} appartiennent à cette droite.

Droite ou axe ou diamètre de Brocard $(X_3X_6) \equiv (OK)$

On pourra consulter [3] [159] [8] [160].

159. p. 136
160. p. 174 “Brocard Axis”

$b^2\,c^2\,(b^2-c^2)\,x_1+c^2\,a^2\,(c^2-a^2)\,x_2+a^2\,b^2\,(a^2-b^2)\,x_3=0.$

On vérifie que les points $X_{15}\equiv S$, $X_{16}\equiv S^{'}$, X_{32}, $X_{39}\equiv \frac{1}{2}\,(\Omega+\Omega^{'})$, X_{50}, X_{52}, X_{58}, X_{61}, X_{62} appartiennent à cette droite.

Elle est $\perp$ à L_2, L_{69}, L_{81}, L_{86}.

Droite $(X_3X_8)\equiv(ONa)$

$$(b-c)\left[a^3\,(b+c)+a\,(a-b-c)\,(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2\right]x_1$$
$$+\,(c-a)\left[b^3\,(c+a)+b\,(b-c-a)\,(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2\right]x_2$$
$$+\,(a-b)\left[c^3\,(a+b)+c\,(c-a-b)\,(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2\right]x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite $(X_3X_{13})\equiv(OX)$

$$(b^2-c^2)\,(\mathrm{S}\,q_1+4\sqrt{3}\,b^2\,c^2\,\Delta)\,x_1+(c^2-a^2)\,(\mathrm{S}\,q_2+4\sqrt{3}\,c^2\,a^2\,\Delta)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(\mathrm{S}\,q_3+4\sqrt{3}\,a^2\,b^2\,\Delta)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{17} appartient à cette droite.

Droite $(X_3X_{14})\equiv(OX^{'})$

$$(b^2-c^2)\,(\mathrm{S}\,q_1-4\sqrt{3}\,b^2\,c^2\,\Delta)\,x_1+(c^2-a^2)\,(\mathrm{S}\,q_2-4\sqrt{3}\,c^2\,a^2\,\Delta)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(\mathrm{S}\,q_3-4\sqrt{3}\,a^2\,b^2\,\Delta)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{18} appartient à cette droite.

Droite $(X_3X_{54})\equiv(OX_{54})$

$$b^2\,c^2\,(b^2-c^2)\,q_1\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_1+c^2\,a^2\,(c^2-a^2)\,q_2\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_2$$
$$+\,a^2\,b^2\,(a^2-b^2)\,q_3\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{97} appartient à cette droite.

Droite $(X_3X_{63})\equiv(OX_{63})$

$$b\,c\,(b-c)\,q_2\,q_3\,x_1+c\,a\,(c-a)\,q_3\,q_1\,x_2+a\,b\,(a-b)\,q_1\,q_2\,x_3=0.$$

On vérifie que les points X_{72}, X_{78} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_3X_{76})\equiv(O\Omega^{''})$

$$a^2\,(b^2-c^2)\,(d_{32}-a^2\,d_6)\,x_1+b^2\,(c^2-a^2)\,(d_{32}-b^2\,d_6)\,x_2$$
$$+\,c^2\,(a^2-b^2)\,(d_{32}-c^2\,d_6)\,x_3=0.$$

On vérifie que les points X_{98}, X_{99} appartiennent à cette droite.

Équations de quelques droites (X_4X_i) **;** $i=5,\,6,\,\ldots$

Droite $(X_4X_6)\equiv(HK)$

$(b^2-c^2)\,q_1^2\,x_1+(c^2-a^2)\,q_2^2\,x_2+(a^2-b^2)\,q_3^2\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{53} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_8)\equiv(HNa)$

$a\,(b-c)\,q_1\,x_1+b\,(c-a)\,q_2\,x_2+c\,(a-b)\,q_3\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{72}, X_{92} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_4X_9)\equiv(HM)$

$$q_1\,[c\,(2\,c^{'})\,q_3-b\,(2\,b^{'})\,q_2]\,x_1+q_2\,[a\,(2\,a^{'})\,q_1-c\,(2\,c^{'})\,q_3]\,x_2$$
$$+\,q_3\,[b\,(2\,b^{'})\,q_2-a\,(2\,a^{'})\,q_1]\,x_3=0.$$

On vérifie que les points $X_{10}\equiv Sp$, X_{19}, X_{40} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_4X_{11})\equiv(HF)$

$$(2\,a^{'})\,q_1\,[(2\,b^{'})\,c^2\,q_3-(2\,c^{'})\,b^2\,q_2]\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,q_2\,[(2\,c^{'})\,a^2\,q_1-(2\,a^{'})\,c^2\,q_3]\,x_2+(2\,c^{'})\,q_3\,[(2\,a^{'})\,b^2\,q_2-(2\,b^{'})\,a^2\,q_1]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{56} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{12})\equiv(HX_{12})$

$$(2\,a^{'})\,[c^2\,(2\,c^{'})^2\,(c+a)^2-b^2\,(2\,b^{'})^2\,(a+b)^2]\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,[a^2\,(2\,a^{'})^2\,(a+b)^2-c^2\,(2\,c^{'})^2\,(b+c)^2]\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,[b^2\,(2\,b^{'})^2\,(b+c)^2-a^2\,(2\,a^{'})^2\,(c+a)^2]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{55} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{13})\equiv(HX)$

$$(b^2-c^2)\,q_1\,(\mathrm{S}+4\sqrt{3}\,\Delta\,q_1)\,x_1+(c^2-a^2)\,q_2\,(\mathrm{S}+4\sqrt{3}\,\Delta\,q_2)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,q_3\,(\mathrm{S}+4\sqrt{3}\,\Delta\,q_3)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{61} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{14})\equiv(HX^{'})$

$$(b^2-c^2)\,q_1\,(\mathrm{S}-4\sqrt{3}\,\Delta\,q_1)\,x_1+(c^2-a^2)\,q_2\,(\mathrm{S}-4\sqrt{3}\,\Delta\,q_2)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,q_3\,(\mathrm{S}-4\sqrt{3}\,\Delta\,q_3)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{62} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{15})\equiv(HS)$

$$(b^2-c^2)\,q_1\,(\sqrt{3}\,\mathrm{S}+4\,\Delta\,q_1)\,x_1+(c^2-a^2)\,q_2\,(\sqrt{3}\,\mathrm{S}+4\,\Delta\,q_2)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,q_3\,(\sqrt{3}\,\mathrm{S}+4\,\Delta\,q_3)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{17} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{16}) \equiv (HS^{'})$

$$(b^2-c^2)\,q_1\,(\sqrt{3}\,\mathrm{S}-4\,\Delta\,q_1)\,x_1+(c^2-a^2)\,q_2\,(\sqrt{3}\,\mathrm{S}-4\,\Delta\,q_2)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,q_3\,(\sqrt{3}\,\mathrm{S}-4\,\Delta\,q_3)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{18} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{25}) \equiv (HX_{25})$

$$(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+(c^2-a^2)\,q_2\,x_2+(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{28} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{32}) \equiv (HX_{32})$

$$(b^2-c^2)\,q_1\,[a^2\,(b^2+c^2)-(b^4+c^4)]\,x_1$$
$$+\,(c^2-a^2)\,q_2\,[b^2\,(c^2+a^2)-(c^4+a^4)]\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,q_3\,[c^2\,(a^2+b^2)-(a^4+b^4)]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{98} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{46}) \equiv (HX_{46})$

$$(2\,a^{'})\,(b-c)\,q_1\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)\,x_1+(2\,b^{'})\,(c-a)\,q_2\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,(a-b)\,q_3\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{52}) \equiv (HX_{52})$

$$a^2\,(b^2-c^2)\,q_1\,(q_1^2-\mathrm{S})\,x_1+b^2\,(c^2-a^2)\,q_2\,(q_2^2-\mathrm{S})\,x_2$$
$$+\,c^2\,(a^2-b^2)\,q_3\,(q_3^2-\mathrm{S})\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{68} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{69}) \equiv (HX_{69})$

$$a^2\,(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+b^2\,(c^2-a^2)\,q_2\,x_2+c^2\,(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{76} appartient à cette droite.

Droite $(X_4X_{80}) \equiv (HX_{80})$

$$(2\,a^{'})\,(b-c)\,(q_1-b\,c)\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,(c-a)\,(q_2-c\,a)\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,(a-b)\,(q_3-a\,b)\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_5X_i) **;** $i=6,\,7,\,\ldots$

Droite $(X_5X_6) \equiv (NK)$

$(b^2-c^2)\,(q_1^2-2\,b^2\,c^2)\,x_1+(c^2-a^2)\,(q_2^2-2\,c^2\,a^2)\,x_2+(a^2-b^2)\,(q_3^2-2\,a^2\,b^2)\,x_3 = 0.$

On vérifie que le point X_{68} appartient à cette droite.

Droite $(X_5X_{13}) \equiv (NX)$

$$(b^2-c^2)\,[\mathrm{S}\,q_1+4\sqrt{3}\,\Delta\,(\mathrm{S}-2\,b^2\,c^2)]\,x_1$$
$$+\,(c^2-a^2)\,[\mathrm{S}\,q_2+4\sqrt{3}\,\Delta\,(\mathrm{S}-2\,c^2\,a^2)]\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,[\mathrm{S}\,q_3+4\sqrt{3}\,\Delta\,(\mathrm{S}-2\,a^2\,b^2)]\,x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{18}, X_{62} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_5X_{14}) \equiv (NX')$

$$(b^2-c^2)\,[\mathrm{S}\,q_1-4\sqrt{3}\,\Delta\,(\mathrm{S}-2\,b^2\,c^2)]\,x_1$$
$$+\,(c^2-a^2)\,[\mathrm{S}\,q_2-4\sqrt{3}\,\Delta\,(\mathrm{S}-2\,c^2\,a^2)]\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,[\mathrm{S}\,q_3-4\sqrt{3}\,\Delta\,(\mathrm{S}-2\,a^2\,b^2)]\,x_3 = 0.$$

On vérifie que les points X_{17}, X_{61} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_5X_{49}) \equiv (NX_{49})$

$$(b^2-c^2)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,(\mathrm{S}-3\,b^2\,c^2)\,x_1+(c^2-a^2)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,(\mathrm{S}-3\,c^2\,a^2)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,(\mathrm{S}-3\,a^2\,b^2)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{54} appartient à cette droite.

Droite $(X_5X_{51}) \equiv (NX_{51})$

$$(b^2-c^2)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_1+(c^2-a^2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{52} appartient à cette droite.

Droite $(X_5X_{83}) \equiv (NX_{83})$

$$(b^4-c^4)\,(b^4+c^4-a^2\,b^2-a^2\,c^2)\,x_1+(c^4-a^4)\,(c^4+a^4-b^2\,c^2-b^2\,a^2)\,x_2$$
$$+\,(a^4-b^4)\,(a^4+b^4-c^2\,a^2-c^2\,b^2)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point X_{98} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_6X_i) **;** $i = 7,\,8,\,\ldots$

Droite $(X_6X_{13}) \equiv (KX)$

$$(b^2-c^2)\,(\mathrm{S}-3\,b^2\,c^2)\,x_1+(c^2-a^2)\,(\mathrm{S}-3\,c^2\,a^2)\,x_2+(a^2-b^2)\,(\mathrm{S}-3\,a^2\,b^2)\,x_3 = 0.$$

On vérifie que le point $X_{14} \equiv X'$ appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{17}) \equiv (KX_{17})$

$(b^2-c^2)\,(\mathrm{S}-b^2\,c^2)\,x_1+(c^2-a^2)\,(\mathrm{S}-c^2\,a^2)\,x_2+(a^2-b^2)\,(\mathrm{S}-a^2\,b^2)\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{18} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{19}) \equiv (KX_{19})$

$(2\,a^{'})\,b\,c\,(b-c)\,q_1\,x_1+(2\,b^{'})\,c\,a\,(c-a)\,q_2\,x_2+(2\,c^{'})\,a\,b\,(a-b)\,q_3\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{34}, X_{65} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_6X_{24}) \equiv (KX_{24})$

$$\begin{aligned}&b^2\,c^2\,[(\mathrm{S}-2\,c^2\,q_3)\,(q_3^2-\mathrm{S})-(\mathrm{S}-2\,b^2\,q_2)\,(q_2^2-\mathrm{S})]\,x_1\\+\,&c^2\,a^2\,[(\mathrm{S}-2\,a^2\,q_1)\,(q_1^2-\mathrm{S})-(\mathrm{S}-2\,c^2\,q_3)\,(q_3^2-\mathrm{S})]\,x_2\\+\,&a^2\,b^2\,[(\mathrm{S}-2\,b^2\,q_2)\,(q_2^2-\mathrm{S})-(\mathrm{S}-2\,a^2\,q_1)\,(q_1^2-\mathrm{S})]\,x_3=0.\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{54} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{25}) \equiv (KX_{25})$

$b^2\,c^2\,(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+c^2\,a^2\,(c^2-a^2)\,q_2\,x_2+a^2\,b^2\,(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{51} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{31}) \equiv (KX_{31})$

$b^2\,c^2\,(b-c)\,x_1+c^2\,a^2\,(c-a)\,x_2+a^2\,b^2\,(a-b)\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{42}, X_{55} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_6X_{41}) \equiv (KX_{41})$

$(2\,a^{'})\,(b-c)\,b^2\,c^2\,x_1+(2\,b^{'})\,(c-a)\,c^2\,a^2\,x_2+(2\,c^{'})\,(a-b)\,a^2\,b^2\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{48}, X_{56}, X_{73} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_6X_{43}) \equiv (KX_{43})$

$$\begin{aligned}&b\,c\,(b-c)\,(-b\,c+c\,a+a\,b)\,x_1+c\,a\,(c-a)\,(-c\,a+a\,b+b\,c)\,x_2\\+\,&a\,b\,(a-b)\,(-a\,b+b\,c+c\,a)\,x_3=0.\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{87} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{76}) \equiv (KX_{76})$

$a^2\,(b^4-c^4)\,x_1+b^2\,(c^4-a^4)\,x_2+c^2\,(a^4-b^4)\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{83} appartient à cette droite.

Droite $(X_6X_{88}) \equiv (KX_{88})$

$b\,c\,(b-c)\,(2\,a-b-c)\,(a-2\,b-2\,c)\,x_1$
$+\,c\,a\,(c-a)\,(2\,b-c-a)\,(b-2\,c-2\,a)\,x_2$
$+\,a\,b\,(a-b)\,(2\,c-a-b)\,(c-2\,a-2\,b)\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{89} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_7X_i) **;** $i=8,\,9,\,\ldots$

Droite $(X_7X_8)\equiv(GeNa)$

$a\,(b-c)\,(2\,a^{'})\,x_1+b\,(c-a)\,(2\,b^{'})\,x_2+c\,(a-b)\,(2\,c^{'})\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{65}, X_{69}, X_{75}, X_{85} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_7X_{21})\equiv(GeX_{21})$

$(2\,a^{'})\,(b^2-c^2)\,x_1+(2\,b^{'})\,(c^2-a^2)\,x_2+(2\,c^{'})\,(a^2-b^2)\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{56}, X_{86} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_7X_{27})\equiv(GeX_{27})$

$(2\,a^{'})\,(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+(2\,b^{'})\,(c^2-a^2)\,q_2\,x_2+(2\,c^{'})\,(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{81} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_8X_i) **;** $i=9,\,10,\,\ldots$

Droite $(X_8X_{20})\equiv(NaX_{20})$

$[(2\,b^{'})\,c\,(-a\,q_1-b\,q_2+c\,q_3+2\,a\,b\,c)-(2\,c^{'})\,b\,(-a\,q_1+b\,q_2-c\,q_3+2\,a\,b\,c)]\,x_1$
$+\,[(2\,c^{'})\,a\,(-b\,q_2-c\,q_3+a\,q_1+2\,b\,c\,a)-(2\,a^{'})\,c\,(-b\,q_2+c\,q_3-a\,q_1+2\,b\,c\,a)]\,x_2$
$+[(2\,a^{'})\,b\,(-c\,q_3-a\,q_1+b\,q_2+2\,c\,a\,b)-(2\,b^{'})\,a\,(-c\,q_3+a\,q_1-b\,q_2+2\,c\,a\,b)]\,x_3=0$
ou

$[(2\,b^{'})\,c\,q_3-(2\,c^{'})\,b\,q_2]\,x_1+[(2\,c^{'})\,a\,q_1-(2\,a^{'})\,c\,q_3]\,x_2+[(2\,a^{'})\,b\,q_2-(2\,b^{'})\,a\,q_1]\,x_3=\;0.$

On vérifie que les points X_{40} (avec la première expression), X_{63} (avec le deuxième expression) appartiennent à cette droite.

Droite $(X_8X_{21})\equiv(NaSc)$

$(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})\,(b^2-c^2)\,x_1+(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})\,(c^2-a^2)\,x_2+(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(a^2-b^2)\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{55} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites (X_9X_i) **;** $i=10,\,11,\,\ldots$

Droite $(X_9X_{21})\equiv(MX_{21})$

$b\,c\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})\,(b^2-c^2)\,x_1+c\,a\,(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})\,(c^2-a^2)\,x_2$
$+\,a\,b\,(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(a^2-b^2)\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{41}, X_{78} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_9 X_{35}) \equiv (M X_{35})$

$$b\,c\,(b-c)\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)\,x_1+c\,a\,(c-a)\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)\,x_2$$
$$+\,a\,b\,(a-b)\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite $(X_9 X_{46}) \equiv (M X_{46})$

$$(b-c)\,(q_1+b\,c)\,x_1+(c-a)\,(q_2+c\,a)\,x_2+(a-b)\,(q_3+a\,b)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{79} appartient à cette droite.

Droite $(X_9 X_{48}) \equiv (M X_{48})$

$$b\,c\,(b-c)\,[a^3\,(b+c)+a^2\,(b^2+c^2)-a\,(b^3+b^2\,c+b\,c^2+c^3)-b^4+2\,b^2\,c^2-c^4]\,x_1$$
$$+\,c\,a\,(c-a)\,[b^3\,(c+a)+b^2\,(c^2+a^2)-b\,(c^3+c^2\,a+c\,a^2+a^3)-c^4+2\,c^2\,a^2-a^4]\,x_2$$
$$+\,a\,b\,(a-b)\,[c^3\,(a+b)+c^2\,(a^2+b^2)-c\,(a^3+a^2\,b+a\,b^2+b^3)-a^4+2\,a^2\,b^2-b^4]\,x_3$$
$$=0.$$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

Équations de quelques droites $(X_{10} X_i)$ **;** $i=11,\,12,\,\ldots$

Droite $(X_{10} X_{12}) \equiv (Sp X_{12})$

$$(2\,a^{'})\,(c+a)\,(a+b)\,(b-c)\,x_1+(2\,b^{'})\,(a+b)\,(b+c)\,(c-a)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,(b+c)\,(c+a)\,(a-b)\,x_3=0.$$

On vérifie que les points X_{65}, X_{72} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{10} X_{21}) \equiv (Sp X_{21})$

$$(b^2-c^2)\,(q_1-b\,c)\,x_1+(c^2-a^2)\,(q_2-c\,a)\,x_2+(a^2-b^2)\,(q_3-a\,b)\,x_3=0.$$

On vérifie que les points X_{35}, X_{80}, X_{100} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{10} X_{46}) \equiv (Sp X_{46})$

$$[(a+b)\,b\,q_2-(c+a)\,c\,q_3]\,x_1+[(b+c)\,c\,q_3-(a+b)\,a\,q_1]\,x_2$$
$$+\,[(c+a)\,a\,q_1-(b+C)\,b\,q_2]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{63} appartient à cette droite.

Droite $(X_{10} X_{75}) \equiv (Sp X_{75})$

$$a^2\,(b-c)\,x_1+b^2\,(c-a)\,x_2+c^2\,(a-b)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{76} appartient à cette droite.

Droite $(X_{10}X_{82}) \equiv (SpX_{82})$

$(b-c)\,(b^2+c^2)\,x_1+(c-a)\,(c^2+a^2)\,x_2+(a-b)\,(a^2+b^2)\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{83} appartient à cette droite.

Droite $(X_{10}X_{98}) \equiv (SpX_{98})$

$(b-c)\,[a^2\,(b^2+c^2)-(b^4+c^4)]\,x_1+(c-a)\,[b^2\,(c^2+a^2)-(c^4+a^4)]\,x_2$
$+\,(a-b)\,[c^2\,(a^2+b^2)-(a^4+b^4)]\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

Équations de quelques autres droites (X_iX_j)

Droite $(X_{13}X_{15}) \equiv (XS)$

$$(b^2-c^2)\,[3\,\mathrm{S}\,q_1+4\,\sqrt{3}\,\Delta\,(6\,b^2\,c^2-\mathrm{S})]\,x_1$$
$$+\,(c^2-a^2)\,[3\,\mathrm{S}\,q_2+4\,\sqrt{3}\,\Delta\,(6\,c^2\,a^2-\mathrm{S})]\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,[3\,\mathrm{S}\,q_3+4\,\sqrt{3}\,\Delta\,(6\,a^2\,b^2-\mathrm{S})]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{30} appartient à cette droite.

Droite $(X_{14}X_{16}) \equiv (X'S')$

$$(b^2-c^2)\,[\sqrt{3}\,\mathrm{S}\,q_1-4\,\Delta\,(6\,b^2\,c^2-\mathrm{S})]\,x_1$$
$$+\,(c^2-a^2)\,[\sqrt{3}\,\mathrm{S}\,q_2-4\,\Delta\,(6\,c^2\,a^2-\mathrm{S})]\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,[\sqrt{3}\,\mathrm{S}\,q_3-4\,\Delta\,(6\,a^2\,b^2-\mathrm{S})]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{30} appartient à cette droite.

Droite $(X_{19}X_{25}) \equiv (ClX_{25})$

$b\,c\,(b-c)\,q_1\,x_1+c\,a\,(c-a)\,q_2\,x_2+a\,b\,(a-b)\,q_3\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{33}, X_{37}, X_{55} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{19}X_{27}) \equiv (ClX_{27})$

$a\,(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+b\,(c^2-a^2)\,q_2\,x_2+c\,(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$

On vérifie que les points X_{63}, X_{75}, X_{92} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{20}X_{64}) \equiv (LX_{64})$

$(b^2-c^2)\,(4\,a^2\,q_1-\mathrm{S})\,x_1+(c^2-a^2)\,(4\,b^2\,q_2-\mathrm{S})\,x_2$
$+\,(a^2-b^2)\,(4\,c^2\,q_3-\mathrm{S})\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{69} appartient à cette droite.

Droite $(X_{20}X_{68}) \equiv (LX_{68})$

$$(b^2-c^2)\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(3\,a^2\,q_1-\mathrm{S})\,x_1+(c^2-a^2)\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(3\,b^2\,q_2-\mathrm{S})\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(3\,c^2\,q_3-\mathrm{S})\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{74} appartient à cette droite.

Droite $(X_{21}X_{36})\equiv(ScX_{36})$

$$(b^2-c^2)\,(q_1+b\,c)\,x_1+(c^2-a^2)\,(q_2+c\,a)\,x_2+(a^2-b^2)\,(q_3+a\,b)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{79} appartient à cette droite.

Droite $(X_{23}X_{94})$

$$a^2\,(b^2-c^2)\,(3\,b^2\,c^2-\mathrm{S})\,(d_6\,q_1-\mathrm{S})\,x_1$$
$$+\,b^2\,(c^2-a^2)\,(3\,c^2\,a^2-\mathrm{S})\,(d_6\,q_2-\mathrm{S})\,x_2$$
$$+\,c^2\,(a^2-b^2)\,(3\,a^2\,b^2-\mathrm{S})\,(d_6\,q_3-\mathrm{S})\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{98} appartient à cette droite.

Droite $(X_{24}X_{33})$

$$b\,c\,q_1\,[b\,(2\,c^{'})\,(q_2^2-\mathrm{S})-c\,(2\,b^{'})\,(q_3^2-\mathrm{S})]\,x_1$$
$$+\,c\,a\,q_2\,[c\,(2\,a^{'})\,(q_3^2-\mathrm{S})-a\,(2\,c^{'})\,(q_1^2-\mathrm{S})]\,x_2$$
$$+\,a\,b\,q_3\,[a\,(2\,b^{'})\,(q_1^2-\mathrm{S})-b\,(2\,a^{'})\,(q_2^2-\mathrm{S})]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{35} appartient à cette droite.

Droite $(X_{24}X_{34})$

$$b\,c\,q_1\,[c\,(a\,b-q_3)\,q_1-b\,(c\,a-q_2)\,q_2]\,x_1$$
$$+\,c\,a\,q_2\,[a\,(b\,c-q_1)\,q_2-c\,(a\,b-q_3)\,q_3]\,x_2$$
$$+\,a\,b\,q_3\,[b\,(c\,a-q_2)\,q_3-a\,(b\,c-q_1)\,q_1]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{36} appartient à cette droite.

Droite $(X_{24}X_{64})$

$$b^2\,c^2\,(b^2-c^2)\,q_1\,(a^2\,q_1-q_2\,q_3)\,(2\,a^2\,q_1-q_2\,q_3)\,x_1$$
$$+\,c^2\,a^2\,(c^2-a^2)\,q_2\,(b^2\,q_2-q_3\,q_1)\,(2\,b^2\,q_2-q_3\,q_1)\,x_2$$
$$+\,a^2\,b^2\,(a^2-b^2)\,q_3\,(c^2\,q_3-q_1\,q_2)\,(2\,c^2\,q_3-q_1\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{74} appartient à cette droite.

Droite $(X_{25}X_{34})$

$$b\,c\,(2\,a^{'})^2\,(b-c)\,x_1+c\,a\,(2\,b^{'})^2\,(c-a)\,x_2+a\,b\,(2\,c^{'})^2\,(a-b)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{56} appartient à cette droite.

Droite $(X_{25}X_{41})$

$$b^2\,c^2\,[c\,(2\,c^{'})\,(c+a)-b\,(2\,b^{'})\,(a+b)]\,x_1$$
$$+\,c^2\,a^2\,[a\,(2\,a^{'})\,(a+b)-c\,(2\,c^{'})\,(b+c)]\,x_2$$
$$+\,a^2\,b^2\,[b\,(2\,b^{'})\,(b+c)-a\,(2\,a^{'})\,(c+a)]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{42} appartient à cette droite.

Droite $(X_{27}X_{28})$

$$(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+(c^2-a^2)\,q_2\,x_2+(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{29} appartient à cette droite.

Droite $(X_{28}X_{34})$

$$(2\,a^{'})\,b\,c\,(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+(2\,b^{'})\,c\,a\,(c^2-a^2)\,q_2\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,a\,b\,(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$$

On vérifie que les points X_{57}, X_{58} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{28}X_{60})$

$$b\,c\,(b-c)\,(b+c)^3\,(c+a)\,(a+b)\,q_1\,x_1$$
$$+\,c\,a\,(c-a)\,(c+a)^3\,(a+b)\,(b+c)\,q_2\,x_2$$
$$+\,a\,b\,(a-b)\,(a+b)^3\,(b+c)\,(c+a)\,q_3\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{81} appartient à cette droite.

Droite $(X_{29}X_{33})$

$$a\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})\,(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+b\,(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})\,(c^2-a^2)\,q_2\,x_2$$
$$+\,c\,(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{78} appartient à cette droite.

Droite $(X_{29}X_{34})$

$$a\,(2\,a^{'})\,(b^2-c^2)\,q_1\,x_1+b\,(2\,b^{'})\,(c^2-a^2)\,q_2\,x_2+c\,(2\,c^{'})\,(a^2-b^2)\,q_3\,x_3=0.$$

On vérifie que les points X_{77}, X_{85}, X_{86} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{31}X_{32})$

$$b^3\,c^3\,(b-c)\,x_1+c^3\,a^3\,(c-a)\,x_2+a^3\,b^3\,(a-b)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{41} appartient à cette droite.

Droite $(X_{31}X_{43})$

$$b\,c\,(b-c)\,[a\,(b^2+c^2)-b\,c\,(b+c)]\,x_1+c\,a\,(c-a)\,[b\,(c^2+a^2)-c\,a\,(c+a)]\,x_2$$
$$+\,a\,b\,(a-b)\,[c\,(a^2+b^2)-a\,b\,(a+b)]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite $(X_{31}X_{75})$

$a\,(b^4-c^4)\,x_1+b\,(c^4-a^4)\,x_2+c\,(a^4-b^4)\,x_3=0.$

On vérifie que le point X_{82} appartient à cette droite.

Droite $(X_{33}X_{47})$

$$\begin{aligned}
&b\,c\,q_1\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)\,[(2\,c^{'})\,q_2\,(b\,q_2-c\,q_3+a\,q_1)\\
&-(2\,b^{'})\,q_3\,(c\,q_3+a\,q_1-b\,q_2)]\,x_1\\
&+c\,a\,q_2\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)\,[(2\,a^{'})\,q_3\,(c\,q_3-a\,q_1+b\,q_2)\\
&-(2\,c^{'})\,q_1\,(a\,q_1+b\,q_2-c\,q_3)]\,x_2\\
&+a\,b\,q_3\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)\,[(2\,b^{'})\,q_1\,(a\,q_1-b\,q_2+c\,q_3)\\
&-(2\,a^{'})\,q_2\,(b\,q_2+c\,q_3-a\,q_1)]\,x_3=0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite $(X_{33}X_{64})$

$$\begin{aligned}
&(2\,a^{'})\,b\,c\,q_1\,[(c+a)\,(2\,c^{'})^2\,q_2-(a+b)\,(2\,b^{'})^2\,q_3]\,x_1\\
&+(2\,b^{'})\,c\,a\,q_2\,[(a+b)\,(2\,a^{'})^2\,q_3-(b+c)\,(2\,c^{'})^2\,q_1]\,x_2\\
&+(2\,c^{'})\,a\,b\,q_3\,[(b+c)\,(2\,b^{'})^2\,q_1-(c+a)\,(2\,a^{'})^2\,q_2]\,x_3=0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{65} appartient à cette droite.

Droite $(X_{34}X_{46})$

$$\begin{aligned}
&(2\,a^{'})\,b\,c\,q_1\,[(2\,c^{'})\,q_3\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)-(2\,b^{'})\,q_2\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)]\,x_1\\
&+(2\,b^{'})\,c\,a\,q_2\,[(2\,a^{'})\,q_1\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)-(2\,c^{'})\,q_3\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)]\,x_2\\
&+(2\,c^{'})\,a\,b\,q_3\,[(2\,b^{'})\,q_2\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)-(2\,a^{'})\,q_1\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)]\,x_3=0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{47} appartient à cette droite.

Droite $(X_{35}X_{42})$

$$\begin{aligned}
&b^2\,c^2\,(b^2-c^2)\,(2\,a+b+c)\,x_1+c^2\,a^2\,(c^2-a^2)\,(2\,b+c+a)\,x_2\\
&+a^2\,b^2\,(a^2-b^2)\,(2\,c+a+b)\,x_3=0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{58} appartient à cette droite.

Droite $(X_{35}X_{73})$

$$\begin{aligned}
&(2\,a^{'})\,b^2\,c^2\,(b-c)\,(a^2\,q_1-q_2\,q_3)\,x_1\\
&+(2\,b^{'})\,c^2\,a^2\,(c-a)\,(b^2\,q_2-q_3\,q_1)\,x_2\\
&+(2\,c^{'})\,a^2\,b^2\,(a-b)\,(c^2\,q_3-q_1\,q_2)\,x_3=0.
\end{aligned}$$

On vérifie que le point X_{74} appartient à cette droite.

Droite $(X_{36}X_{54})$

$$(2\,a^{'})\,b^2\,c^2\,(b-c)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,[\mathrm{S}+(2\,s)\,a\,b\,c]\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,c^2\,a^2\,(c-a)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,[\mathrm{S}+(2\,s)\,b\,c\,a]\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,a^2\,b^2\,(a-b)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,[\mathrm{S}+(2\,s)\,c\,a\,b]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{73} appartient à cette droite.

Droite $(X_{36}X_{58})$

$$b^2\,c^2\,(b-c)\,(b+c)^2\,x_1+c^2\,a^2\,(c-a)\,(c+a)^2\,x_2$$
$$+\,a^2\,b^2\,(a-b)\,(a+b)^2\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{60} appartient à cette droite.

Droite $(X_{36}X_{84})$

$$(2\,a^{'})\,b\,c\,(b-c)\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3-2\,a\,b\,c)\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,c\,a\,(c-a)\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1-2\,b\,c\,a)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,a\,b\,(a-b)\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2-2\,c\,a\,b)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite $(X_{39}X_{83})$

$$(a^4-b^2\,c^2)\,(b^4-c^4)\,x_1+(b^4-c^2\,a^2)\,(c^4-a^4)\,x_2+(c^4-a^2\,b^2)\,(a^4-b^4)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{99} appartient à cette droite.

Droite $(X_{40}X_{64})$

$$b\,c\,(b-c)\,(4\,a^2\,q_1-\mathrm{S})\,x_1+c\,a\,(c-a)\,(4\,b^2\,q_2-\mathrm{S})\,x_2$$
$$+\,a\,b\,(a-b)\,(4\,c^2\,q_3-\mathrm{S})\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{72} appartient à cette droite.

Droite $(X_{40}X_{78})$

$$b\,c\,(b-c)\,[(2\,c^{'})\,(a-b)-(2\,b^{'})\,(c-a)]\,x_1$$
$$+\,c\,a\,(c-a)\,[(2\,a^{'})\,(b-c)-(2\,c^{'})\,(a-b)]\,x_2$$
$$+\,a\,b\,(a-b)\,[(2\,b^{'})\,(c-a)-(2\,a^{'})\,(b-c)]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite $(X_{40}X_{80})$

$$(2\,a^{'})\,(b-c)\,(q_1-b\,c)\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,(c-a)\,(q_2-c\,a)\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,(a-b)\,(q_3-a\,b)\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite $(X_{42}X_{65})$

$$(2\,a^{'})^2\,b\,c\,(b-c)\,(c+a)\,(a+b)\,x_1+(2\,b^{'})^2\,c\,a\,(c-a)\,(a+b)\,(b+c)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})^2\,a\,b\,(a-b)\,(b+c)\,(c+a)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{73} appartient à cette droite.

Droite $(X_{42}X_{81})$

$$b\,c\,(b^2-c^2)\,(a^2-b\,c)\,x_1+c\,a\,(c^2-a^2)\,(b^2-c\,a)\,x_2+a\,b\,(a^2-b^2)\,(c^2-a\,b)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite $(X_{47}X_{91})$

$$a\,(b^2-c^2)\,(q_1^2-\mathrm{S})\,[4\,a^2\,b^2\,c^2-(b^2+c^2)\,\mathrm{S}]\,x_1$$
$$+\,b\,(c^2-a^2)\,(q_2^2-\mathrm{S})\,[4\,b^2\,c^2\,a^2-(c^2+a^2)\,\mathrm{S}]\,x_2$$
$$+\,c\,(a^2-b^2)\,(q_3^2-\mathrm{S})\,[4\,c^2\,a^2\,b^2-(a^2+b^2)\,\mathrm{S}]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{92} appartient à cette droite.

Droite $(X_{49}X_{93})$

$$a^2\,q_1\,(b^2\,c^2-\mathrm{S})\,[(a^2\,b^2-\mathrm{S})^2\,c^6\,q_3^2-(c^2\,a^2-\mathrm{S})^2\,b^6\,q_2^2]\,x_1$$
$$+\,b^2\,q_2\,(c^2\,a^2-\mathrm{S})\,[(b^2\,c^2-\mathrm{S})^2\,a^6\,q_1^2-(a^2\,b^2-\mathrm{S})^2\,c^6\,q_3^2]\,x_2$$
$$+\,c^2\,q_3\,(a^2\,b^2-\mathrm{S})\,[(c^2\,a^2-\mathrm{S})^2\,b^6\,q_2^2-(b^2\,c^2-\mathrm{S})^2\,a^6\,q_1^2]\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{94} appartient à cette droite.

Droite $(X_{54}X_{69})$

$$(b^2-c^2)\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_1+(c^2-a^2)\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_2+(a^2-b^2)\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{95} appartient à cette droite.

Droite $(X_{55}X_{64})$

$$(2\,a^{'})\,b^2\,c^2\,(b-c)\,(4\,a^2\,q_1-\mathrm{S})\,x_1+(2\,b^{'})\,c^2\,a^2\,(c-a)\,(4\,b^2\,q_2-\mathrm{S})\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,a^2\,b^2\,(a-b)\,(4\,c^2\,q_3-\mathrm{S})\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{73} appartient à cette droite.

Droite $(X_{57}X_{77})$

$$(2\,a^{'})^2\,b\,c\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})\,(b^2-c^2)\,x_1+(2\,b^{'})^2\,c\,a\,(2\,c^{'})\,(2\,a^{'})\,(c^2-a^2)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})^2\,a\,b\,(2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(a^2-b^2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{81} appartient à cette droite.

Droite $(X_{57}X_{79})$

$$(2\,a^{'})\,(b-c)\,(q_1+b\,c)\,(-a\,q_1+b\,q_2+c\,q_3)\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,(c-a)\,(q_2+c\,a)\,(-b\,q_2+c\,q_3+a\,q_1)\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,(a-b)\,(q_3+a\,b)\,(-c\,q_3+a\,q_1+b\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{90} appartient à cette droite.

Droite $(X_{65}X_{68})$

$$a\,(2\,a^{'})\,(b-c)\,(q_1^2-\mathrm{S})\,x_1+b\,(2\,b^{'})\,(c-a)\,(q_2^2-\mathrm{S})\,x_2$$
$$+\,c\,(2\,c^{'})\,(a-b)\,(q_3^2-\mathrm{S})\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{91} appartient à cette droite.

Droite $(X_{65}X_{79})$

$$a\,(2\,a^{'})\,(b-c)\,(q_1^2-b^2\,c^2)\,x_1+b\,(2\,b^{'})\,(c-a)\,(q_2^2-c^2\,a^2)\,x_2$$
$$+\,c\,(2\,c^{'})\,(a-b)\,(q_3^2-a^2\,b^2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{80} appartient à cette droite.

Droite $(X_{69}X_{73})$

$$(2\,a^{'})\,q_2\,q_3\,[a^2\,(b^2-c^2)+a\,(b^3-c^3)+b\,c\,(b^2-c^2)]\,x_1$$
$$+\,(2\,b^{'})\,q_3\,q_1\,[b^2\,(c^2-a^2)+b\,(c^3-a^3)+c\,a\,(c^2-a^2)]\,x_2$$
$$+\,(2\,c^{'})\,q_1\,q_2\,[c^2\,(a^2-b^2)+c\,(a^3-b^3)+a\,b\,(a^2-b^2)]\,x_3=0.$$

On vérifie que les points X_{77}, X_{78} appartiennent à cette droite.

Droite $(X_{69}X_{74})$

$$(b^2-c^2)\,(a^2\,q_1-q_2\,q_3)\,x_1+(c^2-a^2)\,(b^2\,q_2-q_3\,q_1)\,x_2$$
$$+\,(a^2-b^2)\,(c^2\,q_3-q_1\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{99} appartient à cette droite.

Droite $(X_{71}X_{74})$

$$b^2\,c^2\,(b-c)\,(a^2\,q_1-q_2\,q_3)\,x_1+c^2\,a^2\,(c-a)\,(b^2\,q_2-q_3\,q_1)\,x_2$$
$$+\,a^2\,b^2\,(a-b)\,(c^2\,q_3-q_1\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{101} appartient à cette droite.

Droite $(X_{72}X_{74})$

$$b\,c\,(b-c)\,(a^2\,q_1-q_2\,q_3)\,x_1+c\,a\,(c-a)\,(b^2\,q_2-q_3\,q_1)\,x_2$$
$$+\,a\,b\,(a-b)\,(c^2\,q_3-q_1\,q_2)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{100} appartient à cette droite.

Droite $(X_{76}X_{95})$

$$a^2\,(b^2-c^2)\,(q_1^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-a^2\,q_1)\,x_1$$
$$+\,b^2\,(c^2-a^2)\,(q_2^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-b^2\,q_2)\,x_2$$
$$+\,c^2\,(a^2-b^2)\,(q_3^2-\mathrm{S})\,(\mathrm{S}-c^2\,q_3)\,x_3=0.$$

On vérifie que le point X_{96} appartient à cette droite.

8 Équations des cercles en coordonnées aréolaires

On pourra consulter [3] [161].

Le point courant $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (rappel $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) du plan du triangle ABC appartient à un cercle (C) de centre $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ (rappel $z_1 + z_2 + z_3 = 1$) et de rayon ρ ssi :

$\frac{1}{2}\, q_1 \left[(x_1 - z_1)^2 + q_2\,(x_2 - z_2)^2 + q_3\,(x_3 - z_3)^2\right] - \rho^2 = 0$ (il s'agit donc d'*une* équation du cercle (C)) [3] [162].

Remplaçons z_1, z_2, z_3 par δ_1, δ_2, δ_3 tels que :

$\delta_1 \triangleq \rho^2 + q_1\, z_1 - \frac{1}{2}\,(q_1\, z_1^2 + q_2\, z_2^2 + q_3\, z_3^2)$,
$\delta_2 \triangleq \rho^2 + q_2\, z_2 - \frac{1}{2}\,(q_1\, z_1^2 + q_2\, z_2^2 + q_3\, z_3^2)$,
$\delta_3 \triangleq \rho^2 + q_3\, z_3 - \frac{1}{2}\,(q_1\, z_1^2 + q_2\, z_2^2 + q_3\, z_3^2)$.
Alors une autre équation du cercle s'écrit :

$\frac{1}{2}\,(q_1\, x_1^2 + q_2\, x_2^2 + q_3\, x_3^2) - \delta_1\, x_1 - \delta_2\, x_2 - \delta_3\, x_3 = 0$ [3] [163].

De plus si on pose :

$\delta_1' \triangleq \delta_1 - \frac{1}{2}\, q_1 = \rho^2 - c^2\, z_2^2 - b^2\, z_3^2 - q_1\, z_2\, z_3$,
$\delta_2' \triangleq \delta_2 - \frac{1}{2}\, q_2 = \rho^2 - a^2\, z_3^2 - c^2\, z_1^2 - q_2\, z_3\, z_1$,
$\delta_3' \triangleq \delta_3 - \frac{1}{2}\, q_3 = \rho^2 - b^2\, z_1^2 - a^2\, z_2^2 - q_3\, z_1\, z_2$ et si l'on remarque que :

$x_1^2 = -x_1\, x_2 - x_1\, x_3 + x_1$,
$x_2^2 = -x_2\, x_3 - x_2\, x_1 + x_2$,
$x_3^2 = -x_3\, x_1 - x_3\, x_2 + x_3$ [3] [164] alors une autre équation du cercle s'écrit :

$a^2\, x_2\, x_3 + b^2\, x_3\, x_1 + c^2\, x_1\, x_2 + \delta_1'\, x_1 + \delta_2'\, x_2 + \delta_3'\, x_3 = 0$.

Nous donnons ci-après les équations de certains cercles particuliers sous cette dernière forme.

161. pp. 84-107 Chapitre VI "GÉOMÉTRIE DU CERCLE"
162. p. 85
163. p. 85
164. p. 70

8.1 Cercle passant par les points B, Ω, C

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - b^2\,x_1 = 0.$

8.2 Cercle passant par les points C, Ω, A

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - c^2\,x_2 = 0.$

8.3 Cercle passant par les points A, Ω, B

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - a^2\,x_3 = 0.$

8.4 Cercle passant par les points B, $\Omega^{'}$, C

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - c^2\,x_1 = 0.$

8.5 Cercle passant par les points C, $\Omega^{'}$, A

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - a^2\,x_2 = 0.$

8.6 Cercle passant par les points A, $\Omega^{'}$, B

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - b^2\,x_3 = 0.$

8.7 Cercle de centre A et de rayon $a^{'}$

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 + a^{'2}\,x_1 + (a^{'2} - c^2)\,x_2 + (a^{'2} - b^2)\,x_3 = 0.$

8.8 Cercle de centre B et de rayon $b^{'}$

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 + (b^{'2} - c^2)\,x_1 + b^{'2}\,x_2 + (b^{'2} - a^2)\,x_3 = 0.$

8.9 Cercle de centre C et de rayon $c^{'}$

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 + (c^{'2} - b^2)\,x_1 + (c^{'2} - a^2)\,x_2 + c^{'2}\,x_3 = 0.$

8.10 Cercle inscrit (donc de centre $X_1 \equiv I$)

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - a^{'2}\,x_1 - b^{'2}\,x_2 - c^{'2}\,x_3 = 0$ [3] [165].

Le point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$ appartient au cerle inscrit.

165. p. 122

8.11 Cercles exinscrits et certains cercles associés

8.11.1 Cercle exinscrit de centre J_1

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - s^2\,x_1 - c'^2\,x_2 - b'^2\,x_3 = 0.$$

8.11.2 Cercle exinscrit de centre J_2

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - c'^2\,x_1 - s^2\,x_2 - a'^2\,x_3 = 0.$$

8.11.3 Cercle exinscrit de centre J_3

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - b'^2\,x_1 - a'^2\,x_2 - s^2\,x_3 = 0.$$

8.11.4 Cercle de diamètre $[I\,J_1]$

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - b\,c\,x_1 = 0.$$

8.11.5 Cercle de diamètre $[I\,J_2]$

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - c\,a\,x_2 = 0.$$

8.11.6 Cercle de diamètre $[I\,J_3]$

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - a\,b\,x_3 = 0.$$

8.12 Premier cercle d'Apollonius de diamètre $[I_A J_{2A}] \equiv [I_A J_{3A}]$

On pourra consulter [3] [166].

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 + \tfrac{c^2\,a^2}{b^2-c^2}\,x_2 - \tfrac{a^2\,b^2}{b^2-c^2}\,x_3 = 0.$$

Le point A appartient à ce cercle.

8.13 Deuxième cercle d'Apollonius de diamètre $[I_B J_{3B}] \equiv [I_B J_{1B}]$

On pourra consulter [3] [167].

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 + \tfrac{a^2\,b^2}{c^2-a^2}\,x_3 - \tfrac{b^2\,c^2}{c^2-a^2}\,x_1 = 0.$$

Le point B appartient à ce cercle.

166. p. 138
167. p. 138

8.14 Troisième cercle d'Apollonius de diamètre $[I_C J_{1C}] \equiv [I_C J_{2C}]$

On pourra consulter [3] [168].

$a^2\, x_2\, x_3 + b^2\, x_3\, x_1 + c^2\, x_1\, x_2 + \frac{b^2\, c^2}{a^2 - b^2}\, x_1 - \frac{c^2\, a^2}{a^2 - b^2}\, x_2 = 0.$

Le point C appartient à ce cercle.

8.15 Cercle circonscrit (donc de centre $X_3 \equiv O$)

On pourra consulter [8] [169].

$a^2\, x_2\, x_3 + b^2\, x_3\, x_1 + c^2\, x_1\, x_2 = 0$ [3] [170].

Les points de Tarry $X_{98} \equiv Ta$ et de Steiner $X_{99} \equiv St$ appartiennent au cercle circonscrit.

8.16 Cercles de Droz-Farny : cercles centrés à l'orthocentre $X_4 \equiv H$ et de rayon ρ

On pourra consulter [3] [171] [8] [172]

$$a^2\, x_2\, x_3 + b^2\, x_3\, x_1 + c^2\, x_1\, x_2$$
$$+ (\rho^2 - \tfrac{1}{2}\, q_1 + \tfrac{q_1\, q_2\, q_3}{2\,\mathrm{S}})\, x_1 + (\rho^2 - \tfrac{1}{2}\, q_2 + \tfrac{q_1\, q_2\, q_3}{2\,\mathrm{S}})\, x_2 + (\rho^2 - \tfrac{1}{2}\, q_3 + \tfrac{q_1\, q_2\, q_3}{2\,\mathrm{S}})\, x_3 = 0.$$

Remarque : on a donc aussi $\frac{1}{2}\,(q_1\, x_1^2 + q_2\, x_2^2 + q_3\, x_3^2) - (\rho^2 + \frac{q_1\, q_2\, q_3}{2\,\mathrm{S}}) = 0$ car $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \rho^2 + \frac{q_1\, q_2\, q_3}{2\,\mathrm{S}}$ [3] [173].

8.16.1 Cercle polaire : cas particulier du cercle centré à l'orthocentre $X_4 \equiv H$ et de rayon ρ tel que $\rho^2 = -\frac{q_1\, q_2\, q_3}{2\,\mathrm{S}}$

$a^2\, x_2\, x_3 + b^2\, x_3\, x_1 + c^2\, x_1\, x_2 - \frac{1}{2}\, q_1\, x_1 - \frac{1}{2}\, q_2\, x_2 - \frac{1}{2}\, q_3\, x_3 = 0.$

Ce cercle peut être imaginaire.

Remarque : on a donc aussi $\frac{1}{2}\,(q_1\, x_1^2 + q_2\, x_2^2 + q_3\, x_3^2) = 0$ car $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ [3] [174].

168. p. 138
169. pp. 258-259 "Circumcircle"
170. p. 140
171. pp. 113-114 § 6 "Cercles centrés à l'orthocentre
172. pp. 494-495 "Droz-Farny Circles"
173. p. 113
174. p. 113

8.17 Cercle d'Euler

On pourra consulter [2] [3][175] [9].

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - \frac{1}{4}\,(q_1\,x_1 + q_2\,x_2 + q_3\,x_3) = 0.$

Les 9 points $H_a \equiv A_a$, G_A, E_1, $H_b \equiv B_b$, G_B, E_2, $H_c \equiv C_c$, G_C, E_3 appartiennent à ce cercle, de centre $X_5 \equiv N$, d'ou l'autre dénomination de ce cercle : cercle des neuf points. Il est aussi appelé cercle de Feuerbach, cercle de Terquem, cerle médian, etc. En fait il comporte au moins 43 points remarquables [9]. Par exemple le point de Feuerbach $X_{11} \equiv F$ appartient à ce cercle [2][176].

Théorème de Fueurbach : le cercle d'Euler du triangle ABC est tangent aux cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC [2][177].

8.18 Cercle de Lemoine ou premier cercle de Lemoine

On pourra consulter [3][178] [8][179].

Ce cercle à pour centre le point $\frac{X_3+X_6}{2} \equiv \frac{O+K}{2}$.

$$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2$$
$$- \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^2}\,[b^2\,c^2\,(b^2+c^2)\,x_1 + c^2\,a^2\,(c^2+a^2)\,x_2 + a^2\,b^2\,(a^2+b^2)\,x_3] = 0.$$

Les points K_{BC}, K_{CA}, K_{AB} ; K_{CB}, K_{AC}, K_{BA} appartiennent à ce cercle.

8.19 Cercle des cosinus ou second cercle de Lemoine

On pourra consulter [3][180] [8][181].

Ce cercle à pour centre le point de Lemoine $X_6 \equiv K$.

$a^2\,x_2\,x_3 + b^2\,x_3\,x_1 + c^2\,x_1\,x_2 - \frac{2\,b^2\,c^2\,q_1}{d_6^2}\,x_1 - \frac{2\,c^2\,a^2\,q_2}{d_6^2}\,x_2 - \frac{2\,a^2\,b^2\,q_3}{d_6^2}\,x_3 = 0.$

Les points K^*_{CB}, K^*_{AC}, K^*_{BA} ; K^*_{BC}, K^*_{CA}, K^*_{AB} appartiennent à ce cercle.

175. pp. 122-127 § 11 “Cercle d'Euler ou cercle des neuf points”
176. p. 39
177. p. 24
178. pp. 127-132 § 12 “Le point de Lemoine et les cercles de Lemoine”
179. p. 1067 “Lemoine Circle”
180. pp. 127-132 § 12 “Le point de Lemoine et les cercles de Lemoine”
181. p. 340 “Cosine Circle”

9 Annexes

9.1 Annexe A : Expressions des termes utiles $d_{i,\,j}$, de degré i, polynômes en a, b, c et valeurs de ces termes (pour $i \leqslant 9$) en s, r, R

9.1.1 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^1$

$$d_{1,\,1} = a + b + c = 2\,s$$

9.1.2 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^2$

$$d_{2,\,1} = a^2 + b^2 + c^2 = 2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]$$
$$d_{2,\,2} = b\,c + c\,a + a\,b = s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R})$$

9.1.3 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^3$

$$d_{3,\,1} = a^3 + b^3 + c^3 = 2\,s\,[s^2 - 3\,r\,(r + 2\,\mathrm{R})]$$
$$d_{3,\,2} = (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) = 2\,s\,[s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R})]$$
$$d_{3,\,3} = a\,b\,c = 4\,s\,r\,\mathrm{R}$$

9.1.4 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^4$

$$d_{4,\,1} = a^4 + b^4 + c^4 = 2\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$$
$$d_{4,\,2} = (b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) = 2\,[s^4 - 4\,s^2\,r\,\mathrm{R} - r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]$$
$$d_{4,\,3} = (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2$$
$$d_{4,\,4} = a\,b\,c\,(a + b + c) = d_{1,\,1}\,d_{3,\,3} = 8\,s^2\,r\,\mathrm{R}$$

9.1.5 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^5$

$$d_{5,\,1} = a^5 + b^5 + c^5$$
$$= 2\,s\,[s^4 - 10\,s^2\,r\,(r + \mathrm{R}) + 5\,r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]$$
$$d_{5,\,2} = (b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) + (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)$$
$$= 2\,s\,\{s^4 - 2\,s^2\,r\,(r + 3\,\mathrm{R}) - r^2\,[r\,(3\,r + 14\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2]\}$$
$$d_{5,\,3} = (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2)$$
$$+ (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3) = 2\,s\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 5\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]$$
$$d_{5,\,4} = a\,b\,c\,(a^2 + b^2 + c^2) = d_{2,\,1}\,d_{3,\,3} = 8\,s\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}$$
$$d_{5,\,5} = a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_{2,\,2}\,d_{3,\,3} = 4\,s\,[s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}$$

9.1.6 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^6$

$$d_{6,1} = a^6 + b^6 + c^6$$
$$= 2\{s^6 - 3\,s^4\,r\,(5\,r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,s^2\,r^2\,[r\,(5\,r + 24\,\mathrm{R}) + 24\,\mathrm{R}^2] - r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$$
$$d_{6,2} = (b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) + (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5)$$
$$= 2\{s^6 - s^4\,r\,(5\,r + 8\,\mathrm{R}) - s^2\,r^2\,[r\,(5\,r + 12\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2] + r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$$
$$d_{6,3} = (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$$
$$= 2\{s^6 + s^4\,r\,(r - 12\,\mathrm{R}) + s^2\,r^2\,[r\,(-r + 8\,\mathrm{R}) + 24\,\mathrm{R}^2] - r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$$
$$d_{6,4} = a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1}\,d_{3,3} = 8\,s^2\,[s^2 - 3\,r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}$$
$$d_{6,5} = (b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) = s^6 + 3\,s^4\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + 3\,s^2\,r^4 + r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3$$
$$d_{6,6} = a\,b\,c\,[(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)] = d_{3,2}\,d_{3,3}$$
$$= 8\,s^2\,[s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}$$
$$d_{6,7} = a^2\,b^2\,c^2 = d_{3,3}^2 = 16\,s^2\,r^2\,\mathrm{R}^2$$

9.1.7 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^7$

$$d_{7,1} = a^7 + b^7 + c^7$$
$$= 2\,s\,\{s^6 - 7\,s^4\,r\,(3\,r + 2\,\mathrm{R}) + 7\,s^2\,r^2\,[5\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 16\,\mathrm{R}^2]$$
$$- 7\,r^3\,[r^2\,(r + 10\,\mathrm{R})) + 32\,(r + \mathrm{R}))\,\mathrm{R}^2\}$$
$$d_{7,2} = (b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) + (b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)$$
$$= 2\,s\,\{s^6 - s^4\,r\,(9\,r + 10\,\mathrm{R}) + s^2\,r^2\,[r\,(-5\,r + 4\,\mathrm{R}) + 32\,\mathrm{R}^2]$$
$$+ r^3\,[r^2\,(5\,r + 46\,\mathrm{R})) + 16\,(8\,r + 6\,\mathrm{R}))\,\mathrm{R}^2\}$$
$$d_{7,3} = (b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2) + (b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5)$$
$$= 2\,s\,\{s^6 - s^4\,r\,(r + 14\,\mathrm{R}) + s^2\,r^2\,[5\,r\,(-r + 4\,\mathrm{R}) + 48\,\mathrm{R}^2]$$
$$- r^3\,[3\,r^2\,(r + 10\,\mathrm{R})) + 96\,(r + \mathrm{R}))\,\mathrm{R}^2\}$$
$$d_{7,4} = a\,b\,c\,(a^4 + b^4 + c^4) = d_{3,3}\,d_{4,1}$$
$$= 8\,s\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(3\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\,r\,\mathrm{R}$$
$$d_{7,5} = (b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3) + (b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4)$$
$$= 2\,s\,\{s^6 + s^4\,r\,(3\,r - 14\,\mathrm{R}) + s^2\,r^2\,[r\,(3\,r - 4\,\mathrm{R}) + 16\,\mathrm{R}^2]$$
$$+ r^3\,[r^2\,(r + 10\,\mathrm{R}) + 32\,(r + \mathrm{R})\,\mathrm{R}^2\}$$
$$d_{7,6} = a\,b\,c\,[(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3)] = d_{3,3}\,d_{4,2}$$
$$= 8\,s\,[s^4 - 4\,s^2\,r\,\mathrm{R} - r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\,r\,\mathrm{R}$$
$$d_{7,7} = a\,b\,c\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{3,3}\,d_{4,3}$$
$$= 4\,s\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\,r\,\mathrm{R}$$
$$d_{7,8} = a^2\,b^2\,c^2\,(a + b + c) = d_{1,1}\,d_{6,7} = d_{1,1}\,d_{3,3}^2 = d_{3,3}\,d_{4,4} = 32\,s^3\,r^2\,\mathrm{R}^2$$

9.1.8 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^8$

$$d_{8,1} = a^8 + b^8 + c^8$$
$$= 2\{s^8 - 4\,s^6\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + 10\,s^4\,r^2\,[r\,(7\,r + 24\,\mathrm{R}) + 16\,\mathrm{R}^2]$$
$$- 4\,s^2\,r^3\,[r^2\,(7\,r + 60\,\mathrm{R}) + 32\,(5\,r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + r^4\,(r + 4\,\mathrm{R})^4\}$$

$d_{8,\,2} = (b^7\,c + c^7\,a + a^7\,b) + (b\,c^7 + c\,a^7 + a\,b^7)$
$= 2\,\{s^8 - 2\,s^6\,r\,(7\,r + 6\,\mathrm{R}) + 8\,s^4\,r^2\,(5\,r + 8\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}$
$+ 2\,s^2\,r^3\,[r^2\,(7\,r + 50\,\mathrm{R}) + 32\,(3\,r + \mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] - r^4\,(r + 4\,\mathrm{R})^4\}$
$d_{8,\,3} = (b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) + (b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$= 2\,\{s^8 - 4\,s^6\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 2\,s^4\,r^2\,[r\,(5\,r - 24\,\mathrm{R}) - 40\,\mathrm{R}^2]$
$- 4\,s^2\,r^3\,[r^2\,(r + 12\,\mathrm{R}) + 4\,(11\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + r^4\,(r + 4\,\mathrm{R})^4\}$
$d_{8,\,4} = a\,b\,c\,(a^5 + b^5 + c^5) = d_{3,\,3}\,d_{5,\,1}$
$= 8\,s^2\,[s^4 - 10\,s^2\,r\,(r + \mathrm{R}) + 5\,r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}$
$d_{8,\,5} = (b^5\,c^3 + c^5\,a^3 + a^5\,b^3) + (b^3\,c^5 + c^3\,a^5 + a^3\,b^5)$
$= 2\,\{s^8 + 2\,s^6\,r\,(r - 8\,\mathrm{R}) + 40\,s^4\,r^2\,\mathrm{R}^2$
$- 2\,s^2\,r^3\,[r\,(r^2 - 20\,\mathrm{R}^2) - 16\,\mathrm{R}^3] - r^4\,(r + 4\,\mathrm{R})^4\}$
$d_{8,\,6} = a\,b\,c\,[(b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) + (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)] = d_{3,\,3}\,d_{5,\,2}$
$= 8\,s^2\,\{s^4 - 2\,s^2\,r\,(r + 3\,\mathrm{R}) - r^2\,[r\,(3\,r + 14\,\mathrm{R}) + 8\,\mathrm{R}^2]\}\,r\,\mathrm{R}$
$d_{8,\,7} = (b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4)$
$= s^8 + 4\,s^6\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + 2\,s^4\,r^2\,[r\,(3\,r - 8\,\mathrm{R}) + 16\,\mathrm{R}^2] + 4\,s^2\,r^5\,(r + 4\,\mathrm{R})$
$+ r^4\,(r + 4\,\mathrm{R})^4$
$d_{8,\,8} = a\,b\,c\,[(b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)] = d_{3,\,3}\,d_{5,\,3}$
$= 8\,s^2\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 5\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r\,\mathrm{R}$
$d_{8,\,9} = a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) = d_{2,\,1}\,d_{6,\,7} = d_{2,\,1}\,d_{3,\,3}^2 = d_{3,\,3}\,d_{5,\,4}$
$= 32\,s^2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r^2\,\mathrm{R}^2$
$d_{8,\,10} = a^2\,b^2\,c^2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_{2,\,2}\,d_{6,\,7} = d_{2,\,2}\,d_{3,\,3}^2 = d_{3,\,3}\,d_{5,\,5}$
$= 16\,s^2\,[s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r^2\,\mathrm{R}^2$

9.1.9 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^9$

$d_{9,\,1} = a^9 + b^9 + c^9$
$= 2\,s\,\{s^8 - 18\,s^6\,r\,(2\,r + \mathrm{R}) + 18\,s^4\,r^2\,[7\,r\,(r + 3\,\mathrm{R}) + 12\,\mathrm{R}^2]$
$- 6\,s^2\,r^3\,[7\,r^2\,(2\,r + 15\,\mathrm{R}) + 80\,(3\,r + 2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 9\,r^4\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$
$d_{9,\,2} = (b^8\,c + c^8\,a + a^8\,b) + (b\,c^8 + c\,a^8 + a\,b^8) = 2\,s\,\{s^8 - 2\,s^6\,r\,(10\,r + 7\,\mathrm{R})$
$+ 2\,s^4\,r^2\,[r\,(7\,r + 51\,\mathrm{R}) + 52\,\mathrm{R}^2] + 2\,s^2\,r^3\,[r^2\,(14\,r + 75\,\mathrm{R}) + 16\,(5\,r - 2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]$
$- r^4\,(7\,r + 10\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$
$d_{9,\,3} = (b^7\,c^2 + c^7\,a^2 + a^7\,b^2) + (b^2\,c^7 + c^2\,a^7 + a^2\,b^7)$
$= 2\,s\,\{s^8 - 2\,s^6\,r\,(4\,r + 9\,\mathrm{R}) + 2\,s^4\,r^2\,[7\,r\,(-r + 7\,\mathrm{R}) + 60\,\mathrm{R}^2]$
$- 2\,s^2\,r^3\,[r\,(35\,r + 176\,\mathrm{R}) + 192\,\mathrm{R}^2]\,\mathrm{R} + 5\,r^4\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$
$d_{9,\,4} = a\,b\,c\,(a^6 + b^6 + c^7) = d_{3,\,3}\,d_{6,\,1}$
$= 8\,s\,\{s^6 - 3\,s^4\,r\,(5\,r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,s^2\,r^2\,[r\,(5\,r + 24\,\mathrm{R}) + 24\,\mathrm{R}^2]$
$- r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}\,r\,\mathrm{R}$
$d_{9,\,5} = (b^6\,c^3 + c^6\,a^3 + a^6\,b^3) + (b^3\,c^6 + c^3\,a^6 + a^3\,b^6) = 2\,s\,\{s^8 - 18\,s^6\,r\,\mathrm{R}$
$+ 6\,s^4\,r^2\,[r\,(-r + 3\,\mathrm{R}) + 12\,\mathrm{R}^2]$
$- s^2\,r^3\,[2\,r^2\,(4\,r + 3\,\mathrm{R}) + 16\,(-3\,r + 2\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] - 3\,r^4\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$

$d_{9,6} = a\,b\,c\,[(b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) + (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5)] = d_{3,3}\,d_{6,2}$
$= 8\,s\,\{s^6 - s^4\,r\,(5\,r + 8\,\mathrm{R}) - s^2\,r^2\,[r\,(5\,r + 12\,\mathrm{R}) - 8\,\mathrm{R}^2] + r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}\,r\,\mathrm{R}$
$d_{9,7} = (b^5\,c^4 + c^5\,a^4 + a^5\,b^4) + (b^4\,c^5 + c^4\,a^5 + a^4\,b^5)$
$= 2\,s\,\{s^8 + 2\,s^6\,r\,(2\,r - 9\,\mathrm{R}) + 2\,s^4\,r^2\,[r\,(3\,r - 11\,\mathrm{R}) + 28\,\mathrm{R}^2] + 2\,s^2\,r^5\,(2\,r + 5\,\mathrm{R})$
$+ r^4\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}$
$d_{9,8} = a\,b\,c\,[(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)] = d_{3,3}\,d_{6,3}$
$= 8\,s\,\{s^6 + s^4\,r\,(r - 12\,\mathrm{R}) + s^2\,r^2\,[r\,(-r + 8\,\mathrm{R}) + 24\,\mathrm{R}^2] - r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}\,r\,\mathrm{R}$
$d_{9,9} = a^2\,b^2\,c^2\,(a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1}\,d_{6,7} = d_{3,1}\,d_{3,3}^2 = d_{3,3}\,d_{6,4}$
$= 32\,s^3\,[s^2 - 3\,r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\,r^2\,\mathrm{R}^2$
$d_{9,10} = a\,b\,c\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) = d_{3,3}\,d_{6,5}$
$= 4\,s\,\{s^6 + 3\,s^4\,r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + 3\,s^2\,r^4 + r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})^3\}\,r\,\mathrm{R}$
$d_{9,11} = a^2\,b^2\,c^2\,[(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)] = d_{3,2}\,d_{6,7}$
$= d_{3,2}\,d_{3,3}^2 = d_{3,3}\,d_{6,6} = 32\,s^3\,[s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R})]\,r^2\,\mathrm{R}^2$
$d_{9,12} = a^3\,b^3\,c^3 = d_{3,3}^3 = 64\,s^3\,r^3\,\mathrm{R}^3$

9.1.10 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^{10}$

$d_{10,1} = a^{10} + b^{10} + c^{10}$
$d_{10,2} = (b^9\,c + c^9\,a + a^9\,b) + (b\,c^9 + c\,a^9 + a\,b^9)$
$d_{10,3} = (b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) + (b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$d_{10,4} = a\,b\,c\,(a^7 + b^7 + c^7) = d_{3,3}\,d_{7,1}$
$d_{10,5} = (b^7\,c^3 + c^7\,a^3 + a^7\,b^3) + (b^3\,c^7 + c^3\,a^7 + a^3\,b^7)$
$d_{10,6} = a\,b\,c\,[(b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) + (b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)] = d_{3,3}\,d_{7,2}$
$d_{10,7} = (b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + (b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) = d_{3,3}\,d_{7,3}$
$d_{10,8} = a\,b\,c\,[(b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2) + (b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5)]$
$d_{10,9} = a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) = d_{3,3}\,d_{7,4} = d_{3,3}^2\,d_{4,1} = d_{4,1}\,d_{6,7}$
$d_{10,10} = (b^5\,c^5 + c^5\,a^5 + a^5\,b^5)$
$d_{10,11} = a\,b\,c\,[(b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3) + (b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4)] = d_{3,3}\,d_{7,5}$
$d_{10,12} = a^2\,b^2\,c^2\,[(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3)] = d_{3,3}\,d_{7,6} =$
$d_{3,3}^2\,d_{4,2} = d_{4,2}\,d_{6,7}$
$d_{10,13} = a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{3,3}\,d_{7,7} = d_{3,3}^2\,d_{4,3} = d_{4,3}\,d_{6,7}$
$d_{10,14} = a^3\,b^3\,c^3\,(a + b + c) = d_{3,3}\,d_{7,8} = d_{3,3}^2\,d_{4,4} = d_{4,4}\,d_{6,7}$

9.1.11 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^{12}$

$d_{12,1} = a^{12} + b^{12} + c^{12}$
$d_{12,2} = (b^{11}\,c + c^{11}\,a + a^{11}\,b) + (b\,c^{11} + c\,a^{11} + a\,b^{11})$
$d_{12,3} = (b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2) + (b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10})$
$d_{12,4} = a\,b\,c\,(a^9 + b^9 + c^9)$
$d_{12,5} = (b^9\,c^3 + c^9\,a^3 + a^9\,b^3) + (b^3\,c^9 + c^3\,a^9 + a^3\,b^9)$
$d_{12,6} = a\,b\,c\,[(b^8\,c + c^8\,a + a^8\,b) + (b\,c^8 + c\,a^8 + a\,b^8)]$

$d_{12,7} = (b^8 c^4 + c^8 a^4 + a^8 b^4) + (b^4 c^8 + c^4 a^8 + a^4 b^8)$
$d_{12,8} = a\,b\,c\,[(b^7 c^2 + c^7 a^2 + a^7 b^2) + (b^2 c^7 + c^2 a^7 + a^2 b^7)] = d_{3,3}\, d_{9,3}$
$d_{12,9} = a^2 b^2 c^2\, (a^6 + b^6 + c^6) = d_{3,3}\, d_{9,4} = d_{3,3}^2\, d_{6,1} = d_{6,1}\, d_{6,7}$
$d_{12,10} = (b^7 c^5 + c^7 a^5 + a^7 b^5) + (b^5 c^7 + c^5 a^7 + a^5 b^7)$
$d_{12,11} = a\,b\,c\,[(b^6 c^3 + c^6 a^3 + a^6 b^3) + (b^3 c^6 + c^3 a^6 + a^3 b^6)] = d_{3,3}\, d_{9,5}$
$d_{12,12} = a^2 b^2 c^2\,[(b^5 c + c^5 a + a^5 b) + (b\, c^5 + c\, a^5 + a\, b^5)] = d_{3,3}\, d_{9,6} = d_{3,3}^2\, d_{6,2} = d_{6,2}\, d_{6,7}$
$d_{12,13} = (b^6 c^6 + c^6 a^6 + a^6 b^6)$
$d_{12,14} = a\,b\,c\,[(b^5 c^4 + c^5 a^4 + a^5 b^4) + (b^4 c^5 + c^4 a^5 + a^4 b^5)] = d_{3,3}\, d_{9,7}$
$d_{12,15} = a^2 b^2 c^2\,[(b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^4 b^2) + (b^2 c^4 + c^2 a^4 + a^2 b^4)] = d_{3,3}\, d_{9,8} = d_{3,3}^2\, d_{6,3} = d_{6,3}\, d_{6,7}$
$d_{12,16} = a^3 b^3 c^3\, (a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,3}\, d_{9,9} = d_{3,3}^2\, d_{6,4} = d_{6,4}\, d_{6,7} = d_{3,1}\, d_{3,3}^3$
$d_{12,17} = a^2 b^2 c^2\, (b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3) = d_{3,3}\, d_{9,10} = d_{3,3}^2\, d_{6,5} = d_{6,5}\, d_{6,7}$
$d_{12,18} = a^3 b^3 c^3\,[(b^2 c + c^2 a + a^2 b) + (b\, c^2 + c\, a^2 + a\, b^2)] = d_{3,3}\, d_{9,11} = d_{3,3}^2\, d_{6,6} = d_{6,6}\, d_{6,7} = d_{3,2}\, d_{3,3}^3$
$d_{12,19} = a^4 b^4 c^4 = d_{3,3}^4$

9.1.12 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^{16}$

$d_{16,1} = a^{16} + b^{16} + c^{16}$
$d_{16,2} = (b^{15} c + c^{15} a + a^{15} b) + (b\, c^{15} + c\, a^{15} + a\, b^{15})$
$d_{16,3} = (b^{14} c^2 + c^{14} a^2 + a^{14} b^2) + (b^2 c^{14} + c^2 a^{14} + a^2 b^{14})$
$d_{16,4} = a\,b\,c\,(a^{13} + b^{13} + c^{13})$
$d_{16,5} = (b^{13} c^3 + c^{13} a^3 + a^{13} b^3) + (b^3 c^{13} + c^3 a^{13} + a^3 b^{13})$
$d_{16,6} = a\,b\,c\,[(b^{12} c + c^{12} a + a^{12} b) + (b\, c^{12} + c\, a^{12} + a\, b^{12})]$
$d_{16,7} = (b^{12} c^4 + c^{12} a^4 + a^{12} b^4) + (b^4 c^{12} + c^4 a^{12} + a^4 b^{12})$
$d_{16,8} = a\,b\,c\,[(b^{11} c^2 + c^{11} a^2 + a^{11} b^2) + (b^2 c^{11} + c^2 a^{11} + a^2 b^{11})]$
$d_{16,9} = a^2 b^2 c^2\, (a^{10} + b^{10} + c^{10})$
$d_{16,10} = (b^{11} c^5 + c^{11} a^5 + a^{11} b^5) + (b^5 c^{11} + c^5 a^{11} + a^5 b^{11})$
$d_{16,11} = a\,b\,c\,[(b^{10} c^3 + c^{10} a^3 + a^{10} b^3) + (b^3 c^{10} + c^3 a^{10} + a^3 b^{10})]$
$d_{16,12} = a^2 b^2 c^2\,[b^9 c + c^9 a + a^9 b) + (b\, c^9 + c\, a^9 + a\, b^9]$
$d_{16,13} = (b^{10} c^6 + c^{10} a^6 + a^{10} b^6) + (b^6 c^{10} + c^6 a^{10} + a^6 b^{10})$
$d_{16,14} = a\,b\,c\,[(b^9 c^4 + c^9 a^4 + a^9 b^4) + (b^4 c^9 + c^4 a^9 + a^4 b^9)]$
$d_{16,15} = a^2 b^2 c^2\,[(b^8 c^2 + c^8 a^2 + a^8 b^2) + (b^2 c^8 + c^2 a^8 + a^2 b^8)]$
$d_{16,16} = a^3 b^3 c^3\, (a^7 + b^7 + c^7)$
$d_{16,17} = (b^9 c^7 + c^9 a^7 + a^9 b^7) + (b^7 c^9 + c^7 a^9 + a^7 b^9)$
$d_{16,18} = a\,b\,c\,[(b^8 c^5 + c^8 a^5 + a^8 b^5) + (b^5 c^8 + c^5 a^8 + a^5 b^8)]$
$d_{16,19} = a^2 b^2 c^2\,[(b^7 c^3 + c^7 a^3 + a^7 b^3) + (b^3 c^7 + c^3 a^7 + a^3 b^7)]$
$d_{16,20} = a^3 b^3 c^3\,[(b^6 c + c^6 a + a^6 b) + (b\, c^6 + c\, a^6 + a\, b^6)]$
$d_{16,21} = (b^8 c^8 + c^8 a^8 + a^8 b^8)$
$d_{16,22} = a\,b\,c\,[(b^7 c^6 + c^7 a^6 + a^7 b^6) + (b^6 c^7 + c^6 a^7 + a^6 b^7)]$

$d_{16,\,23} = a^2\, b^2\, c^2\, [(b^6\, c^4 + c^6\, a^4 + a^6\, b^4) + (b^4\, c^6 + c^4\, a^6 + a^4\, b^6)]$
$d_{16,\,24} = a^3\, b^3\, c^3\, [(b^5\, c^2 + c^5\, a^2 + a^5\, b^2) + (b^2\, c^5 + c^2\, a^5 + a^2\, b^5)]$
$d_{16,\,25} = a^4\, b^4\, c^4\, (a^4 + b^4 + c^4)$
$d_{16,\,26} = a^2\, b^2\, c^2\, (b^5\, c^5 + c^5\, a^5 + a^5\, b^5)$
$d_{16,\,27} = a^3\, b^3\, c^3\, [(b^4\, c^3 + c^4\, a^3 + a^4\, b^3) + (b^3\, c^4 + c^3\, a^4 + a^3\, b^4)]$
$d_{16,\,28} = a^4\, b^4\, c^4\, [(b^3\, c + c^3\, a + a^3\, b) + (b\, c^3 + c\, a^3 + a\, b^3)]$
$d_{16,\,29} = a^4\, b^4\, c^4\, (b^2\, c^2 + c^2\, a^2 + a^2\, b^2)$
$d_{16,\,30} = a^5\, b^5\, c^5\, (a + b + c)$

9.2 Annexe B : Expressions des dénominateurs d_i des coordonnées aréolaires des points X_i en fonction de a, b, c et en fonction des polynômes $d_{i,\,j}$

Remarque : ce n'est pas parce que d_i est un multiple de d_1 que $\frac{d_i}{d_1}$ est un polynôme en a, b, c, mais il peut l'être et dans ce cas il est noté $d_i^{'}$ et ce n'est pas parce que d_i est un multiple de d_3 que $\frac{d_i}{d_3}$ est un polynôme en a, b, c, mais il peut l'être et dans ce cas il est noté δ_i. Bien entendu si d_i est multiple de d_3 il est également multiple de d_1 puisque $d_3 = d_1\, d_3^{'}$ et on n'utilisera que δ_i et non $d_i^{'}$ (exepté lorsque $\delta_i = 1$ où l'on utilisera $d_i^{'}$).

9.2.1 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^0$

Rappel :
$\mathrm{J} \triangleq \frac{\sqrt{(a^6+b^6+c^6)-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)-(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)+3\,a^2\,b^2\,c^2}}{a\,b\,c}$

$d_2 = 3$
$d_{30} = 0$
$d_{521} = 0$

$\delta_3 = 1$
$\delta_4 = 1$
$\delta_5 = 1$
$\delta_{20} = 1$
$\delta_{40} = 1$

9.2.2 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^1$

$d_1 = (a + b + c)$
$d_8 = (a + b + c) = d_1$
$d_{10} = (a + b + c) = d_1$

Autres valeurs

$d_{145} = (a + b + c) = d_1$
$d_{175} = (a + b + c) - (r_1 + r_2 + r_3) = d_1 - (r_1 + r_2 + r_3)$
$d_{176} = (a + b + c) + (r_1 + r_2 + r_3) = d_1 + (r_1 + r_2 + r_3)$
$d_{481} = (a + b + c) - 2\,(r_1 + r_2 + r_3) = d_1 - 2\,(r_1 + r_2 + r_3)$
$d_{482} = (a + b + c) + 2\,(r_1 + r_2 + r_3) = d_1 + 2\,(r_1 + r_2 + r_3)$
$d_{551} = (a + b + c) = d_1$

9.2.3 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^2$

$d_6 = (a^2 + b^2 + c^2)$
$d_7 = -(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_9 = -(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_7$
$d_{37} = (b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_{44} = -(a^2 + b^2 + c^2) + (b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_{45} = -(a^2 + b^2 + c^2) + 4\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_{69} = (a^2 + b^2 + c^2) = d_6$
$d_{75} = (b\,c + c\,a + a\,b) = d_{37}$
$d_{86} = (a^2 + b^2 + c^2) + 3\,(b\,c + c\,a + a\,b)$

Autres valeurs

$d_{141} = (a^2 + b^2 + c^2) = d_6$
$d_{142} = -(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_7$
$d_{144} = (a^2 + b^2 + c^2) - 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = -d_7$

$d'_{390} = (a^2 + b^2 + c^2) - 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = -d_7$
$d'_{1001} = (a^2 + b^2 + c^2) - 2\,(b\,c + c\,a + a\,b) = -d_7$

$\delta_{182} = -(a^2 + b^2 + c^2) = -d_6$

9.2.4 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^3$

Rappel : $\mathrm{D} \triangleq (b-c)\,(c-a)\,(a-b) = -(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$

$d_{11} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c$
$= d_{3,1} - d_{3,2} + 3\,d_{3,3}$
$d_{31} = (a^3 + b^3 + c^3) = d_{3,1}$
$d_{38} = (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) = d_{3,2}$
$d_{42} = (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) = d_{38} = d_{3,2}$
$d_{43} = (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 3\,a\,b\,c = d_{3,2} - 3\,d_{3,3}$
$d_{55} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) = -d_{3,1} + d_{3,2}$
$d_{57} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 6\,a\,b\,c$
$= d_{3,1} - d_{3,2} + 6\,d_{3,3}$

$d_{63} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) = d_{55}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2}$
$d_{81} = (a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c$
$= d_{3,\,1} + d_{3,\,2} + 3\,d_{3,\,3}$
$d_{88} = (a^3 + b^3 + c^3) - 3\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - 3\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 15\,a\,b\,c$
$= d_{3,\,1} - 3\,d_{3,\,2} + 15\,d_{3,\,3}$
$d_{89} = (a^3 + b^3 + c^3) + \frac{15}{4}\,a\,b\,c = d_{3,\,1} + \frac{15}{4}\,d_{3,\,3}$
$d_{100} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c$
$= d_{11} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 3\,d_{3,\,3}$

$d_3^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3} = (2\,a^{'})\,(2\,b^{'})\,(2\,c^{'})$
$d_4^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + \ a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= d_3^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_5^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 2\,a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= d_3^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{12}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b^2\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - a\,b\,c$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - d_{3,\,3}$
$d_{20}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= d_3^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{21}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + a\,b\,c$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} + d_{3,\,3}$
$d_{35}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - a\,b\,c$
$= d_{12}^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - d_{3,\,3}$
$d_{36}^{'} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 3\,a\,b\,c$
$= d_{11} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 3\,d_{3,\,3}$
$d_{40}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= d_3^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{46}^{'} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 4\,a\,b\,c$
$= d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 4\,d_{3,\,3}$
$d_{56}^{'} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 4\,a\,b\,c$
$= d_{46}^{'} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 4\,d_{3,\,3}$
$d_{58}^{'} = (a^3 + b^3 + c^3) + a\,b\,c = d_{3,\,1} + d_{3,\,3}$
$d_{65}^{'} = a\,b\,c = d_{3,\,3}$
$d_{72}^{'} = a\,b\,c = d_{65}^{'} = d_{3,\,3}$
$d_{78}^{'} = (a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 4\,a\,b\,c$
$= d_{46}^{'} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 4\,d_{3,\,3}$
$d_{79}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + a\,b\,c$
$= d_{21}^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} + d_{3,\,3}$
$d_{80}^{'} = -(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 3\,a\,b\,c$
$= -d_{11} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 3\,d_{3,\,3}$

$\delta_{84} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c$
$= d_3^{'} = -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$

Autres valeurs

$d_{165} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{354} = a\,b\,c = d_{65}^{'} = d_{3,\,3}$
$d_{390} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 6\,a\,b\,c$
$= d_{3,\,1} - d_{3,\,2} - 6\,d_{3,\,3} = d_1\,d_{390}^{'}$
$d_{1001} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 6\,a\,b\,c$
$= d_{390} = d_{3,\,1} - d_{3,\,2} - 6\,d_{3,\,3} = d_1\,d_{1001}^{'}$

$d_{140}^{'} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 2\,a\,b\,c = -d_3^{'}$
$= d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 2\,d_{3,\,3}$
$d_{191}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + a\,b\,c = d_{21}^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} + 2\,d_{3,\,3}$
$d_{376}^{'} = (a^3+b^3+c^3) - (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 2\,a\,b\,c = -d_3^{'}$
$= d_{3,\,1} - d_{3,\,2} + 2\,d_{3,\,3}$
$d_{381}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{382}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{546}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{547}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{548}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{549}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$
$d_{550}^{'} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a\,b\,c = d_3^{'}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 2\,d_{3,\,3}$

$\delta_{104} = -(a^3+b^3+c^3) + (b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + (b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 3\,a\,b\,c = -d_{11}$
$= -d_{3,\,1} + d_{3,\,2} - 3\,d_{3,\,3}$

9.2.5 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^4$

Certains de ces termes sont multiples de d_1.

$d_3 = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = \mathrm{S} = d_1\,d_3^{'}$
$d_4 = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d_4^{'}$

$d_5 = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d_5^{'}$
$d_{12} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d_{12}^{'}$
$d_{20} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d_{20}^{'}$
$d_{21} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 3\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d_{21}^{'}$
$d_{32} = (a^4+b^4+c^4)$
$d_{35} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{12}$
$= d_1\,d_{35}^{'}$
$d_{36} = (a^4+b^4+c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d_{36}^{'}$
$d_{39} = (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_\Omega = d_{\Omega'}$
$d_{40} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d_{40}^{'}$
$d_{41} = -(a^4+b^4+c^4) + (b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3)$
$d_{46} = (a^4+b^4+c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d_{46}^{'}$
$d_{56} = (a^4+b^4+c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{46} = d_1\,d_{56}^{'}$
$d_{58} = (a^4+b^4+c^4) + (b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + a\,b\,c\,(a+b+c)$
$= d_1\,d_{58}^{'}$
$d_{65} = a\,b\,c\,(a+b+c) = d_1\,d_{65}^{'}$
$d_{72} = a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{65} = d_1\,d_{72}^{'}$
$d_{76} = (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{39}$
$d_{78} = (a^4+b^4+c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{46}$
$= d_1\,d_{78}^{'}$
$d_{79} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 3\,a\,b\,c\,(a+b+c) = d_{21}$
$= d_1\,d_{79}^{'}$
$d_{80} = -(a^4+b^4+c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) - a\,b\,c\,(a+b+c) = -d_{36}$
$= d_1\,d_{80}^{'}$
$d_{83} = (a^4+b^4+c^4) + 3\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2)$
$d_{85} = -(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) - (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2)$
$+ a\,b\,c\,(a+b+c)$
$d_{99} = (a^4+b^4+c^4) - (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2)$
$d_{101} = (a^4+b^4+c^4) - (b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) - (b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3) + a\,b\,c\,(a+b+c)$

$\delta_{98} = -(a^4+b^4+c^4) + (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = -d_{99}$

Termes faisant intervenir Δ

$d_{13} = 3\,d_3 + 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta$
$d_{14} = 3\,d_3 - 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta$
$d_{15} = \sqrt{3}\,d_3 + 4\,d_6\,\Delta = \frac{\sqrt{3}}{3}\,d_{13}$
$d_{16} = -\sqrt{3}\,d_3 + 4\,d_6\,\Delta = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,d_{14}$
$d_{17} = 5\,d_3 + 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta$
$d_{18} = 5\,d_3 - 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta$
$d_{61} = d_3 + 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta$
$d_{62} = d_3 - 4\,\sqrt{3}\,d_6\,\Delta$

Autres valeurs

$d_{115} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{99}$
$d_{140} = (a^4 + b^4 + c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = -d_3 = d_1\,d'_{140}$
$d_{183} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 4\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2)$
$d_{187} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{99}$
$d_{191} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + 3\,a\,b\,c\,(a + b + c) = d_{21}$
$= d_1\,d'_{191}$
$d_{230} = (a^4 + b^4 + c^4) - (b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{99}$
$d_{376} = (a^4 + b^4 + c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = -d_3 = d_1\,d'_{376}$
$d_{381} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{381}$
$d_{382} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{382}$
$d_{546} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{546}$
$d_{547} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{547}$
$d_{548} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{548}$
$d_{549} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{549}$
$d_{550} = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3 = d_1\,d'_{550}$
$d_{1113} = \mathrm{J}\,d_3$
$d_{1114} = \mathrm{J}\,d_3 = d_{1113}$

$d'_{291} = -(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) + a\,b\,c\,(a + b + c)$
$d'_{329} = (a^4 + b^4 + c^4) - 2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = -d_3$

Autres valeurs faisant intervenir Δ

$d_{485} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+2\,(a^2+b^2+c^2)\,\Delta = d_3+2\,d_6\,\Delta$
$d_{486} = -(a^4+b^4+c^4)+2\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)-2\,(a^2+b^2+c^2)\,\Delta = d_3-2\,d_6\,\Delta$

9.2.6 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^5$

$d_{19} = (a^5 + b^5 + c^5) - (b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) - (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)$
$+ 2\,a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_{48} = -(a^5 + b^5 + c^5) + (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$d_{71} = -(b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) - (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)$
$+ (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_{77} = -(a^5 + b^5 + c^5) - (b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) - (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)$
$+ 2\,(b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$- 2\,a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_{82} = (a^5 + b^5 + c^5) + (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$+ a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b)$
$d_{87} = -(b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^2 + b^2 + c^2) - (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$+ a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b)$

Autres valeurs

$d_{256} = (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + a\,b\,c\,(a^2 + b^2 + c^2)$
$+ (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3) + a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b)$

$d_{284} = -(a^5 + b^5 + c^5) + (b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + a\,b\,c\,(a^2 + b^2 + c^2)$
$+ (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b)$

$d_{291} = -(b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) + a\,b\,c\,(a^2 + b^2 + c^2) - (b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$+ a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_1\,d_{291}^{'}$

$d_{329} = (a^5 + b^5 + c^5) + (b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b) + (b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4)$
$- 2\,(b^3\,c^2 + c^3\,a^2 + a^3\,b^2) - 2\,(b^2\,c^3 + c^2\,a^3 + a^2\,b^3)$
$- 2\,a\,b\,c\,(b\,c + c\,a + a\,b) = d_1\,d_{329}^{'}$

$d_{560} = a^5 + b^5 + c^5$

$d_{657} = -(b - c)\,(c - a)\,(a - b)\,[(a^2 + b^2 + c^2) - 2\,(b\,c + c\,a + a\,b)] = d_7\,\mathrm{D}$

9.2.7 Termes de dimensions $[\mathrm{L}]^6$

Remarque :

$\mathrm{D}^2 = (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) - 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$- 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) + 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$- 6\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{6,3} - 2\,d_{6,4} - 2\,d_{6,5} + 2\,d_{6,6} - 6\,d_{6,7}$

$d_{22} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$

$d_{23} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-3\,a^2\,b^2\,c^2$

$d_{25} = (a^6+b^6+c^6)-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)-(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)+6\,a^2\,b^2\,c^2$

$d_{27} = (a^6+b^6+c^6)-(b^5\,c+c^5\,a+a^5\,b)-(b\,c^5+c\,a^5+a\,b^5)-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)$
$- a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c^4 + c^4\,a^2 + a^2\,b^4) + 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3)$
$+ 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + 6\,a^2\,b^2\,c^2$

$d_{33} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) - 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$+ (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) + 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$- 6\,a^2\,b^2\,c^2$

$d_{51} = a^2\,b^2\,c^2 = (d_{65}^{'})^2$

$d_{92} = -(b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5) + a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$+ 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3)$

$d_{468} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$- 3\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{23}$

$d_{28}^{'} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) - a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$- (b^2\,c^4 + c^4\,a^2 + a^2\,b^4) + a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$+ 4\,a^2\,b^2\,c^2$

$d_{29}^{'} = -(a^6 + b^6 + c^6) - (b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5)$
$+ (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) + (b^2\,c^4 + c^4\,a^2 + a^2\,b^4)$
$+ 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) - 2\,a^2\,b^2\,c^2$

$d'_{34} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) - 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$- (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) + 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$- 2\,a^2\,b^2\,c^2$

$d'_{47} = (a^6 + b^6 + c^6) - (b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5)$
$- (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$+ 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) - a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2$

$d'_{60} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$+ 2\,a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + 2\,a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) + a^2\,b^2\,c^2$

$d'_{73} = -(b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - (b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5) + 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3)$
$+ 2\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) - a\,b\,c\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) - a\,b\,c\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2$

$d'_{90} = (a^6 + b^6 + c^6) - 2\,(b^5\,c + c^5\,a + a^5\,b) - 2\,(b\,c^5 + c\,a^5 + a\,b^5)$
$- (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + 2\,a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) - (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$+ 4\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3) - 2\,a^2\,b^2\,c^2$

$\delta_{24} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-4\,a^2\,b^2\,c^2$

$\delta_{26} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-2\,a^2\,b^2\,c^2$
$= q_1\,q_2\,q_2$

$\delta_{49} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-a^2\,b^2\,c^2$

$\delta_{52} = -a^2\,b^2\,c^2 = -d_{51}$

$\delta_{54} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)+a^2\,b^2\,c^2$

$\delta_{64} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-2\,a^2\,b^2\,c^2$
$= \delta_{26} = q_1\,q_2\,q_2$

$\delta_{68} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-2\,a^2\,b^2\,c^2$
$= \delta_{26} = q_1\,q_2\,q_2$

$\delta_{74} = -(a^6+b^6+c^6)+(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)+(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-3\,a^2\,b^2\,c^2$
$= d_{23}$

Autres valeurs

$d_{110} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$- 3\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{23}$

$d_{111} = (a^6 + b^6 + c^6) - 3\,(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) - 3\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$+ 15\,a^2\,b^2\,c^2$

$d_{181} = a\,b\,c\,(a^3 + b^3 + c^3) + 3\,a^2\,b^2\,c^2$

$d_{182} = (a^6+b^6+c^6)-(b^4\,c^2+c^4\,a^2+a^4\,b^2)-(b^2\,c^4+c^2\,a^4+a^2\,b^4)-6\,a^2\,b^2\,c^2$
$= d_3\,\delta_{182}$

$\delta_{186} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$- 3\,a^2\,b^2\,c^2 = d_{23}$

$\delta_{378} = -(a^6 + b^6 + c^6) + (b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + (b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) = d_{22}$

9.2.8 Termes de dimension [L]^7

Les d_i sont multiples de d_1 : $d_i = d_1\, d_i^{'}$.

$d_{28} = (a^7+b^7+c^7)+(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)+(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)-(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)$
$-\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)-(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)-(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$
$-\,a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)-a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)-(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)$
$+\,2\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+6\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_1\,d_{28}^{'}$

$d_{29} = -(a^7+b^7+c^7)-2\,(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)-2\,(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)$
$-\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)+3\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$
$+\,2\,a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+2\,a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)+3\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)$
$+\,2\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)-2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_1\,d_{29}^{'}$

$d_{34} = (a^7+b^7+c^7)+(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)+(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)-(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)$
$-\,2\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)-(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)-(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$
$-\,a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)-a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)-(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)$
$+\,4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_1\,d_{34}^{'}$

$d_{47} = (a^7+b^7+c^7)-2\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)-2\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)$
$+\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)+(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4) = d_1\,d_{47}^{'}$

$d_{60} = -(a^7+b^7+c^7)-(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)-(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)$
$+\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)+(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)+(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$
$+\,3\,a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+3\,a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)+(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)$
$+\,4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_1\,d_{60}^{'}$

$d_{73} = -(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)-(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)-(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)$
$-\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)+2\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)$
$+\,a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)+2\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4) = d_1\,d_{73}^{'}$

$d_{84} = (a^7+b^7+c^7)-(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)-(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)$
$-\,3\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)+2\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)-3\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)$
$+\,3\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)+a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)$
$+3\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)-4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_3\,\delta_{84}$

$d_{90} = (a^7+b^7+c^7)-(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)-(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)$
$-\,3\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)-2\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)-3\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)$
$+\,3\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)+a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)$
$+3\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)+4\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)-2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c) = d_1\,d_{90}^{'}$

Autre valeur

$d_{104} = (a^7+b^7+c^7)-(b^6\,c+c^6\,a+a^6\,b)-(b\,c^6+c\,a^6+a\,b^6)$
$-\,3\,(b^5\,c^2+c^5\,a^2+a^5\,b^2)+3\,a\,b\,c\,(a^4+b^4+c^4)-3\,(b^2\,c^5+c^2\,a^5+a^2\,b^5)$
$+\,3\,(b^4\,c^3+c^4\,a^3+a^4\,b^3)+a\,b\,c\,(b^3\,c+c^3\,a+a^3\,b)+a\,b\,c\,(b\,c^3+c\,a^3+a\,b^3)$
$+\,3\,(b^3\,c^4+c^3\,a^4+a^3\,b^4)-6\,a\,b\,c\,(b^2\,c^2+c^2\,a^2+a^2\,b^2)+2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a+b+c)$
$= d_3\,\delta_{104}$

9.2.9 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^8$

$d_{50} = (a^8 + b^8 + c^8) - 2\,(b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) - 2\,(b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$+ 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2)$
$d_{53} = (a^8 + b^8 + c^8) - 2\,(b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) - 2\,(b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$+ 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2)$
$d_{59} = (a^8 + b^8 + c^8) - 2\,(b^7\,c + c^7\,a + a^7\,b) - 2\,(b\,c^7 + c\,a^7 + a\,b^7)$
$+ 6\,a\,b\,c\,(a^5 + b^5 + c^5) + 2\,(b^5\,c^3 + c^5\,a^3 + a^5\,b^3) - 4\,a\,b\,c\,(b^4\,c + c^4\,a + a^4\,b)$
$- 4\,a\,b\,c\,(b\,c^4 + c\,a^4 + a\,b^4) + 2\,(b^3\,c^5 + c^3\,a^5 + a^3\,b^5) - 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4)$
$+ 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b\,c + c\,a + a\,b).$
$d_{66} = -(a^8 + b^8 + c^8) + 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) = d_6\,\delta_{26}$
$d_{67} = -(a^8 + b^8 + c^8) + 2\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) - a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2)$
$= d_6\,d_{23}$
$d_{95} = (a^8 + b^8 + c^8) - 5\,(b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) - 5\,(b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$+ 8\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2)$
$d_{98} = (a^8 + b^8 + c^8) - 3\,(b^6\,c^2 + c^6\,a^2 + a^6\,b^2) - 3\,(b^2\,c^6 + c^2\,a^6 + a^2\,b^6)$
$+ 4\,(b^4\,c^4 + c^4\,a^4 + a^4\,b^4) + a^2\,b^2\,c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) = d_1\,d'_{98}$

9.2.10 Terme de dimension $[\mathrm{L}]^9$

$d'_{91} = (b^8\,c + c^8\,a + a^8\,b) + (b\,c^8 + c\,a^8 + a\,b^8)$
$- (b^7\,c^2 + c^7\,a^2 + a^7\,b^2) - a\,b\,c\,(a^6 + b^6 + c^6) - (b^2\,c^7 + c^2\,a^7 + a^2\,b^7)$
$- 3\,(b^6\,c^3 + c^6\,a^3 + a^6\,b^3) - 3\,(b^3\,c^6 + c^3\,a^6 + a^3\,b^6)$
$+ 3\,(b^5\,c^4 + c^5\,a^4 + a^5\,b^4) + a\,b\,c\,(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2) + a\,b\,c\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4)$
$+ 3\,(b^4\,c^5 + c^4\,a^5 + a^4\,b^5) - 2\,a\,b\,c\,(b^3\,c^3 + c^3\,a^3 + a^3\,b^3)$
$+ a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) + a^2\,b^2\,c^2\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) - 2\,a^3\,b^3\,c^3.$

9.2.11 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^{10}$

Ces termes sont multiples de d_1 et certains sont multiples de d_3.

$d_{24} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 6\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 6\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{24}$
$d_{26} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{26}$
$d_{49} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 3\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) = d_3\,\delta_{49}$
$d_{52} = a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{52}$

$d_{54} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{54}$
$d_{64} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{64}$
$d_{68} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{68}$
$d_{74} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4) + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6)$
$- 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{74}$

$d_{91} = (b^9\,c + c^9\,a + a^9\,b) + (b\,c^9 + c\,a^9 + a\,b^9) + a\,b\,c\,(a^7 + b^7 + c^7)$
$- 4\,(b^7\,c^3 + c^7\,a^3 + a^7\,b^3) - 2\,a\,b\,c\,(b^6\,c + c^6\,a + a^6\,b) - 2\,a\,b\,c\,(b\,c^6 + c\,a^6 + a\,b^6)$
$- 4\,(b^3\,c^7 + c^3\,a^7 + a^3\,b^7) - 2\,a\,b\,c\,(b^5\,c^2 + c^5\,a^2 + a^5\,b^2)$
$-2\,a\,b\,c\,(b^2\,c^5 + c^2\,a^5 + a^2\,b^5) + 6\,(b^5\,c^5 + c^5\,a^5 + a^5\,b^5) + 2\,a\,b\,c\,(b^4\,c^3 + c^4\,a^3 + a^4\,b^3)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^3\,c + c^3\,a + a^3\,b) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b\,c^3 + c\,a^3 + a\,b^3)$
$+ 2\,a\,b\,c\,(b^3\,c^4 + c^3\,a^4 + a^3\,b^4) = d_1\,d'_{91}$

Autres valeurs

$d_{186} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 5\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4 + 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6)$
$- 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_{74} = d_3\,\delta_{186}$
$d_{378} = (a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 3\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 3\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2) = d_3\,\delta_{378}$

9.2.12 Termes de dimension $[\mathrm{L}]^{12}$

$d_{94} = (b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2) + (b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10})$
$- 4\,(b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) - a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6) - 4\,(b^4\,c^8 + c^4\,a^8 + a^4\,b^8)$
$+ 6\,(b^6\,c^6 + c^6\,a^6 + a^6\,b^6) + 3\,a^4\,b^4\,c^4$
$d_{97} = -(a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 4\,(b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2) + 4\,(b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10})$
$- 7\,(b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) - 11\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6) - 7\,(b^4\,c^8 + c^4\,a^8 + a^4\,b^8)$
$+ 8\,(b^6\,c^6 + c^6\,a^6 + a^6\,b^6) + 7\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2)$
$+ 7\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4).$

$\delta_{70} = (a^{12} + b^{12} + c^{12}) - 2\,(b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2)$
$- 2\,(b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10}) - (b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6)$
$- (b^4\,c^8 + c^4\,a^8 + a^4\,b^8) + 4\,(b^6\,c^6 + c^6\,a^6 + a^6\,b^6) - 2\,a^4\,b^4\,c^4.$

$\delta_{93} = (b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2) + (b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10})$
$- 4\,(b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) - 3\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6) - 4\,(b^4\,c^8 + c^4\,a^8 + a^4\,b^8)$
$+ 6\,(b^6\,c^6 + c^6\,a^6 + a^6\,b^6) + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2)$
$+ 2\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) + a^4\,b^4\,c^4.$

$\delta_{96} = -(a^{12} + b^{12} + c^{12}) + 5\,(b^{10}\,c^2 + c^{10}\,a^2 + a^{10}\,b^2)$
$+ 5\,(b^2\,c^{10} + c^2\,a^{10} + a^2\,b^{10}) - 11\,(b^8\,c^4 + c^8\,a^4 + a^8\,b^4) - 11\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^6 + b^6 + c^6)$
$- 11\,(b^4\,c^8 + c^4\,a^8 + a^4\,b^8) + 14\,(b^6\,c^6 + c^6\,a^6 + a^6\,b^6) + 6\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^2 + c^4\,a^2 + a^4\,b^2)$
$+ 6\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^4 + c^2\,a^4 + a^2\,b^4) - 2\,a^4\,b^4\,c^4.$

Remarques :

$\delta_{93} - d_{94} = 2\,(d_{22} - d_{51})\,d_{51} = 2\,\delta_{49}\,d_{51}$

$\delta_{70} - 2\,\delta_{96} + 3\,d_{97} = (9\,d_{22} + 2\,d_{51})\,d_{51}$

$\delta_{70} - 3\,\delta_{93} + \delta_{96} = -7\,d_{51}^2.$

9.2.13 Termes de dimension [L]^{16}

Ces trois termes sont multiples de d_3.

$d_{70} = d_3\,\delta_{70}$
$= -(a^{16} + b^{16} + c^{16}) + 4\,(b^{14}\,c^2 + c^{14}\,a^2 + a^{14}\,b^2) + 4\,(b^2\,c^{14} + c^2\,a^{14} + a^2\,b^{14})$
$- 4\,(b^{12}\,c^4 + c^{12}\,a^4 + a^{12}\,b^4) - 8\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^{10} + b^{10} + c^{10}) - 4\,(b^4\,c^{12} + c^4\,a^{12} + a^4\,b^{12})$
$- 4\,(b^{10}\,c^6 + c^{10}\,a^6 + a^{10}\,b^6) - 4\,(b^6\,c^{10} + c^6\,a^{10} + a^6\,b^{10}) + 10\,(b^8\,c^8 + c^8\,a^8 + a^8\,b^8)$
$+ 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 8\,a^4\,b^4\,c^4\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 4\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 8\,a^4\,b^4\,c^4\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2).$

$d_{93} = d_3\,\delta_{93} = -(b^{14}\,c^2 + c^{14}\,a^2 + a^{14}\,b^2) - (b^2\,c^{14} + c^2\,a^{14} + a^2\,b^{14})$
$+ 6\,(b^{12}\,c^4 + c^{12}\,a^4 + a^{12}\,b^4) + 6\,(b^4\,c^{12} + c^4\,a^{12} + a^4\,b^{12}) + 7\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^{10} + b^{10} + c^{10})$
$- 15\,(b^{10}\,c^6 + c^{10}\,a^6 + a^{10}\,b^6) - 15\,(b^6\,c^{10} + c^6\,a^{10} + a^6\,b^{10})$
$- 15\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 15\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$+ 20\,(b^8\,c^8 + c^8\,a^8 + a^8\,b^8) + 9\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4)$
$+ 9\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) + 9\,a^4\,b^4\,c^4\,(a^4 + b^4 + c^4).$

$d_{96} = d_3\,\delta_{96}$
$= (a^{16} + b^{16} + c^{16}) - 7\,(b^{14}\,c^2 + c^{14}\,a^2 + a^{14}\,b^2) - 7\,(b^2\,c^{14} + c^2\,a^{14} + a^2\,b^{14})$
$+ 22\,(b^{12}\,c^4 + c^{12}\,a^4 + a^{12}\,b^4) + 29\,a^2\,b^2\,c^2\,(a^{10} + b^{10} + c^{10})$
$+ 22\,(b^4\,c^{12} + c^4\,a^{12} + a^4\,b^{12}) - 41\,(b^{10}\,c^6 + c^{10}\,a^6 + a^{10}\,b^6)$
$- 45\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^8\,c^2 + c^8\,a^2 + a^8\,b^2) - 45\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^2\,c^8 + c^2\,a^8 + a^2\,b^8)$
$- 41\,(b^6\,c^{10} + c^6\,a^{10} + a^6\,b^{10}) + 50\,(b^8\,c^8 + c^8\,a^8 + a^8\,b^8)$
$+ 23\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^6\,c^4 + c^6\,a^4 + a^6\,b^4) + 26\,a^4\,b^4\,c^4\,(a^4 + b^4 + c^4)$
$+ 23\,a^2\,b^2\,c^2\,(b^4\,c^6 + c^4\,a^6 + a^4\,b^6) - 6\,a^4\,b^4\,c^4\,(b^2\,c^2 + c^2\,a^2 + a^2\,b^2).$

Remarque : $d_{70} - 3\,d_{93} + d_{96} = d_3\,(\delta_{70} - 3\,\delta_{93} + \delta_{96}) = -7\,d_3\,d_{51}^2.$

9.3 Annexe C : Expressions des dénominateurs d_i des coordonnées aréolaires des points X_i en fonction de s, r, R

Les valeurs entre parenthèses sont celles du triangle équilatéral pour lequel $c = b = a$.

On a : s $(\frac{3}{2}\,a)$, r $(\frac{\sqrt{3}}{6}\,a)$, R $(\frac{\sqrt{3}}{3}\,a)$.

$\Delta = s\,r$ $(\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2)$

$\mathrm{J} = \frac{\sqrt{-2\,s^2+2\,r\,(r+4\,\mathrm{R})+9\,\mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}}$ (0)
$\mathrm{D} = 2\,r\,\sqrt{-\{s^4+2\,s^2\,[r\,(r-10\,\mathrm{R})-2\,\mathrm{R}^2]+r\,(r+4\,\mathrm{R})^3]\}}$ (0)
$\mathrm{S} = 16\,s^2\,r^2$ $(3\,a^4)$

$d_1 = 2\,s$ $(3\,a)$
$d_2 = 3$ (3)
$d_3 = 16\,s^2\,r^2$ $(3\,a^4)$ et $d_3' = 8\,s\,r^2$ (a^3) et $\delta_3 = 1$ (1)
$d_4 = 16\,s^2\,r^2 = d_3$ $(3\,a^4)$ et $d_4' = 8\,s\,r^2 = d_3'$ (a^3) et $\delta_4 = 1$ (1)
$d_5 = 16\,s^2\,r^2 = d_3$ $(3\,a^4)$ et $d_5' = 8\,s\,r^2 = d_3'$ (a^3) et $\delta_5 = 1$ (1)
$d_6 = 2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})]$ $(3\,a^2)$
$d_7 = 4\,r\,(r+4\,\mathrm{R})$ $(3\,a^2)$
$d_8 = 2\,s$ $(3\,a)$
$d_9 = 4\,r\,(r+4\,\mathrm{R}) = d_7$ $(3\,a^2)$
$d_{10} = 2\,s$ $(3\,a)$
$d_{11} = -4\,s\,r\,(2\,r - \mathrm{R})$ (0)
$d_{12} = 8\,s^2\,r\,(2\,r+\mathrm{R})$ $(6\,a^4)$ et $d_{12}' = 4\,s\,r\,(2\,r+\mathrm{R})$ $(2\,a^3)$
$d_{13} = 8\,\sqrt{3}\,s\,\{s^2 + [2\,\sqrt{3}\,s - (r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,r$ $(18\,a^4)$
$d_{14} = -8\,\sqrt{3}\,s\,\{s^2 - [2\,\sqrt{3}\,s + (r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,r$ (0)
$d_{15} = 8\,s\,\{s^2 + [2\,\sqrt{3}\,s - (r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,r = \frac{\sqrt{3}}{3}\,d_{13}$ $(6\,\sqrt{3}\,a^4)$
$d_{16} = 8\,s\,\{s^2 - [2\,\sqrt{3}\,s + (r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,r = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,d_{14}$ (0)
$d_{17} = 8\,s\,\{\sqrt{3}\,s^2 + [10\,s - \sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,r$ $(24\,a^4)$
$d_{18} = -8\,s\,\{\sqrt{3}\,s^2 - [10\,s + \sqrt{3}\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r\}\,r$ $(6\,a^4)$
$d_{19} = -16\,s\,[s^2 - (r+2\,\mathrm{R})\,(r+4\,\mathrm{R})]\,r^2$ $(3\,a^5)$
$d_{20} = 16\,s^2\,r^2 = d_3$ $(3\,a^4)$ et $d_{20}' = 8\,s\,r^2 = d_3'$ (a^3) et $\delta_{20} = 1$ (1)
$d_{21} = 8\,s^2\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})$ $(12\,a^4)$ et $d_{21}' = 4\,s\,r\,(2\,r+3\,\mathrm{R})$ $(4\,a^3)$
$d_{22} = 32\,s^2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,r^2$ $(3\,a^6)$
$d_{23} = 16\,s^2\,\{2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\,r^2$ (0)
$d_{24} = 512\,s^4\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 5\,\mathrm{R}^2]\,r^4$ $(-3\,a^{10})$ et
$\delta_{24} = 32\,s^2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 5\,\mathrm{R}^2]\,r^2$ $(-a^6)$
$d_{25} = -32\,s^2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\,r^2$ $(3\,a^6)$

$d_{26} = 512\, s^4\, [s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^4\ (3\, a^{10})$ et
$\delta_{26} = 32\, s^2\, [s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^2 = q_1\, q_2\, q_3\ (a^6)$
$d_{27} = -16\, s^2\, [s^2 - 3\,(r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^2\ (12\, a^6)$
$d_{28} = -64\, s^3\, [s^2 - r\,(r + 5\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (12\, a^7)$ et
$d_{28}^{'} = -32\, s^2\, [s^2 - r\,(r + 5\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (4\, a^6)$
$d_{29} = 32\, s^3\, [3\, s^2 - r\,(r + 8\,\mathrm{R}) - 12\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (12\, a^7)$ et
$d_{29}^{'} = 16\, s^2\, [3\, s^2 - r\,(r + 8\,\mathrm{R}) - 12\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (4\, a^6)$
$d_{30} = 0\ (0)$
$d_{31} = 2\, s\, [s^2 - 3\, r\,(r + 2\,\mathrm{R})]\ (3\, a^3)$
$d_{32} = 2\, [s^4 - 2\, s^2\, r\,(3\, r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\ (3\, a^4)$
$d_{33} = 32\, s^2\, [s^2 - r\,(r + 2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (3\, a^6)$
$d_{34} = -64\, s^3\, [s^2 - r\,(r + 6\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (3\, a^7)$ et
$d_{34}^{'} = -32\, s^2\, [s^2 - r\,(r + 6\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (a^6)$
$d_{35} = 8\, s^2\, r\,(2\, r + \mathrm{R}) = d_{12}\ (6\, a^4)$ et $d_{35}^{'} = 4\, s\, r\,(2\, r + \mathrm{R}) = d_{12}^{'}\ (2\, a^3)$
$d_{36} = -8\, s^2\, r\,(2\, r - \mathrm{R})\ (0)$ et $d_{36}^{'} = -4\, s\, r\,(2\, r - \mathrm{R}) = d_{11}\ (0)$
$d_{37} = s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R})\ (3\, a^2)$
$d_{38} = 2\, s\, [s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R})]\ (6\, a^3)$
$d_{39} = s^4 + 2\, s^2\, r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2\ (3\, a^4)$
$d_{40} = 16\, s^2\, r^2 = d_3\ (3\, a^4)$ et $d_{40}^{'} = 8\, s\, r^2 = d_3^{'}\ (a^3)$ et $\delta_{40} = 1\ (1)$
$d_{41} = 4\, [s^2\,(3\, r + 2\,\mathrm{R}) - r\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\, r\ (3\, a^4)$
$d_{42} = 2\, s\, [s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R})] = d_{38}\ (6\, a^3)$
$d_{43} = 2\, s\, [s^2 + r\,(r - 8\,\mathrm{R})]\ (3\, a^3)$
$d_{44} = -[s^2 - 3\, r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\ (0)$
$d_{45} = 2\, [s^2 + 3\, r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\ (9\, a^2)$
$d_{46} = -16\, s^2\, r\,(r - \mathrm{R})\ (3\, a^4)$ et $d_{46}^{'} = -8\, s\, r\,(r - \mathrm{R})\ (a^3)$
$d_{47} = -32\, s^3\, [s^2 - 3\, r\,(r + 2\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (-3\, a^7)$ et
$d_{47}^{'} = -16\, s^2\, [s^2 - 3\, r\,(r + 2\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (-a^6)$
$d_{48} = 8\, s\, [3\, s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\, r^2\ (3\, a^5)$
$d_{49} = 256\, s^4\, \{2\, [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 7\,\mathrm{R}^2\}\, r^4\ (6\, a^{10})$et
$\delta_{49} = 16\, s^2\, \{2\, [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 7\,\mathrm{R}^2\}\, r^2\ (2\, a^6)$
$d_{50} = -32\, s^2$
$\{s^4 - s^2\, [2\, r\,(3\, r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + (19\, r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\}\, r^2\ (0)$
$d_{51} = 16\, s^2\, r^2\,\mathrm{R}^2\ (a^6)$
$d_{52} = -256\, s^4\, r^4\,\mathrm{R}^2\ (-3\, a^{10})$ et $\delta_{52} = -16\, s^2\, r^2\,\mathrm{R}^2 = -d_{51}\ (-a^6)$
$d_{53} = -32\, s^2\, \{s^4 - 2\, s^2\, [r\,(3\, r + 4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2] + r\,(r + 2\,\mathrm{R})^2\,(r + 4\,\mathrm{R})\}\, r^2\ (3\, a^8)$
$d_{54} = 256\, s^4\, \{2\, [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 5\,\mathrm{R}^2\}\, r^4\ (12\, a^{10})$ et
$\delta_{54} = 16\, s^2\, \{2\, [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 5\,\mathrm{R}^2\}\, r^2\ (4\, a^6)$
$d_{55} = 8\, s\, r\,(r + \mathrm{R})\ (3\, a^3)$
$d_{56} = -16\, s^2\, r\,(r - \mathrm{R}) = d_{46}\ (3\, a^4)$ et $d_{56}^{'} = -8\, s\, r\,(r - \mathrm{R}) = d_{46}^{'}\ (a^3)$
$d_{57} = -8\, s\, r\,(r - 2\,\mathrm{R})\ (3\, a^3)$
$d_{58} = 4\, s^2\, [s^2 - r\,(3\, r + 4\,\mathrm{R})]\ (12\, a^4)$ et $d_{58}^{'} = 2\, s\, [s^2 - r\,(3\, r + 4\,\mathrm{R})]\ (4\, a^3)$

$d_{59} = 64\, s^2\, [s^2 - (r + \mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,(2\,r - \mathrm{R})\, r^3\ (3\,a^8)$
$d_{60} = 32\, s^3\, \{s^2\,(2\,r + \mathrm{R}) - r\,[r\,(2\,r + 7\,\mathrm{R}) + 7\,\mathrm{R}^2]\}\, r\ (48\,a^7)$ et
$d'_{60} = 16\, s^2\, \{s^2\,(2\,r + \mathrm{R}) - r\,[r\,(2\,r + 7\,\mathrm{R}) + 7\,\mathrm{R}^2]\}\, r\ (16\,a^6)$
$d_{61} = 8\, s\, \{\sqrt{3}\, s^2 + [2\, s - \sqrt{3}\,(r + 4\,\mathrm{R})]\, r\}\, r\ (12\,a^4)$
$d_{62} = 8\, s\, \{-\sqrt{3}\, s^2 + [2\, s + \sqrt{3}\,(r + 4\,\mathrm{R})]\, r\}\, r\ (-6\,a^4)$
$d_{63} = 8\, s\, r\,(r + \mathrm{R}) = d_{55}\ (3\,a^3)$
$d_{64} = 512\, s^4\, [s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^4 = d_{26}\ (3\,a^{10})$ et
$\delta_{64} = 32\, s^2\, [s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^2 = \delta_{26}\ (a^6)$
$d_{65} = 8\, s^2\, r\, \mathrm{R}\ (3\,a^4)$ et $d'_{65} = 4\, s\, r\, \mathrm{R}\ (a^3)$
$d_{66} = 64\, s^2\, [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\, [s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^2 = d_6\, \delta_{26}\ (3\,a^8)$
$d_{67} = 32\, s^2\, [s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\, \{2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\, r^2 = d_6\, d_{23}\ (0)$
$d_{68} = 512\, s^4\, [s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^4 = d_{26}\ (3\,a^{10})$ et
$\delta_{68} = 32\, s^2\, [s^2 - (r + 2\,\mathrm{R})^2]\, r^2 = \delta_{26}\ (a^6)$
$d_{69} = 2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] = d_6\ (3\,a^2)$
$d_{70} = 16384\, s^6\, \{s^4 - 2\, s^2\, [r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2]$
$+ r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 2\,(11\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 7\,\mathrm{R}^4\}\, r^6\ (3\,a^{16})$ et
$\delta_{70} = 1024\, s^4\, \{s^4 - 2\, s^2\, [r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2]$
$+ r\,[r^2\,(r + 8\,\mathrm{R}) + 2\,(11\,r + 12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 7\,\mathrm{R}^4\}\, r^4\ (a^{12})$
$d_{71} = 8\, s\, [s^2 + (r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\, r^2\ (6\,a^5)$
$d_{72} = 8\, s^2\, r\, \mathrm{R} = d_{65}$ et $d'_{72} = 4\, s\, r\, \mathrm{R} = d'_{65}\ (3\,a^4)$
$d_{73} = 32\, s^3\, [s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (6\,a^7)$ et
$d'_{73} = 16\, s^2\, [s^2 + r\,(r - 2\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2]\, r^2\ (2\,a^6)$
$d_{74} = 256\, s^4\, \{2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\, r^4\ (0)$ et
$\delta_{74} = 16\, s^2\, \{2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\, r^2 = d_{23}\ (0)$
$d_{75} = s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = d_{37}\ (3\,a^2)$
$d_{76} = s^4 + 2\, s^2\, r\,(r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = d_{39}\ (3\,a^4)$
$d_{77} = 32\, s\, [s^2 - (r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}]\, r^2\ (3\,a^5)$
$d_{78} = -16\, s^2\, r\,(r - \mathrm{R}) = d_{46}\ (3\,a^4)$ et $d'_{78} = -8\, s\, r\,(r - \mathrm{R}) = d'_{46}\ (a^3)$
$d_{79} = 8\, s^2\, r\,(2\,r + 3\,\mathrm{R}) = d_{21}\ (12\,a^4)$ et $d'_{79} = 4\, s\, r\,(2\,r + 3\,\mathrm{R}) = d'_{21}\ (4\,a^3)$
$d_{80} = 8\, s^2\, r\,(2\,r - \mathrm{R}) = -d_{36}\ (0)$ et $d'_{80} = 4\, s\, r\,(2\,r - \mathrm{R}) = -d_{11}\ (0)$
$d_{81} = 4\, s\, [s^2 - r\,(r + \mathrm{R})]\ (12\,a^3)$
$d_{82} = 4\, s\, [s^4 - s^2\, r\,(4\,r + 9\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})\,(3\,r + 7\,\mathrm{R})]\ (12\,a^5)$
$d_{83} = 5\, s^4 - 2\, s^2\, r\,(3\,r + 20\,\mathrm{R}) + 5\, r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2\ (12\,a^4)$
$d_{84} = 128\, s^3\, r^4\ (3\,a^7)$ et $\delta_{84} = 8\, s\, r^2 = d'_3\ (a^3)$
$d_{85} = 4\,[s^2 + (r + 4\,\mathrm{R})^2]\, r^2\ (3\,a^4)$
$d_{86} = 5\, s^2 + r\,(r + 4\,\mathrm{R})\ (12\,a^2)$
$d_{87} = -2\, s\, [s^4 + 2\, s^2\, r\,(r - 10\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})\,(r + 8\,\mathrm{R})]\ (3\,a^5)$
$d_{88} = -4\, s\, [s^2 + 3\, r\,(r - 5\,\mathrm{R})]\ (0)$
$d_{89} = 2\, s\, [s^2 - 3\, r\,(r - \frac{\mathrm{R}}{2})]\ (\frac{27}{4}\, a^3)$
$d_{90} = 128\, s^3\, [r\,(r{+}2\,\mathrm{R}){-}\mathrm{R}^2]\, r^2\ (3\,a^7)$ et $d'_{90} = 64\, s^2\, [r\,(r{+}2\,\mathrm{R}){-}\mathrm{R}^2]\, r^2\ (a^6)$

$d_{91} = 256\,s^4\,[s^2\,(r-\mathrm{R}) + r^2\,(r+3\,\mathrm{R}) + 2\,(r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\,r^3\ (15\,a^{10})$ et
$d'_{91} = 128\,s^3\,[s^2\,(r-\mathrm{R}) + r^2\,(r+3\,\mathrm{R}) + 2\,(r+\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2]\,r^3\ (5\,a^9)$
$d_{92} = 16\,s^2\,[s^2 + r^2 - 4\,\mathrm{R}^2]\,r^2\ (3\,a^6)$
$d_{93} = 4096\,s^6$
$\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r-4\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R}) + 8\,(3\,r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 13\,\mathrm{R}^4\}\,r^6$
$(12\,a^{16})$ et $\delta_{93} = 256\,s^4$
$\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r-4\,\mathrm{R}) - 4\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R}) + 8\,(3\,r+4\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 13\,\mathrm{R}^4\}\,r^4\ (4\,a^{12})$
$d_{94} = 256\,s^4$
$\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(r-4\,\mathrm{R}) - 6\,\mathrm{R}^2] + r\,[r^2\,(r+8\,\mathrm{R}) + 4\,(7\,r+12\,\mathrm{R})\,\mathrm{R}^2] + 27\,\mathrm{R}^4\}\,r^4\ (0)$
$d_{95} = 16\,s^2\,\{s^4 + 2\,s^2\,[r\,(9\,r-4\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2] + r\,(r+2\,\mathrm{R})^2\,(r+4\,\mathrm{R})\}\,r^2\ (12\,a^8)$
$d_{96} = -4096\,s^6\,\{s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R})$
$+ [r\,(r+4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2]\}\,r^6\ (12\,a^{16})$ et
$\delta_{96} = -256\,s^4\,\{s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + [r\,(r+4\,\mathrm{R}) + 2\,\mathrm{R}^2]\,[r\,(r+4\,\mathrm{R}) - 2\,\mathrm{R}^2]\}\,r^4$
$(4\,a^{12})$
$d_{97} = -512\,s^4$
$\{s^4 - s^2\,[2\,r\,(3\,r+4\,\mathrm{R}) + 7\,\mathrm{R}^2] + (r+2\,\mathrm{R})^2\,[r\,(r+4\,\mathrm{R}) + 3\,\mathrm{R}^2]\}\,r^4\ (12\,a^{12})$
$d_{98} = -16\,s^2\,[s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2]\,r^2\ (0)$ et
$\delta_{98} = -[s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2] = -d_{99}\ (0)$
$d_{99} = s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2\ (0)$
$d_{100} = -4\,s\,r\,(2\,r-\mathrm{R}) = d_{11}\ (0)$
$d_{101} = -4\,[3\,s^2 - (r+4\,\mathrm{R})^2]\,r^2\ (0)$

Remarques :
$\delta_{70} + \delta_{96} - 3\,\delta_{93} = -7\,d_{51}^2 = -1792\,s^4\,r^4\,\mathrm{R}^4\ (-7\,a^{12})$
$d_{70} + d_{96} - 3\,d_{93} = 7\,d_{51}\,d_{52} = -28672\,s^6\,r^6\,\mathrm{R}^4\ (-21\,a^{16})$
$q_1\,q_2\,q_3 = 32\,s^2\,[s^2 - (r+2\,\mathrm{R})^2]\,r^2 = \delta_{26}\ (a^6)$

Autres valeurs

$d_{104} = 64\,s^3\,r^3\,(2\,r-\mathrm{R})\ (0)$ et $\delta_{104} = 4\,s\,r\,(2\,r-\mathrm{R}) = -d_{11}\ (0)$
$d_{110} = 16\,s^2\,\{2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\,r^2 = d_{23}\ (0)$
$d_{111} = 4\,\{-s^6 - 3\,s^4\,r\,(3\,r-4\,\mathrm{R}) + 3\,s^2\,r^2\,[r\,(3\,r+8\,\mathrm{R}) + 20\,\mathrm{R}^2] + r^3\,(r+4\,\mathrm{R})^3\}\ (0)$
$d_{115} = s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r+4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r+4\,\mathrm{R})^2 = d_{99}\ (0)$
$d_{140} = -16\,s^2\,r^2 = -d_3\ (-3\,a^4)$ et $d'_{140} = -8\,s\,r^2 = -d'_3\ (-a^3)$
$d_{141} = 2\,[s^2 - r\,(r+4\,\mathrm{R})] = d_6\ (3\,a^2)$
$d_{142} = 4\,r\,(r+4\,\mathrm{R}) = d_7\ (3\,a^2)$
$d_{144} = -4\,r\,(r+4\,\mathrm{R}) = -d_7\ (-3\,a^2)$
$d_{145} = 2\,s = d_1\ (3\,a)$
$d_{165} = 8\,s\,r^2 = d'_3\ (a^3)$
$d_{175} = 2\,s - (r+4\,\mathrm{R})\ (\frac{3\,(2-\sqrt{3})}{2}\,a)$
$d_{176} = 2\,s + (r+4\,\mathrm{R})\ (\frac{3\,(2+\sqrt{3})}{2}\,a)$
$d_{181} = 8\,s^2\,(s^2 - 3\,r^2)\,r\,\mathrm{R}\ (6\,a^6)$

$d_{182} = -32\,s^2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r^2\;(-9\,a^6)$ et
$\delta_{182} = -2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] = -d_6\;(-3\,a^2)$
$d_{183} = 2\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(5\,r - 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\;(9\,a^4)$
$d_{186} = 256\,s^4\,\{2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\,r^4 = d_{74}\;(0)$ et
$\delta_{186} = 16\,s^2\,\{2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\,r^2 = d_{23}\;(0)$
$d_{187} = s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = d_{99}\;(0)$
$d_{191} = 8\,s^2\,r\,(2\,r + 3\,\mathrm{R}) = d_{21}\;(12\,a^4)$ et $d'_{191} = 4\,s\,r\,(2\,r + 3\,\mathrm{R}) = d'_{21}\;(4\,a^3)$
$d_{230} = s^4 - 2\,s^2\,r\,(7\,r + 4\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2 = d_{99}\;(0)$
$d_{256} = 2\,s\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 2\,\mathrm{R}) + r^3\,(r + 4\,\mathrm{R})]\;(12\,a^5)$
$d_{284} = 8\,s\,[s^2\,(3\,r + 2\,\mathrm{R}) - r\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r\;(12\,a^5)$
$d_{291} = -2\,s\,[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 8\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\;(0)$ et
$d'_{291} = -[s^4 + 2\,s^2\,r\,(r - 8\,\mathrm{R}) + r^2\,(r + 4\,\mathrm{R})^2]\;(0)$
$d_{329} = -32\,s^3\,r^2\;(-9\,a^5)$ et $d'_{329} = -16\,s^2\,r^2 = -d_3\;(-3\,a^4)$
$d_{354} = 4\,s\,r\,\mathrm{R} = d'_{65}\;(a^3)$
$d_{376} = -16\,s^2\,r^2 = -d_3\;(-3\,a^4)$ et $d'_{376} = -8\,s\,r^2 = -d'_3\;(-a^3)$
$d_{378} = 512\,s^4\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,r^4\;(9\,a^{10})$ et
$\delta_{378} = 32\,s^2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R}) - 3\,\mathrm{R}^2]\,r^2 = d_{22}\;(3\,a^6)$
$d_{381} = 16\,s^2\,r^2 = d_3\;(3\,a^4)$ et $d'_{381} = 8\,s\,r^2 = d'_3\;(a^3)$
$d_{382} = 16\,s^2\,r^2 = d_3\;(3\,a^4)$ et $d'_{382} = 8\,s\,r^2 = d'_3\;(a^3)$
$d_{390} = -8\,s\,r\,(r + 4\,\mathrm{R})\;(-9\,a^3)$ et $d'_{390} = -4\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = -d_7\;(-3\,a^2)$
$d_{468} = 16\,s^2\,\{2\,[s^2 - r\,(r + 4\,\mathrm{R})] - 9\,\mathrm{R}^2\}\,r^2 = d_{23}\;(0)$
$d_{481} = 2\,[s - (r + 4\,\mathrm{R})]\;(3\,(1 - \sqrt{3})\,a)$
$d_{482} = 2\,[s + (r + 4\,\mathrm{R})]\;(3\,(1 + \sqrt{3})\,a)$
$d_{485} = 4\,s\,[s^2 + 4\,s\,r - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r\;(\frac{3\,(2+\sqrt{3})\,a^4}{2})$
$d_{486} = -4\,s\,[s^2 - 4\,s\,r - r\,(r + 4\,\mathrm{R})]\,r\;(\frac{3\,(2-\sqrt{3})\,a^4}{2})$
$d_{521} = 0\;(0)$
$d_{546} = 16\,s^2\,r^2 = d_3\;(3\,a^4)$ et $d'_{546} = 8\,s\,r^2 = d'_3\;(a^3)$
$d_{547} = 16\,s^2\,r^2 = d_3\;(3\,a^4)$ et $d'_{547} = 8\,s\,r^2 = d'_3\;(a^3)$
$d_{548} = 16\,s^2\,r^2 = d_3\;(3\,a^4)$ et $d'_{548} = 8\,s\,r^2 = d'_3\;(a^3)$
$d_{549} = 16\,s^2\,r^2 = d_3\;(3\,a^4)$ et $d'_{549} = 8\,s\,r^2 = d'_3\;(a^3)$
$d_{550} = 16\,s^2\,r^2 = d_3\;(3\,a^4)$ et $d'_{550} = 8\,s\,r^2 = d'_3\;(a^3)$
$d_{551} = 2\,s = d_1\;(3\,a)$
$d_{560} = 2\,s\,[s^4 - 10\,s^2\,r\,(r + \mathrm{R}) + 5\,r^2\,(r + 2\,\mathrm{R})\,(r + 4\,\mathrm{R})]\;(3\,a^5)$
$d_{657} = 4\,r\,(r + 4\,\mathrm{R})\,\mathrm{D}\;(0)$
$d_{1001} = -8\,s\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = d_{390}\;(-9\,a^3)$ et
$d'_{1001} = -4\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) = -d_7\;(-3\,a^2)$
$d_{1113} = 16\,s^2\,\sqrt{-2\,s^2 + 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 9\,\mathrm{R}^2}\,\mathrm{R}\;(0)$
$d_{1114} = 16\,s^2\,\sqrt{-2\,s^2 + 2\,r\,(r + 4\,\mathrm{R}) + 9\,\mathrm{R}^2}\,\mathrm{R} = d_{1113}\;(0)$

Références

[1] A. Bouvier et M. George sous la direction de F. Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. PUF. Paris. 1983.

[2] M. Collet et G. Griso. *Le cercle d'Euler*. Collection "Maths en plus". Vuibert. Paris. 1987.

[3] S. Dubuc. *Géométrie plane*. Collection Sup. Le mathématicien. PUF. Paris. 1971.

[4] A. Gérardin. *Distances, en nombres entiers, de trois points et de leur centre isogone à* 120^o. Nouvelles annales des mathématiques. 4^{eme} série, tome 1, pp. 62-74. 1916.

Advanced Euclidean Geometry. Dover, 1960.

[5] C. Kimberling. *Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle*. Mathematics Magazine. Vol. 67. no. 3. pp. 163-187. Juin 1994.

[6] C. Kimberling. *ETC, Encyclopedia of Triangle Centers*. 1998-2019. http ://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/.

[7] I. Kiyosi. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics (EDM) by the Mathematical Society of Japan*. 2nd edition. The MIT Press. Cambridge, Massachussets, Londres, Angleterre. 1960.

[8] E. W. Weisstein. *CRC Concise encyclopedia of mathematics*. CRC Press LLC. 1999.

[9] Cercle d'Euler. *Wikipedia*.