

# Sammlung Harald Schröder

Mathematikaufsätze von  
**Harald Schröder**

zusammengestellt von  
**Gabriele Dörflinger**

Deutsche Ausgabe

Heidelberg 2013

**Autor:**

Diplom-Mathematiker  
Harald Schröer  
Am Limperichsberg 2  
D-53639 Königswinter

**HeiDOK** — Der Heidelberger Dokumentenserver

<http://archiv.ub.uni-heidelberg.de>

# Inhaltsverzeichnis

<b>A. Integralrechnung</b>	<b>6</b>
01. Zurückführung von 3-dimensionalen Integralen auf 1-dimensionale Integrale	7
02. Oberflächenberechnung . . . . .	9
<b>B. Differentialrechnung</b>	<b>11</b>
03. Der Minimalabstand . . . . .	12
04. Einbeschriebene Dreiecke, Trapeze und Rechtecke . . . . .	16
05. Einbeschriebene Pyramide und Pyramidenstumpf . . . . .	21
06. Extremale Winkel . . . . .	23
07. Das Zollstockproblem . . . . .	25
08. Logarithmenformeln als Grenzwerte . . . . .	28
09. Der Krümmungskreis . . . . .	30
10. Winkelgeschwindigkeit und Radiusvektor einer beliebigen Bewegung . . .	32
11. Stabilität bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Virusdynamik . . . . .	34
<b>C. Numerik</b>	<b>47</b>
12. Konvergenzmaße . . . . .	47
<b>D. Funktionentheorie</b>	<b>50</b>
13. Die Umlaufzahl . . . . .	50
<b>E. Geometrie</b>	<b>53</b>
14. Projektionen auf Ebenen . . . . .	54
15. Drehungen . . . . .	59
16. Der Schwerpunkt . . . . .	61
17. Die Diagonalen im regelmäßigen n-Eck . . . . .	63
18. Eine besondere Ellipse . . . . .	66
19. Die Halbachsen-Winkelgleichung bei der Ellipse . . . . .	68
20. Der „Radius“ des Ellipsoiden und die Oberfläche des Rotationsellipsoiden	70
21. Die 4.Seite und der Flächeninhalt des Sehnenvierecks . . . . .	74
22. Der 4 Seiten-Fall beim Trapez . . . . .	77
23. Geodätische Linien auf verschiedenen Oberflächen und die maximale Ent- fernung auf einer Kugeloberfläche . . . . .	80
24. Der Raumwinkel durch ein gleichschenkliges Dreieck . . . . .	84
25. Der Raumwinkel durch ein rechtwinkliges Dreieck . . . . .	85
26. Der Raumwinkel durch ein senkrechtetes Rechteck . . . . .	86
27. Der Raumwinkel durch ein geneigtes Rechteck . . . . .	88

<b>F. Stochastik</b>	<b>90</b>
28. Lineare und Nichtlineare Regression mit Meßreihen . . . . .	91
29. Das Buffonsche Nadelproblem . . . . .	102
<b>G. Mechanik</b>	<b>105</b>
30. Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit auf Rotationskörperschalen . . .	106
31. Wurfbahnen von Kugeln auf der schiefen Ebene . . . . .	144
32. Bewegung einer Kugel mit künstlicher Beschleunigung auf der schiefen Ebene . . . . .	151
33. Der vertikale Looping . . . . .	155
34. Abflug von einer Kugel . . . . .	158
35. Ruhende Kugeln . . . . .	160
36. Der schwingende Körper und die rotierende Scheibe . . . . .	173
37. Der allgemeine Überholvorgang . . . . .	177
38. Die Rolle . . . . .	181
39. Das Basketballproblem . . . . .	185
40. Aufeinanderfolgende Wurfbahnen . . . . .	189
41. Besondere Formen des elastischen Stoßes und das ballistische Pendel . . .	193
42. Interferenz bei zwei Wellenerregern . . . . .	197
43. Der Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit (Gas) . . . . .	200
44. Schwebende Hohlkugel in einer Flüssigkeit . . . . .	207
45. Beschleunigung in Flüssigkeiten und Gasen . . . . .	210
46. Schwimmende Quader . . . . .	214
47. Seifenblasen . . . . .	217
48. Aufstieg einer Gasblase in einer Flüssigkeit . . . . .	223
<b>H. Elektrizität</b>	<b>229</b>
49. Der minimale Widerstand . . . . .	229
<b>I. Optik</b>	<b>232</b>
50. Kegelschnittspiegel . . . . .	233
51. Brechung an einer Glaskugel, die Brechung des Lichtes an einer planparallelen Platte und die scheinbare Verschiebung durch eine Flüssigkeit . . .	238
52. Ähnliche Abbildungen von Dreiecken im Auge . . . . .	242
<b>J. Fotometrie (Strahlung)</b>	<b>246</b>
53. Der Lichtstrom durch das geneigte Rechteck im Medium . . . . .	247
54. Rechteck als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke (Beleuchtungsstärke) im Vakuum . . . . .	251
55. Rechteck als Strahler — die Beleuchtungsstärke im Medium . . . . .	254
56. Lichtstrom (Strahlungsleistung, Strahlungsfluß) und Raumwinkel durch die geneigte Ellipse . . . . .	258
57. Ellipse als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke (Beleuchtungsstärke) . . . . .	261
<b>K. Relativitätstheorie und Mikrophysik</b>	<b>264</b>
58. Geschwindigkeit und Temperatur . . . . .	265
59. Compton-Effekt — Ablenkung des Elektrons . . . . .	267

<b>L. Astronomie</b>	<b>269</b>
60. Gravitationsbeschleunigung bei Rotationsellipsoid, Kugel und allgemeinen Rotationskörper . . . . .	270
61. Bewegungen auf einem rotierenden Planeten . . . . .	277
62. Projektionen von Winkeln und Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche . . .	282
63. Frequenzveränderung der Strahlung im Gravitationsfeld . . . . .	288
64. Der lokale Ausschnitt der Ellipse . . . . .	292
65. Die Bewegung in Gravitations- und elektromagnetischen Feldern . . . . .	294
66. Wurfbahnen im Schwerfeld eines Planeten . . . . .	298
67. Rotierende Scheibe, Bahnen in Hohlkugeln und der schwingende Körper im Gravitationsfeld — ein Versuch . . . . .	305
68. Die Form des Rotationsellipsoiden infolge der Zentrifugalkraft . . . . .	315
69. Die scheinbare Helligkeit von Planeten . . . . .	318
70. Finsternisse, eine nicht konventionelle Darstellung . . . . .	333
71. Geographische Breite und geozentrische Breite . . . . .	338
72. Ein Beobachter auf einen unregelmäßigen Körper . . . . .	342
73. Die Länge eines Tages auf einen Planeten . . . . .	345
74. Die Anzahl der neu entstandenen Objekte im Raum und der mittlere Abstand . . . . .	348
<b>Alphabetisches Titelverzeichnis</b>	<b>350</b>
<b>Chronologisches Titelverzeichnis</b>	<b>352</b>

# Kapitel A.

## Integralrechnung

### Inhalt

01. Zurückführung von 3-dimensionalen Integralen auf 1-dimensionale Integrale .	7
02. Oberflächenberechnung . . . . .	9

## 01. Zurückführung von 3-dimensionalen Integralen auf 1-dimensionale Integrale

Wir betrachten zuerst folgende Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} g(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x_1, \langle \lambda \cdot x_1 \rangle, \langle \mu \cdot x_1 \rangle) dx_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei wird die Transformationsformel vgl. Forster [2](§§2 und 13) und das Korollar 3.2.8 von He [3]S.88 in folgender Weise gebraucht:

Die Transformationsformel wird auf die Abbildung

$$\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \left( cx_1 - \frac{c}{2}, bx_2 - \frac{b}{2}, ax_3 - \frac{a}{2} \right)$$

mit der Jacobi-Matrix

$$D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

und der Determinante

$$\det D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = c \cdot b \cdot a$$

angewendet. Die Funktion  $f$  wird definiert durch:

$$f(x_1, x_2, x_3) := a \cdot b \cdot c \cdot g\left(cx_1 - \frac{c}{2}, bx_2 - \frac{b}{2}, ax_3 - \frac{a}{2}\right)$$

$\langle \ \rangle$  ist der Bruchteil von einer Zahl.

Diese Idee läßt sich auf allgemeine 3-dimensionale Integrale verallgemeinern, wenn man Konvexkombinationen betrachtet, wie zum Beispiel bei Barner [1]Kapitel 13.2 S.30. Durch

$$\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot a + (1 - x_1) \cdot b \\ x_2 \cdot c + (1 - x_2) \cdot d \\ x_3 \cdot e + (1 - x_3) \cdot f \end{pmatrix}$$

wird eine Abbildung von  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  auf  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  erklärt.

Wir bilden nun die Jacobi-Matrix:

$$D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (a - b) & 0 & 0 \\ 0 & (c - d) & 0 \\ 0 & 0 & (e - f) \end{pmatrix}$$

## A. Integralrechnung

mit  $\det D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = (a - b) \cdot (c - d) \cdot (e - f)$ .

Dann lautet die Transformation:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2)$$

mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = |\det D\vec{A}(x_1, x_2, x_3)| \cdot g(\vec{A}(x_1, x_2, x_3))$$

Die Transformation auf ein eindimensionales Integral erfolgt dann wie in Gleichung (1).

Diese Überlegungen können auch für 2-dimensionale Integrale verwendet werden, wenn man statt Korollar 3.2.8 Korollar 3.2.5 bei He [3] heranzieht.

### Literatur

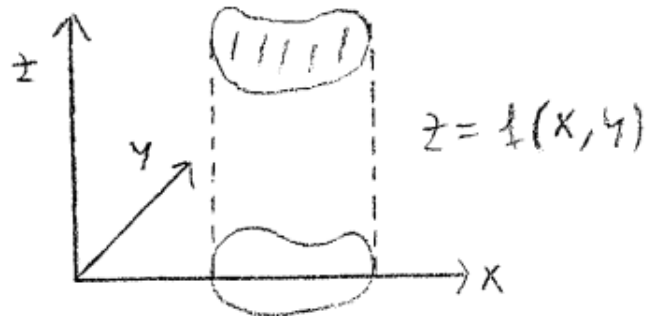
- [1] Martin Barner, Friedrich Flohr „Analysis II“ de Gruyter Verlag Berlin 1983
- [2] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage Vieweg Verlag Braunschweig 1983
- [3] Tian-Xiao He „Dimensionality reducing expansion of multivariate integration“ Birkhäuser Verlag Boston 2001

© 2013 Harald Schröder

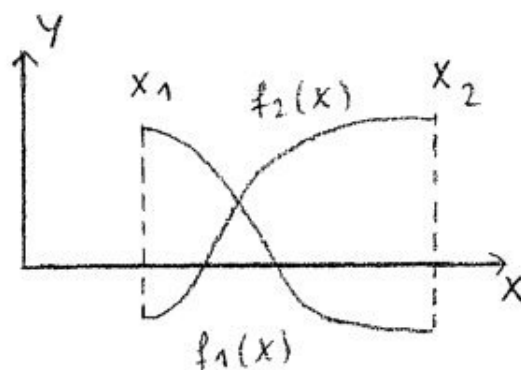
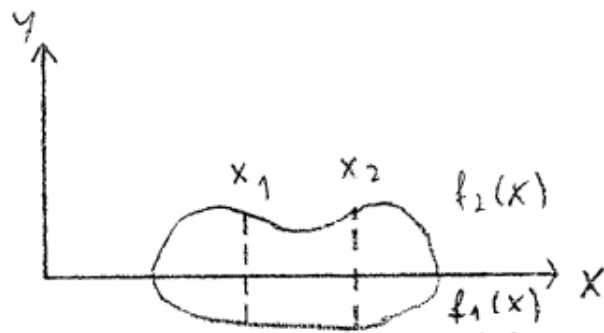


## 02. Oberflächenberechnung

Wir betrachten Oberflächen wie in den Abbildungen. Es stellt sich die Frage wie kann der Flächeninhalt berechnet werden? Welche Größen gehen bei der Berechnung mit ein? Gibt es Größen von denen dieser Flächeninhalt unabhängig ist? Kann man den Flächeninhalt einfach berechnen oder ist es eine komplizierte Aufgabe?



zwei Möglichkeiten werden hier gezeigt:



$f_1(x), f_2(x)$  begrenzen die Fläche zu  $y$  hin.

Für die Oberflächenberechnung benötigen wir eine Formel aus der Integralrechnung.

## A. Integralrechnung

Nach Forster [1]§14 (14.7) S.142,143 gilt folgendes:

$f : T \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar  $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$

$M := \{(x_1, \dots, x_n) \in T \times \mathbb{R} \quad : \quad x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$

Daraus folgt, wenn das Integral existiert:

$$\text{Vol}_{n-1}(M) = \int_T \sqrt{1 + \|\nabla f(t)\|^2} d^{n-1}t$$

$\|\cdot\|$  = euklidische Norm

Spezialfall  $n = 3$ :

Wir nehmen jetzt  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z = f(x, y)$ .

$f : T \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar.

$$T \subset \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \in T \quad t = (x, y)$$

$$M = \{(x, y, z) \in T \times \mathbb{R} \quad : \quad z = f(x, y)\}$$

Daraus erhalten wir:

$$O = \text{Vol}_2(M) = \int_T \sqrt{1 + \|\nabla f(t)\|^2} d^2t$$

$$\text{mit} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Oberfläche ist ein Spezialfall dieser Formel für:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x \leq x_2 \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

Für dieses  $T$  kann das zweidimensionale Integral folgendermaßen geschrieben werden:

$$O = \int_{x_1}^{x_2} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} dy dx$$

Das ist die gesuchte Formel für die Oberfläche.

Sie gilt, wenn die Integrale existieren und, wenn  $f(x, y)$  stetig differenzierbar ist. Das heißt  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  sind stetig nach  $(x, y)$ .

### Literatur

- [1] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983  
Vieweg Verlag Braunschweig

# Kapitel B.

## Differentialrechnung

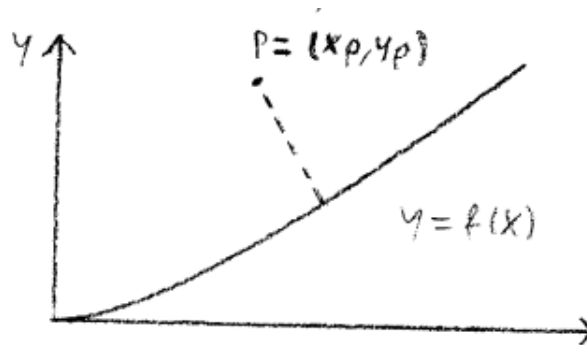
### Inhalt

03. Der Minimalabstand . . . . .	12
04. Einbeschriebene Dreiecke, Trapeze und Rechtecke . . . . .	16
05. Einbeschriebene Pyramide und Pyramidenstumpf . . . . .	21
06. Extremale Winkel . . . . .	23
07. Das Zollstockproblem . . . . .	25
08. Logarithmenformeln als Grenzwerte . . . . .	28
09. Der Krümmungskreis . . . . .	30
10. Winkelgeschwindigkeit und Radiusvektor einer beliebigen Bewegung . . . . .	32
11. Stabilität bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Virusdynamik . . . . .	34

### 03. Der Minimalabstand

#### 1. Der Minimalabstand reeller Funktionen in der Ebene:

Eine Funktion  $f(x)$  hat zu den Punkt  $P = (x_p, y_p)$  einen Minimalabstand. Dieser soll berechnet werden. (siehe auch Abb.)



Es gilt für den Abstand  $D$ :

$$D^2 = (y - y_p)^2 + (x - x_p)^2$$

Wir differenzieren dann  $D^2$ :

$$(D^2)' = 2 \cdot (y - y_p) \cdot y' + 2 \cdot (x - x_p)$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$y' \cdot (y - y_p) + x - x_p = 0 \quad (1)$$

Differenziert man  $D$ , dann folgt mit Hilfe der Kettenregel dasselbe Resultat.

#### Beispiele:

$$y = p \cdot x^m$$

$$pmx^{m-1} \cdot (px^m - y_p) + x - x_p = 0$$

$$y = \sin x$$

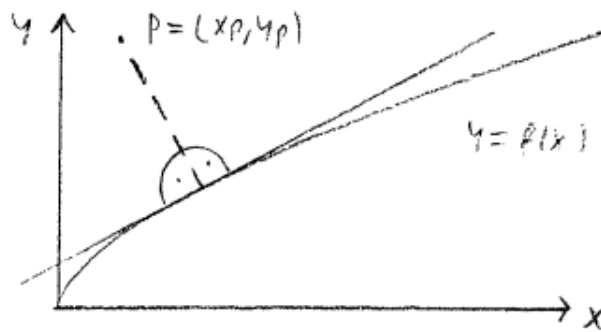
$$\cos x \cdot (\sin x - y_p) + x - x_p = 0$$

$$y = r \cdot a^x$$

$$ra^x \ln a \cdot (ra^x - y_p) + x - x_p = 0$$

Nun stellt sich die Frage, ob der Minimalabstand senkrecht zur Tangente der Funktion steht?

## B. Differentialrechnung



$m$  ist die Steigung der Senkrechten zur Tangente. Dann muß  $y' \cdot m = -1$  gezeigt werden. Es gilt:

$$m = \frac{y - y_p}{x - x_p}$$

Nach (1) erhalten wir:

$$y' = -\frac{x - x_p}{y - y_p}$$

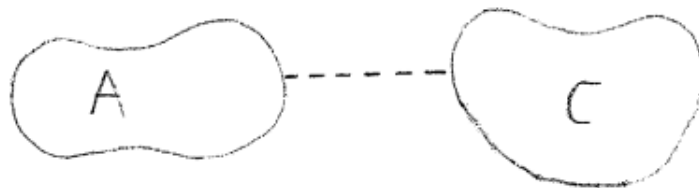
Prüfung:

$$y' \cdot m = -\frac{x - x_p}{y - y_p} \cdot \frac{y - y_p}{x - x_p} = -1$$

Die Vermutung stimmt.

## 2. Minimalabstand von zweidimensionalen Gebilden:

Wir schauen uns folgende Abbildung an:



Die beiden Flächen sollen durch  $A = \vec{a}(p_1, p_2, t)$  und  $C = \vec{c}(q_1, q_2, t)$  dargestellt werden.

$p_1, p_2, q_1, q_2$  sind Flächenparameter.  $t$  ist die Zeit oder ein zusätzlicher Parameter.

Für den Abstand  $r$  erhalten wir:

$$r(p_1, p_2, q_1, q_2, t) = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2}$$

## B. Differentialrechnung

Wir führen folgende Notationen ein:

$$D_1 := \frac{d}{dp_1} \quad D_2 := \frac{d}{dp_2} \quad D_3 := \frac{d}{dq_1} \quad D_4 := \frac{d}{dq_2}$$

Es gilt die Produktregel für Skalarprodukte:

$$D(\vec{a} \cdot \vec{c}) = D\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot D\vec{c}$$

Daraus folgt:

$$D(\vec{a}^2) = 2 \cdot \vec{a} \cdot D\vec{a}$$

Wir haben:

$$r^2 = (\vec{a} - \vec{c})^2$$

$r$  und damit  $r^2$  muß abgeleitet werden:

$$D_1 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_1 \vec{a}$$

$$D_2 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_2 \vec{a}$$

$$D_3 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot -D_3 \vec{c}$$

$$D_4 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot -D_4 \vec{c}$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$D_i r^2 = 0 \quad \text{für} \quad i \in 1, 2, 3, 4$$

Daraus folgt:

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_1 \vec{a} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_2 \vec{a} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_3 \vec{c} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_4 \vec{c} = 0$$

$D_1 \vec{a}, D_2 \vec{a}, D_3 \vec{c}, D_4 \vec{c}$  sind Tangentenvektoren vgl. Forster [1] §15 Satz 1 S.148.

Wir kommen dann zu folgender Aussage:

Der Minimalabstand steht auf beiden Mengen senkrecht.

Das Resultat gilt auch für Mengen mit beliebig endlich vielen Parametern, das man genauso herleiten kann.

Bei  $A \cap C = \emptyset$  muß es einen Minimalabstand geben. Wenn sich aus den vier Gleichungen keine Lösung ergibt, dann ist der minimale Abstand ein Randminimum.

**Spezialfälle:**

$A$  ist eine Kurve, wenn entweder  $p_1$  oder  $p_2$  wegfällt.

$C$  ist eine Kurve, wenn entweder  $q_1$  oder  $q_2$  wegfällt.

$A$  ist ein Punkt, wenn  $p_1$  und  $p_2$  wegfallen.

$C$  ist ein Punkt, wenn  $q_1$  und  $q_2$  wegfallen.

Fällt  $t$  weg, dann sind die Mengen (zeitlich) invariant.

Besondere Parameterwahl:

für Kurven:  $i$  kann 1 oder 2 sein.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p_i \\ f_1(p_i) \\ g_1(p_i) \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} q_i \\ f_2(q_i) \\ g_2(q_i) \end{pmatrix}$$

für Flächen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ f_1(p_1, p_2) \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ f_2(q_1, q_2) \end{pmatrix}$$

**Literatur**

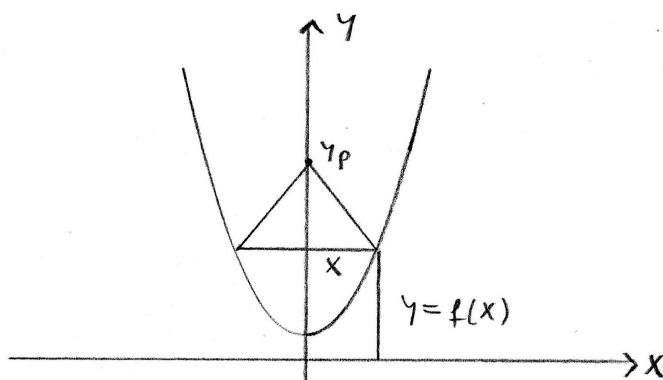
- [1] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983 Vieweg Verlag Braunschweig

## 04. Einbeschriebene Dreiecke, Trapeze und Rechtecke

Wir behandeln hier verschiedene Extremalprobleme mit Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen werden hier häufig durch allgemeine Funktionen gebildet. Ob ein oder mehrere lokale Maxima oder Minima vorliegen, hängt im allgemeinen von der Funktion ab, die die Nebenbedingung beschreibt. Das gilt auch für die Feststellung, ob überhaupt lokale Extrema vorhanden sind. Setzt man von der Zielfunktion die erste Ableitung gleich Null, so bekommt man eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz von lokalen Extrema. Hier geht es vor allen darum, die Form dieser notwendigen Bedingungen kennenzulernen, und zum anderen die Zielfunktion in Abhängigkeit von den Funktionen ganz allgemein zu ermitteln. Es erfolgt hier dann auch keine Diskussion, ob ein lokales Extremum, Maximum, Minimum vorhanden ist. Dazu müssen die Nebenbedingungsfunktionen erst ausgewählt werden. Anschließend kann dann mit der zweiten Ableitung oder evt. auch höheren Ableitungen darüber entschieden werden.

### Einbeschriebenes gleichschenkliges Dreieck

Es soll der maximale Flächeninhalt des folgenden gleichschenkligen Dreiecks berechnet werden. (siehe Abb.)



$y = f(x)$  sei eine achsensymmetrische Funktion d.h.  $f(x) = f(-x)$ . Die Ableitung  $y' = f'(x)$  soll existieren.

Für den Flächeninhalt  $F$  des Dreiecks gilt:

$$F = x \cdot (y_p - y) = xy_p - xy$$

Für ein lokales Extremum muß die notwendige Bedingung sein:

$$0 = F' = y_p - y - xy'$$

Die Extremalbedingung lautet damit:

$$y + xy' = y_p$$



## B. Differentialrechnung

Diese Bedingung gilt für jede symmetrische konvexe Funktion.

Wir geben ein Beispiel mit  $p > 0$  und  $m$  als gerade Zahl:

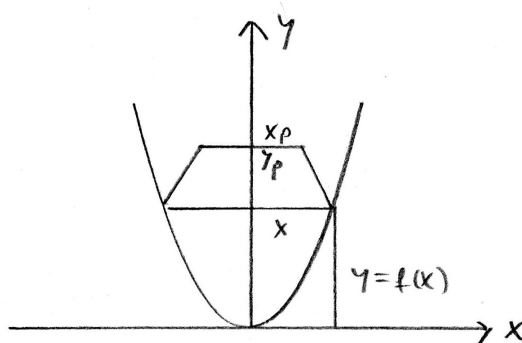
$$y = px^m \quad y' = pmx^{m-1}$$
$$px^m + pmx^m = y_p \quad p \cdot (m+1)x^m = y_p$$

Daraus folgt:

$$x = \sqrt[m]{\frac{y_p}{p \cdot (m+1)}}$$

### Einbeschriebenes Trapez

Wir schauen uns das Trapez in der folgenden Abbildung an: ( $x_p, y_p$  sind fest.)



$y = f(x)$  soll differenzierbar, symmetrisch und konvex sein. Gesucht ist auch hier der maximale Flächeninhalt. Für den Flächeninhalt  $F$  gilt:

$$F = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$$

wobei  $a, c$  die beiden parallelen Seiten und  $h$  die Höhe des Trapezes ist. Mit  $c = 2x_p$ ,  $a = 2x$  und  $h = y_p - y$  folgt:

$$F = (y_p - y) \cdot (x_p + x)$$

$$F' = y_p - y - y' \cdot (x_p + x)$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$F' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' \cdot (x_p + x) = y_p - y$$

Spezialfall gleichschenkliges Dreieck:  $x_p = 0$

$$\Rightarrow \quad xy' + y = y_p$$

Wir betrachten nun das Rechteck mit  $x_p = x$ . Damit bekommen wir als Fläche:

$$F = 2x \cdot (y_p - y) \quad F' = 2 \cdot (y_p - y) - 2xy'$$

## B. Differentialrechnung

Als notwendige Bedingung für das Rechteck erhalten wir mit  $F' = 0$ :

$$xy' = y_p - y$$

Nun wollen wir den extremalen Umfang des Trapezes berechnen. Der Umfang ist  $U = a + c + 2 \cdot \sqrt{(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2}$ . Wenn  $a$  und  $c$  eingesetzt werden folgt:

$$U = 2 \cdot (x + x_p) + 2 \cdot \sqrt{(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2}$$

Kettenregel:

$$U' = 2 + \frac{(-2) \cdot (y_p - y) \cdot y' + 2 \cdot (x - x_p)}{\sqrt{(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2}}$$

Mit der notwendigen Bedingung  $U' = 0$  wird daraus:

$$(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2 = ((y_p - y) \cdot y' - x + x_p)^2$$

Spezialfall gleichschenkliges Dreieck mit  $x_p = 0$ :

$$(y_p - y)^2 + x^2 = ((y_p - y)y' - x)^2$$

Das Rechteck mit  $x_p = x$  muß gesondert ausgerechnet werden.

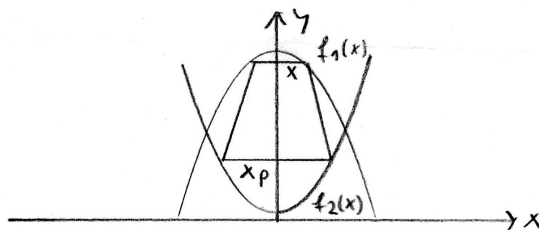
Umfang des Rechtecks:

$$U = 4x + 2 \cdot (y_p - y) \quad U' = 4 - 2y'$$

$$U' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = 2$$

### Das Trapez in zwei Funktionen einbeschrieben

Wir betrachten das Trapez in der Abbildung:



$x$  ist die Veränderliche,  $x_p$  ist fest. Die Funktionen  $f_1, f_2$  sollen achsensymmetrisch und konkav bzw. konvex sein. Nach der elementaren Flächenformel erhält man für die Fläche:

$$F = (x + x_p) \cdot (f_1(x) - f_2(x_p))$$

nach Produktregel:

$$F' = (x + x_p) \cdot f_1'(x) + f_1(x) - f_2(x_p)$$

## B. Differentialrechnung

$F' = 0$  ist notwendige Bedingung für lokale Extrema, also folgt:

$$f_2(x_p) - f_1(x) = (x + x_p) \cdot f_1'(x)$$

Nun geht es um den extremalen Umfang:

$$U = 2 \cdot (x_p + x) + 2 \cdot \sqrt{(x - x_p)^2 + (f_1(x) - f_2(x_p))^2}$$

$U$  nach Kettenregel differenziert:

$$U' = 2 + 2 \cdot \frac{x - x_p + (f_1(x) - f_2(x_p)) \cdot f_1'(x)}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (f_1(x) - f_2(x_p))^2}}$$

Die notwendige Bedingung für lokale Extrema  $U' = 0$  führt zu:

$$(x - x_p + f_1'(x) \cdot (f_1(x) - f_2(x_p)))^2 = (x - x_p)^2 + (f_1(x) - f_2(x_p))^2$$

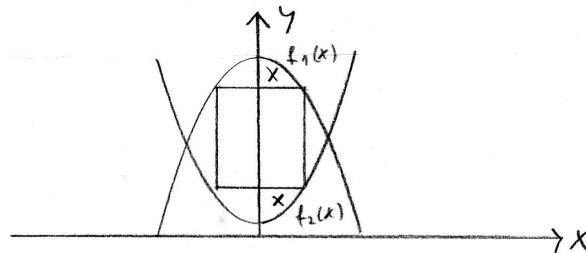
Für den Spezialfall  $x_p = 0$  ergibt sich ein gleichschenkliges Dreieck. Die Bedingung für extreme Fläche lautet:

$$f_2(0) - f_1(x) = x \cdot f_1'(x)$$

Bedingung für extremalen Umfang:

$$(x + f_1'(x) \cdot (f_1(x) - f_2(0)))^2 = x^2 + (f_1(x) - f_2(0))^2$$

Die Formeln für das Rechteck müssen extra hergeleitet werden. Wir betrachten die Abbildung:



Die Fläche des Rechtecks ist:

$$F = (y_1 - y_2) \cdot 2x$$

Ableitung:

$$F' = 2 \cdot ((y_1' - y_2') \cdot x + y_1 - y_2)$$

Aus der notwendigen Bedingung  $F' = 0$  folgt:

$$x \cdot (y_1' - y_2') = y_2 - y_1$$

Für  $y_2 = k$  (konstant) ergibt sich:

$$xy_1' = k - y_1$$

Nun bestimmen wir den Umfang des Rechtecks:

$$U = 4x + 2 \cdot (y_1 - y_2) \quad U' = 4 + 2 \cdot (y_1' - y_2')$$

Die notwendige Bedingung ist  $U' = 0$ , daraus folgt:

$$y_2' - y_1' = 2 \quad y_1 \geq y_2$$

Weitere Extremalprobleme findet man bei Schröer [1].

**Literatur**

- [1] Harald Schröder „Extremalprinzipien“, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2000

© 2012 Harald Schröder

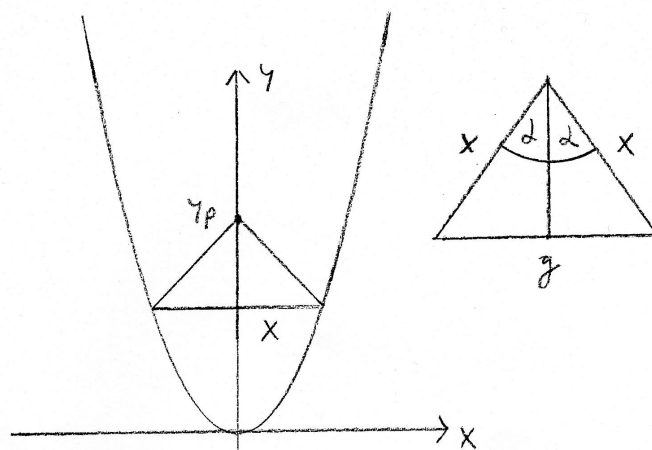
## 05. Einbeschriebene Pyramide und Pyramidenstumpf

**Abstract:** Wir behandeln hier zwei Extremalprobleme mit Nebenbedingungen. Ob ein oder mehrere lokale Maxima oder Minima vorliegen, hängt im allgemeinen von der Funktion ab, die die Nebenbedingung beschreibt. Das gilt auch für die Feststellung, ob überhaupt lokale Extrema vorhanden sind. Setzt man von der Zielfunktion die erste Ableitung gleich Null, so bekommt man eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz von lokalen Extrema. Hier geht es darum, die Form dieser notwendigen Bedingungen kennenzulernen, und zum anderen die Zielfunktion in Abhängigkeit von den Funktionen ganz allgemein zu ermitteln. Es erfolgt keine Diskussion, ob ein lokales Extremum, Maximum, Minimum vorhanden ist. Dazu müssen die Nebenbedingungsfunktionen erst ausgewählt werden. Anschließend kann dann mit der zweiten Ableitung oder evt. auch höheren Ableitungen darüber entschieden werden.

**Key words:** Extremum - Nebenbedingung - Pyramide - Pyramidenstumpf - Maximum - Minimum

### 1. Einbeschriebene Pyramide

Wir betrachten eine Pyramide mit einen regelmäßigen n-Eck als Grundfläche wie in den Abbildungen:



Es gelten dann folgende Gleichungen:

$$\alpha = \frac{\pi}{n}$$

$$A = \frac{gx \cdot \cos \alpha}{2} \quad \text{mit} \quad g = 2 \cdot \sin \alpha \cdot x$$

$$\Rightarrow A = x^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

Für die Grundfläche  $G$  folgt dann:

$$G = n \cdot A = n \cdot x^2 \cdot \cos \alpha \sin \alpha$$

## B. Differentialrechnung

Für das Volumen  $V$  der Pyramide erhalten wir schließlich:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} \quad \text{mit} \quad h = y_p - y \quad \text{und} \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

folgt:

$$V = \frac{1}{6} \cdot nx^2 \cdot (y_p - y) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

differenziert nach Produktregel ergibt:

$$V' = \frac{1}{6} \cdot n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) ((y_p - y) \cdot 2x - x^2 y')$$

Das notwendige Kriterium für lokale Extrema  $V' = 0$  führt zu:

$$2 \cdot (y_p - y) - xy' = 0$$

Beim Zylinder gilt folgendes:

$$G = \pi x^2 \quad V = G \cdot h = \pi x^2 \cdot (y_p - y)$$

Die Rechnung erfolgt analog. Das Kriterium für lokale Extrema bleibt dasselbe.

## 2. Pyramidenstumpf einbeschrieben

Für die beiden Grundflächen haben wir:

$$G_1 = ax^2 \quad G_2 = ax_p^2 \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Für das Volumen des Pyramidenstumpfs gilt die bekannte Formel:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) \quad \text{mit} \quad h = y_p - y$$

Einsetzung:

$$V = \frac{y_p - y}{3} \cdot (ax^2 + axx_p + ax_p^2)$$

Ableitung:

$$V' = \frac{-y'}{3} \cdot a \cdot (x^2 + xx_p + x_p^2) + \frac{y_p - y}{3} \cdot a \cdot (2x + x_p)$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$V' = 0$$

Daraus folgt:

$$(y_p - y) \cdot (2x + x_p) - y' \cdot (x^2 + x_p x + x_p^2) = 0$$

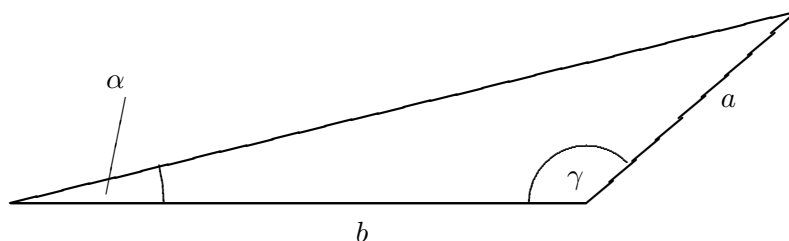
Weitere Beispiele gibt es bei Schröer [1].

## Literatur

- [1] Harald Schröer: Extremalprinzipien, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin 2000

## 06. Extremale Winkel

Wir betrachten das Dreieck in der folgenden Abbildung:



Die Funktion  $\alpha = f(\gamma)$  wird erklärt durch:

$$\tan \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{b - a \cdot \cos \gamma} \quad 0 \leq \gamma \leq 180^\circ \quad b \geq a \quad (1)$$

Es geht nun darum lokale Extrema von  $\alpha$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  zu finden. Da der Tangens eine streng monoton steigende Funktion im Intervall  $[0, 180^\circ]$  ist, genügt es  $\tan \alpha$  zu betrachten.

Wir bilden die Ableitung von  $\tan \alpha$  nach  $\gamma$  mit Hilfe der Quotientenregel:

$$\frac{d \tan \alpha}{d \gamma} = \frac{\cos \gamma \cdot a \cdot (b - a \cos \gamma) - \sin \gamma \cdot a \cdot a \cdot \sin \gamma}{(b - a \cos \gamma)^2}$$

Es gilt  $\tan \alpha \geq 0$  für  $\gamma \in [0, 180^\circ]$ . Damit gibt es nach dem Satz von Rolle und nach einem Satz für stetige Funktionen über Annahme von lokalen Extrema vgl. z.B. Forster [1] §11 Satz 2 S.67 ein lokales Maximum in diesen Intervall.

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$\frac{d \tan \alpha}{d \gamma} = 0$$

Daraus folgt:

$$ab \cos \gamma - a^2 \cdot (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = 0$$

Mit  $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$  erhalten wir:

$$ab \cos \gamma = a^2$$

also:

$$\cos \gamma = \frac{a}{b}$$

Bei  $a \ll b$  ist  $\gamma \approx 90^\circ$ .

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

## B. Differentialrechnung

Einsetzung in (1):

$$\tan \alpha_{max} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \cdot a}{b - \frac{a^2}{b}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{\frac{1}{b} \cdot (b^2 - a^2)} = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

Wir haben also:

$$\tan \alpha_{max} = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

und

$$\tan \alpha_{max} \approx \frac{a}{b} \quad \text{bei} \quad a \ll b$$

Damit haben wir eine Darstellung für den maximalen Winkel gefunden.

Das Problem der Bestimmung der Planetenphasen ist eine Anwendung davon vgl. z.B. Voigt [3] Kapitel II.9.2 S.70,71. Weitere Extremalprobleme findet man bei Schröder [2].

### Literatur

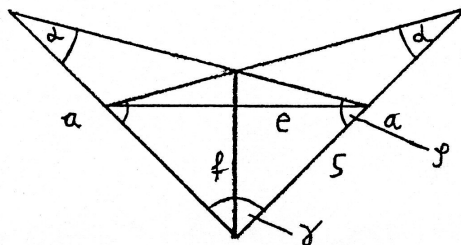
- [1] Otto Forster „Analysis 1“ 4.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig
- [2] Harald Schröder „Spezielle Extremalprobleme“ 2000 Wissenschaft und Technik Verlag Berlin
- [3] Hans Heinrich Voigt „Abriß der Astronomie“ 4.Auflage BI Mannheim 1988

© 2012 Harald Schröder

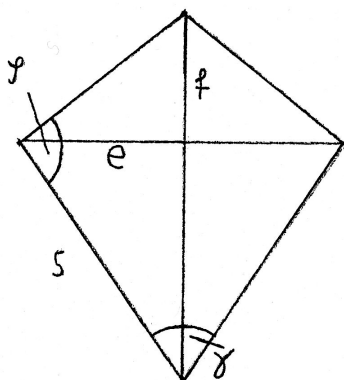


## 07. Das Zollstockproblem

Wir betrachten die Figur innerhalb des Zollstocks:



Von Interesse ist das Drachenviereck, das von vier Seiten eines Zollstocks aufgespannt wird.



Dazu benötigen wir die Abbildungen. Gesucht ist der maximale Flächeninhalt der Drachensfigur mit gegebenen  $a$  und  $\alpha$ .  $\gamma$  ist die Veränderliche.

Sinussatz:

$$\frac{f}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \alpha)} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{a \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \alpha)}$$

$$\frac{s}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \gamma - \alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{e}{2} = s \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e}{2} = \frac{a \sin \alpha \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin(180^\circ - \gamma - \alpha)}$$

Mit der Flächenformel  $F = \frac{ef}{2}$  erhalten wir:

$$F = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin(180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \gamma - \alpha)} \quad \alpha = \text{const.}$$

mit  $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$  wird daraus:

$$F(\gamma) = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\gamma}{2} + \alpha) \cdot \sin(\gamma + \alpha)} \quad (1)$$

## B. Differentialrechnung

Diese Flächenformel muß nach  $\gamma$  differenziert werden. Wir bilden die Ableitung des Nenners mit Produkt- und Kettenregel:

$$\left( \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\gamma + \alpha) \right)' = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \sin(\gamma + \alpha) + \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cos(\gamma + \alpha)$$

Zähler:  $(\sin \frac{\gamma}{2})' = \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$

Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{F'(\gamma)}{a^2 \sin^2 \alpha} &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cdot \sin^2(\gamma + \alpha)} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\gamma + \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\gamma + \alpha) + \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\gamma + \alpha) \right) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \right) \end{aligned}$$

Das notwendige Kriterium für lokale Extrema ist  $F'(\gamma) = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \sin(\gamma + \alpha) - \left( \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \sin(\gamma + \alpha) \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cos(\gamma + \alpha) \right) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 0 \end{aligned}$$

Es gilt  $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \beta$ . Wir dividieren durch  $\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\gamma + \alpha)$ . Dann folgt:

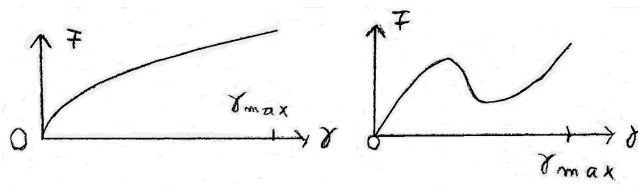
$$\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \tan\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \tan(\gamma + \alpha) - \left( \frac{1}{2} \cdot \tan(\gamma + \alpha) + \tan\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \right) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 0$$

dividiert durch  $\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\gamma + \alpha)$ :

$$\frac{1}{2 \cdot \tan \frac{\gamma}{2}} - \frac{1}{2 \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right)} - \frac{1}{\tan(\gamma + \alpha)} = 0 \quad (2)$$

Hieraus muß  $\gamma$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  bestimmt werden. Das kann durch die Ersetzung der Tangensausdrücke durch Sinus und Kosinus geschehen. Die Anwendung des Näherungsverfahrens von Newton kann hier problematisch sein.

Ob hier lokale Maxima oder lokale Minima vorliegen, muß mit der 2. Ableitung jeweils im konkreten Fall überprüft werden. Es sind auch Sattelpunkte möglich. (vgl. Bilder)

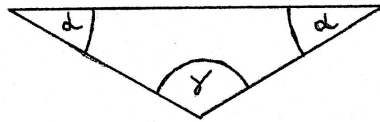


Damit sich eine Drachenfigur ergibt, muß sein:

$$\begin{aligned} 360^\circ - \gamma - 2\varphi &< 180^\circ \quad \text{und} \quad \varphi = 180^\circ - \alpha - \gamma \\ \Rightarrow 360^\circ - \gamma - 2 \cdot (180^\circ - \alpha - \gamma) &< 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha + \gamma < 180^\circ \\ \Rightarrow \gamma < 180^\circ - 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha < \frac{180^\circ - \gamma}{2} \end{aligned}$$

Im Fall  $2\alpha + \gamma = 180^\circ$  entsteht ein gleichschenkliges Dreieck (eine spezielle Drachenfigur).

## B. Differentialrechnung



Weitere ungewöhnliche Extremalprobleme finden sich bei Schröder [1].

### Literatur

- [1] Harald Schröder „Spezielle Extremalprobleme“ 2000 Wissenschaft und Technik Verlag Berlin

© 2012 Harald Schröder

## 08. Logarithmenformeln als Grenzwerte

Wir werden hier eine formelmäßige Darstellung von Logarithmen zu einer beliebigen Basis geben.

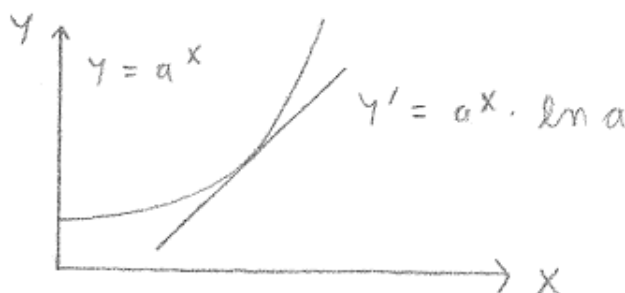
Wir gehen aus von der Gleichung:

$$a^{\log_a x} = x$$

Das ist gleichwertig zu:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (1)$$

Dabei ist  $\ln$  der natürliche Logarithmus.



Für die Ableitung von  $a^x$  gilt:

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln a$$

Wenn wir an die Definition der Ableitung denken:

$$a^x \cdot \ln a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$h$  ist dabei eine Nullfolge. So erhalten wir:

$$\ln a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Nun verwenden wir die Formel (1) um einen Ausdruck für  $\log_a x$  zu bekommen:

$$\log_a x = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h - 1}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h - 1}{a^h - 1} \quad (2)$$

Für  $a = 10$  erhalten wir speziell eine Formel für den Zehnerlogarithmus von  $x$ :

$$\log_{10} x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h - 1}{10^h - 1}$$

Nun wollen wir noch eine zweite Formel für den Logarithmus einer beliebigen Basis herleiten.

## B. Differentialrechnung

Wir gehen jetzt an die andere Definition der Ableitung von  $a^x$  heran.

$$\begin{aligned} a^x \cdot \ln a &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{x-h}}{h} \\ &= a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - a^{-h}}{h} \end{aligned}$$

Damit haben wir dann folgenden Ausdruck:

$$\ln a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - a^{-h}}{h}$$

Nun ziehen wir wieder Gleichung (1) heran:

$$\log_a x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - x^{-h}}{1 - a^{-h}} \quad (3)$$

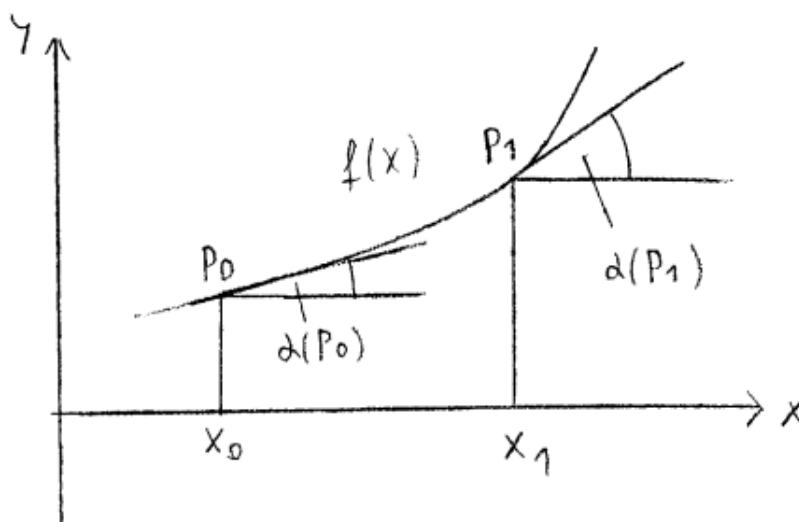
Damit haben wir eine zweite Logarithmenformel hergeleitet. Bei  $a = 10$  ergibt sich speziell für den Zehnerlogarithmus:

$$\log_{10} x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - x^{-h}}{1 - 10^{-h}}$$

© 2001 **Harald Schröder**

## 09. Der Krümmungskreis

Wir wollen uns hier genauer mit der Krümmung einer Funktion im  $R^2$  beschäftigen. Dabei soll es sich um **keine** Gerade handeln. Das bedeutet, daß die zweite Ableitung der Funktion ungleich Null ist. Es bietet sich der folgende Zugang an:



Wir verwenden die Definition der Krümmung aus Bronstein [1] Kapitel 4.3.1.2 S.589:

$$k = \lim_{P_0 \rightarrow P_1} \frac{\alpha(P_1) - \alpha(P_0)}{\widehat{P_0 P_1}}$$

$\widehat{P_0 P_1}$  bezeichnet die Bogenlänge zwischen  $P_0$  und  $P_1$ .

Die Krümmung ist also der Quotient aus einer Winkeldifferenz und einer Bogenlänge. Setzen wir für die Bogenlänge und für die Winkeldifferenz ein, so erhalten wir: ( $f'$  = Ableitung von  $f$ )

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arctan |f'(x)| - \arctan |f'(x_0)|}{\int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt}$$

Wir wenden hier den Satz von L'Hospital an:

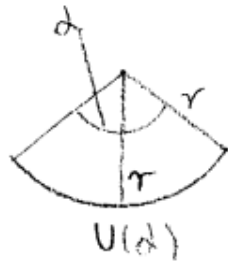
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad g'(a) \neq 0$$

Dabei muß  $f(a) = g(a) = 0$  sein, das im unseren Fall erfüllt ist. Mit diesen Satz kommen wir wegen  $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$  zu:

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \frac{f''(x_0)}{(1+f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nun schauen wir uns folgende Zeichnung an:

## B. Differentialrechnung



Damit können wir auf den Krümmungsradius  $r$  schließen:

$$k := \frac{\alpha}{u(\alpha)} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi r} = \frac{1}{r}$$

Also folgt für den Krümmungsradius:

$$r = \frac{(1 + f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$$

Es gilt dabei  $f''(x_0) \neq 0$ .

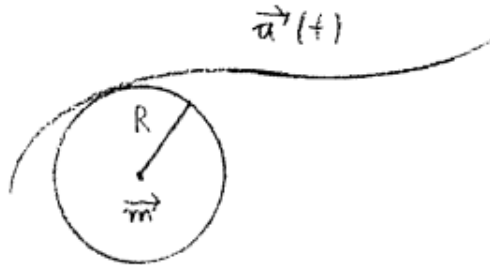
### Literatur

- [1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage

© 2001 Harald Schröder

## 10. Winkelgeschwindigkeit und Radiusvektor einer beliebigen Bewegung

Wir betrachten einen beliebigen Weg  $\vec{a}(t)$  im  $R^n$ .  $t$  ist dabei ein beliebiger Parameter z.B. die Zeit.



Zu jedem Weg an einer beliebigen Stelle läßt sich ein Krümmungskreis konstruieren.

$\vec{x}(t)$  = Krümmungsvektor

$\vec{x}(t) \in R^n$

$x(t) := |\vec{x}(t)|$  = Krümmungsmaß  $|\cdot|$  = Betrag

Nach Barner [1] Kapitel 14.1 S.91 gilt für den Krümmungsvektor:

$$\vec{x} = \frac{\ddot{\vec{a}}}{\dot{a}^2} - \frac{\dot{\vec{a}} \cdot \ddot{\vec{a}}}{\dot{a}^4} \cdot \dot{\vec{a}} \quad \frac{d\vec{a}}{dt} =: \dot{\vec{a}} \quad \dot{a} := |\dot{\vec{a}}| \quad (1)$$

und für das Krümmungsmaß:

$$|\vec{x}| = \frac{\sqrt{\dot{a}^2 \cdot \ddot{a}^2 - (\dot{\vec{a}} \cdot \ddot{\vec{a}})^2}}{\dot{a}^3} \quad (2)$$

Für den Mittelpunkt  $\vec{m}$  des Krümmungskreises wird in Barner [1] Kapitel 14.1 S.89 folgende Formel angegeben:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{\vec{x}}{x^2} \quad (3)$$

Der Betrag des Krümmungskreisradius ist:

$$R(t) = \frac{1}{x(t)}$$

Für den Radiusvektor bekommen wir:

$$\vec{R} = \vec{a} - \vec{m} \quad (4)$$

Nun führen wir die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{w}$  im  $R^3$  ein. Es wird z.B. in Budo [2] §14 S.72 gezeigt:

$$\dot{\vec{a}} = \vec{w} \times \vec{R} \quad (5)$$

Das Problem ist nun  $\vec{w}$  daraus zu bestimmen. Weil  $\vec{w}$  senkrecht zu  $\vec{R}$  steht, folgt für die Beträge der Vektoren:

$$\dot{a} = R \cdot w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{\dot{a}}{R}$$



## B. Differentialrechnung

Für die Bestimmung von  $\vec{w}$  brauchen wir die Vektoroperatorenmethode:

$\vec{R}$  senkrecht zu  $\vec{w}$  liefert:

$$\vec{R} \cdot \vec{w} = 0$$

Aus Gleichung (5) bilden wir:

$$\dot{\vec{a}} \times \vec{R} = (\vec{w} \times \vec{R}) \times \vec{R}$$

Mit dem Entwicklungssatz:

$$= (\vec{w} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{w}$$

Also folgt:

$$\dot{\vec{a}} \times \vec{R} = -R^2 \cdot \vec{w}$$

oder

$$\vec{R} \times \dot{\vec{a}} = R^2 \cdot \vec{w}$$

Wir formen um:

$$\vec{w} = \frac{\vec{R} \times \dot{\vec{a}}}{R^2} \quad (6)$$

Damit ist das Problem vollständig gelöst.

### Literatur

- [1] Martin Barner, Friedrich Flohr „Analysis II“ de Gruyter Verlag Berlin 1983
- [2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980

© 2001 Harald Schröder

## 11. Stabilität bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Virusdynamik

**Zusammenfassung.** In dieser Arbeit diskutieren wir unterschiedliche Modelle von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, die Virusdynamik für verschiedene Situationen beschreiben. Die Modellierung dieser Situation wurde in [NM] durchgeführt. Der Schwerpunkt unserer Untersuchungen liegt in der Stabilitätsanalyse der Differentialgleichungssysteme. Dafür werden Sätze aus der Stabilitätstheorie herangezogen.

### 1. Einleitung

In der Virusdynamik wird untersucht unter welchen Bedingungen sich Viren vermehren oder vermindern. Das ist für den Krankheitsverlauf wesentlich. Wachstumsvorgänge lassen sich gut mit Differentialgleichungen beschreiben. Wichtig ist es dabei festzustellen, unter welchen Bedingungen mit einer Abnahme oder einem konstanten Level oder mit einem ungehemmten Wachstum zu rechnen ist. Zur Veranschaulichung dieser Vorgänge verwendet man verschiedene Modelle.

In Kapitel 2 diskutieren wir zunächst das einfachste Modell zur Beschreibung von Virusdynamik. Kapitel 3 ist dem Modell des HIV-Virus gewidmet. In Kapitel 4 wird dann die Dynamik von Hepatitis B-Viren und in Kapitel 5 die Dynamik von Immunabwehr diskutiert. Schließlich sind im Kapitel 6 einige theoretische Grundlagen zur Stabilitätsanalyse zusammengestellt.

### 2. Ein Basismodell

Zur Beschreibung eines ersten Modells zur Virusdynamik betrachtet man die Dynamik dreier Typen von Objekten in einem ganzen Körper, in einer bestimmten Menge Blut oder Gewebe: man unterscheidet Zellen, die gesund sind, von Zellen, die infiziert sind, und weiter sogenannte freie Viruspartikel. Da es darum geht, die zeitliche Veränderung dieser Objekte zu beschreiben, betrachtet man in einem Zeitintervall  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  die *Anzahl* dieser Zellen, d.h. bezeichne

$$\begin{aligned} x = x(t) & \quad \text{die Anzahl der nichtinfizierten Zellen,} \\ y = y(t) & \quad \text{die Anzahl der infizierten Zellen, und} \\ v = v(t) & \quad \text{die Anzahl der Viruspartikel.} \end{aligned}$$

Das einfachste Modell, das Virusdynamik beschreibt, kann als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda - dx(t) - \beta x(t)v(t) \\ \dot{y}(t) &= \beta x(t)v(t) - ay(t) \\ \dot{v}(t) &= ky(t) - uv(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

geschrieben werden, vergleiche [NM], Gleichung (3.1). Neben den zu bestimmenden unbekanntenen Funktionen  $x, y, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  enthält das System (2.1) eine Reihe von konstanten positiven Größen.

## B. Differentialrechnung

$\lambda$  = Vermehrungsrate der nichtinfizierten Zellen,  
 $d$  = Sterberate der nichtinfizierten Zellen,  
 $a$  = Sterberate der infizierten Zellen,  
 $u$  = Sterberate der Viruspartikel,  
 $k$  = Vermehrungsrate der Viruspartikel infolge der infizierten Zellen, und  
 $\beta$  = Vermehrungsrate der Viruspartikel aufgrund der Reaktionen zwischen Viruspartikel und der nichtinfizierten Zellen.

Typische Werte für diese Konstanten sind z.B.  $\lambda = 10^5, d = 0.1, a = 0.5, \beta = 2 \cdot 10^{-7}, k = 100$  und  $u = 5$ . Eine wichtige Rolle für die Stabilitätsuntersuchung spielen Fix- oder Gleichgewichtspunkte. Ein Fixpunkt  $x^*$  ist eine Konstante für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ist  $\dot{x} = f(x)$  eine Differentialgleichung, so gilt  $\dot{x} = f(x^*) = 0$ .

Wir schauen uns zunächst die folgenden Gleichgewichtspunkte an:

$$x^* = \frac{\lambda}{d} \quad y^* = 0, \quad v^* = 0. \quad (2.2)$$

Das vereinfacht das Differentialgleichungssystem zu:

$$\dot{x} = \lambda - dx =: \tilde{f}(x).$$

Zur Stabilitätsuntersuchung brauchen wir die Ableitung:

$$D\tilde{f}(x) = -d.$$

Wir bilden das charakteristische Polynom mit der Unbestimmten  $s$ :

$$\det(D\tilde{f}(x) - s) = -d - s = 0$$

Mit der Nullstelle bzw. Eigenwert:

$$s = -d < 0$$

Nach Satz 6.1 im Anhang ist der Gleichgewichtspunkt (2. 2) also stabil.

Zur Stabilitätsuntersuchung von (2. 1) brauchen wir noch die Fixpunkte

$$x^* = \frac{au}{\beta k} \quad , \quad y^* = \left( \frac{\beta \lambda k}{adu} - 1 \right) \cdot \frac{du}{\beta k} \quad , \quad v^* = \left( \frac{\beta \lambda k}{adu} - 1 \right) \cdot \frac{d}{\beta}. \quad (2.3)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (2. 1) wird gezeigt, daß die Fixpunkteigenschaft erfüllt wird.

Entsprechend dem System (2. 1) definieren wir:

$$\tilde{f}(x, y, v) := (\lambda - dx - \beta xv, \beta xv - ay, ky - uv)$$

## B. Differentialrechnung

Die Linearisierung führt zur Jacobi Matrix

$$D\tilde{f}(x, y, v) = \begin{pmatrix} (-d - \beta v) & 0 & -\beta x \\ \beta v & -a & \beta x \\ 0 & k & -u \end{pmatrix}.$$

Einsetzung der Fixpunkte:

$$D\tilde{f}(x^*, y^*, v^*) = \begin{pmatrix} \frac{-\beta\lambda k}{au} & 0 & \frac{-au}{k} \\ d \cdot \left( \frac{\beta\lambda k}{adu} - 1 \right) & -a & \frac{au}{k} \\ 0 & k & -u \end{pmatrix}$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom mit der Sarrusregel:  
 $E =$  Einheitsmatrix

$$\begin{aligned} \det(D\tilde{f}(x^*, y^*, v^*) - sE) &= -s^3 + s^2 \cdot \left( -\frac{\beta\lambda k}{au} - a - u \right) \\ &+ s \cdot \left( -\frac{\beta\lambda k}{u} - \frac{\beta\lambda k}{a} \right) - \beta\lambda k + aud \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $-1$  führt zur Normalform

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0.$$

mit:

$$a_1 := \frac{\beta\lambda k}{au} + a + u \quad a_2 := \frac{\beta\lambda k}{u} + \frac{\beta\lambda k}{a} \quad a_3 := \beta\lambda k - aud$$

Nach Satz 6.2 im Anhang hat dieses Polynom genau dann nur Nullstellen mit negativen Realteilen, wenn  $\Delta_1, \Delta_2$  und  $\Delta_3$  größer als Null sind. Dabei sind

$$\Delta_1 := a_1 \quad , \quad \Delta_2 := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 := a_3 \cdot \Delta_2.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\beta\lambda k}{au} + a + u \quad , \\ \Delta_2 &= \left( \frac{\beta\lambda k}{au} + a + u \right) \cdot \left( \frac{\beta\lambda k}{u} + \frac{\beta\lambda k}{a} \right) - \beta\lambda k + aud \quad , \\ \Delta_3 &= (\beta\lambda k - aud) \cdot \Delta_2. \end{aligned}$$

Also ist der Fixpunkt stabil genau dann, wenn folgendes gilt:

$$aud < \beta\lambda k \quad \text{und} \quad \Delta_2 > 0$$

$aud < \beta\lambda k$  ist äquivalent zu  $R_0 = \frac{\beta\lambda k}{adu} > 1$  vgl. [NM] Kapitel 3 S.19.

### 3. Anti-Viral-Drogen-Modelle

Wir haben das Basismodell kennengelernt und betrachten nun speziell den HIV-Virus. Wir beginnen mit "reverse transcriptase Hemmern". Wir nehmen dabei zuerst an, daß das Medikament zu 100 % wirksam ist. Dann kann  $\beta = 0$  (siehe Gleichung (2.1)) gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -ay \\ \dot{v} &= ky - uv \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dieses System enthält folgende Größen:

$y$  = Anzahl der infizierten Zellen,  
 $v$  = Anzahl der freien Viren,  
 $a$  = Sterberate der infizierten Zellen,  
 $k$  = Vermehrungsrate der freien Viren infolge der infizierten Zellen, und  
 $u$  = Sterberate der freien Viren

Mit der Funktion  $\tilde{f}(y, v) := (-ay, ky - uv)$  erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$D\tilde{f}(y, v) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ k & -u \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom vom linearisiertem System: ( $E$  = Einheitsmatrix)

$$\det(D\tilde{f}(y, v) - sE) = (-a - s) \cdot (-u - s) = 0$$

Mit den Eigenwerten  $s_1 = -u < 0$  und  $s_2 = -a < 0$  liegt im Fall  $u \neq a$  ein stabiler Knoten und im Fall  $u = a$  ein stabiler Stern vor. Das System hat nur stabile Fixpunkte.

#### 3.1. HIV: Protease Hemmer

Wir wenden uns nun folgenden Differentialgleichungssystem, bei den einige weitere Größen berücksichtigt sind, zu:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \beta xv - ay \\ \dot{v} &= -uv \\ \dot{w} &= ky - uw \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dabei sind:

$x$  = Anzahl der nichtinfizierten Zellen,  
 $y$  = Anzahl der infizierten Zellen,  
 $v$  = Anzahl der Viruspartikel,  
 $w$  = Anzahl der nichtinfizierten Viruspartikel,  
 $\beta$  = Vermehrungsrate der infizierten Zellen infolge der Reaktionen zwischen nichtinfizierten Zellen und Viruspartikel,

## B. Differentialrechnung

$a$  = Sterberate der infizierten Zellen,  
 $u$  = Sterberate der Viren und der nichtinfizierten Viruspartikel, und  
 $k$  = Vermehrungsrate der nichtinfizierten Viruspartikel.

Wir bilden:

$$\tilde{f}(y, v, w) := (\beta xv - ay, -uv, ky - uw)$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(y, v, w) = \begin{pmatrix} -a & \beta x & 0 \\ 0 & -u & 0 \\ k & 0 & -u \end{pmatrix}$$

Mit Anwendung der Sarrus Regel erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\det(D\tilde{f}(y, v, w) - sE) = (-a - s) \cdot (-u - s)^2 = 0.$$

Mit den Nullstellen:

$$s_1 = -a < 0 \quad s_2 = s_3 = -u < 0$$

Damit kann es bei diesem System nur stabile Fixpunkte geben.

Nun schauen wir uns ein etwas komplizierteres System an. Bei diesem System sind unvollständige Viren und auch latent infizierte Zellen enthalten:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \lambda - dx - \beta xv \\
 \dot{y}_1 &= q_1 \beta xv - a_1 y_1 + \alpha y_2 \\
 \dot{y}_2 &= q_2 \beta xv - a_2 y_2 - \alpha y_2 \\
 \dot{y}_3 &= q_3 \beta xv - a_3 y_3 \\
 \dot{v} &= ky_1 - uv
 \end{aligned} \tag{3. 6}$$

mit den neuen Größen:

$y_1$  = Anzahl der Viren produzierenden Zellen,  
 $y_2$  = Anzahl der latent infizierten Zellen,  
 $y_3$  = Anzahl der Zellen mit unvollständigen Viren,  
 $q_1$  = Wahrscheinlichkeit, mit der eine Viren produzierende Zelle entsteht.  
 $q_2$  = Wahrscheinlichkeit, mit der eine latent infizierte Zelle entsteht.  
 $q_3$  = Wahrscheinlichkeit, mit der eine Zelle mit unvollständigen Virus entsteht.  
 $a_1$  = Sterberate der Viren produzierenden Zellen,  
 $a_2$  = Sterberate der latent infizierten Zellen,  
 $a_3$  = Sterberate der Zellen mit unvollständigen Viren, und  
 $\alpha$  = Rate, mit der latent infizierte Zellen zu Viren produzierenden Zellen werden.

Zu den Größen  $\lambda, d$  und  $\beta$  vgl. Gleichung (2. 1)

Typische Werte für die Konstanten sind z.B.  $\lambda = 10^7$ ,  $d = 0.1$ ,  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.01$ ,

## B. Differentialrechnung

$a_3 = 0.008, \alpha = 0.4, \beta = 5 \cdot 10^{-10}, q_1 = 0.55, q_2 = 0.05, q_3 = 0.4, k = 500$  und  $u = 5$ .

Wir definieren:

$$\tilde{f}(x, y_1, y_2, y_3, v) := \begin{pmatrix} \lambda - dx - \beta xv \\ q_1 \beta xv - a_1 y_1 + \alpha y_2 \\ q_2 \beta xv - a_2 y_2 - \alpha y_3 \\ q_3 \beta xv - a_3 y_3 \\ ky_1 - uv \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f} = \begin{pmatrix} -d - \beta v & 0 & 0 & 0 & -\beta x \\ q_1 \beta v & -a_1 & \alpha & 0 & q_1 \beta x \\ q_2 \beta v & 0 & (-a_2 - \alpha) & 0 & q_2 \beta x \\ q_3 \beta v & 0 & 0 & -a_3 & q_3 \beta x \\ 0 & k & 0 & 0 & -u \end{pmatrix}$$

Die Fixpunkte

$$x^* = \frac{x_0}{R_0} \quad \text{und} \quad v^* = (R_0 - 1) \cdot \frac{d}{\beta}$$

mit

$$x_0 = \frac{\lambda}{d} \quad \text{und} \quad R_0 = \frac{\beta \lambda k}{a_1 d u} \cdot \left( q_1 + \frac{q_2 \alpha}{\alpha + \alpha_2} \right)$$

können durch Einsetzen in das System (3. 6) überprüft werden.

$x_0$  ist der Gleichgewichtspunkt der nichtinfizierten Zellen vor der Infektion und  $R_0$  das grundlegende Reproduktionsverhältnis.

Das charakteristische Polynom wird mit

$$\det(D\tilde{f}(x^*, v^*) - sE)$$

berechnet.

Multiplikation des charakteristischen Polynoms mit  $-1$  führt zur Normalform

$$s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0.$$

Wir definieren

$$\Delta_1 := a_1 \quad , \quad \Delta_2 := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\Delta_4 := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_5 := a_5 \cdot \Delta_4.$$

Nach Satz 6.2 im Anhang folgt:

## B. Differentialrechnung

Das normierte Polynom hat genau dann Lösungen mit negativen Realteilen, wenn  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,  $\Delta_4$  und  $\Delta_5$  alle positiv sind.

Also folgt die Stabilität des Systems genau dann, wenn  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,  $\Delta_4$  und  $\Delta_5$  alle größer als Null sind.

Wir betrachten nun eine Anti-Viral-Therapie, die Infektionen von neuen Zellen verhindert. Das bedeutet  $\beta = 0$ . Es folgt dann aus dem System (3.6):

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -a_1 y_1 + \alpha y_2 \\ \dot{y}_2 &= -a_2 y_2 - \alpha y_2 \\ \dot{y}_3 &= -a_3 y_3 \\ \dot{v} &= k y_1 - uv\end{aligned}\tag{3.7}$$

Wir konstruieren:

$$\tilde{f}(y_1, y_2, y_3, v) := \begin{pmatrix} -a_1 y_1 + \alpha y_2 \\ -a_2 y_2 - \alpha y_2 \\ -a_3 y_3 \\ k y_1 - uv \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(y_1, y_2, y_3, v) = \begin{pmatrix} -a_1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & (-a_2 - \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ k & 0 & 0 & -u \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen das charakteristische Polynom. Die Entwicklung erfolgt nach der 4. Spalte:

$$\begin{aligned}\det(D\tilde{f}(y_1^*, y_2^*, y_3^*, v^*) - sE) \\ = (-u - s) \cdot (-a_1 - s) \cdot (-a_2 - \alpha - s) \cdot (-a_3 - s) = 0\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$s_1 = -u < 0 \quad , \quad s_2 = -a_1 < 0 \quad , \quad s_3 = -a_2 - \alpha < 0 \quad , \quad s_4 = -a_3 < 0.$$

Dieses System hat also nur stabile Fixpunkte.

## 4. Dynamik von Hepatitis B Viren

Wir gehen nun zu einem Modell für die Dynamik von Hepatitis B Viren über, durch folgendes Differentialgleichungssystem (vgl. Novak [NM] S.45):

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \beta x v - ay \\ \dot{v} &= -uv.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Zu den Größen vgl. (2. 1). Wir definieren:

$$\tilde{f}(y, v) := (\beta x v - ay, -uv)$$



## B. Differentialrechnung

Funktionalmatrix:

$$D\tilde{f}(y, v) = \begin{pmatrix} -a & \beta x \\ 0 & -u \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\det(D\tilde{f}(y, v) - sE) = (-a - s) \cdot (-u - s)$$

Die Nullstellen sind:

$$s_1 = -a < 0 \quad , \quad s_2 = -u < 0$$

Bei  $a \neq u$  handelt es sich um einen stabilen Knoten. Bei  $a = u$  ergibt sich ein stabiler Stern.

Setzen wir nun  $\beta = 0$ , so erhalten wir das spezielle System

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -ay \\ \dot{v} &= -uv. \end{aligned} \tag{4. 9}$$

Dieses System hat dasselbe charakteristische Polynom und daher auch dasselbe Stabilitätsverhalten.

## 5. Dynamik der Immunabwehr

Wir berücksichtigen nun die Immunabwehr. Dazu schauen wir uns verschiedene plausible Modelle an. Die Unterschiede liegen bei der CTL-Reaktion. Wir betrachten ein System mit selbstregulierter CTL-Reaktion:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda - dx - \beta xv \\ \dot{y} &= \beta xv - ay - pyz \\ \dot{v} &= ky - uv \\ \dot{z} &= c - bz \end{aligned} \tag{5. 10}$$

Dabei sind:

$x$  = Anzahl der nichtinfizierten Zellen,

$y$  = Anzahl der infizierten Zellen,

$v$  = Anzahl der freien Viruspartikel,

$z$  = CTL-Reaktion, die infizierte Zellen eliminiert.

$\lambda$  = Vermehrungsrate der nichtinfizierten Zellen,

$d$  = Sterberate der nichtinfizierten Zellen,

$\beta$  = Vermehrungsrate der Viren, die infolge der Reaktionen zwischen den nichtinfizierten Zellen und den Viren entstehen.

## B. Differentialrechnung

$a$  = Sterberate der infizierten Zellen,  
 $p$  = Sterberate der infizierten Zellen infolge der Wechselwirkung zwischen infizierten Zellen und der CTL-Reaktion,  
 $k$  = Vermehrungsrate der freien Viruspartikel,  
 $u$  = Sterberate der freien Viruspartikel,  
 $c$  = Vermehrungsrate der CTL-Reaktion, und  
 $b$  = Sterberate der CTL-Reaktion.

Typische Werte für die Konstanten sind z.B.  $\lambda = 1$ ,  $d = 0.01$ ,  $a = 0.5$ ,  $\beta = 0.005$ ,  $k = 50$ ,  $u = 5$ ,  $p = 1$  und  $b = 0.05$ .

Wir bilden:

$$\tilde{f}(x, y, v, z) := \begin{pmatrix} \lambda - dx - \beta xv \\ \beta xv - ay - pyz \\ ky - uv \\ c - bz \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(x, y, v, z) = \begin{pmatrix} (-d - \beta v) & 0 & -\beta x & 0 \\ \beta v & (-a - pz) & \beta x & -py \\ 0 & k & -u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Wir schauen nun auf ein System mit nichtlinearer CTL-Reaktion:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda - dx - \beta xv \\ \dot{y} &= \beta xv - ay - pyz \\ \dot{v} &= ky - uv \\ \dot{z} &= cyz - bz \end{aligned} \tag{5. 11}$$

Wir konstruieren:

$$\tilde{f}(x, y, v, z) := \begin{pmatrix} \lambda - dx - \beta xv \\ \beta xv - ay - pyz \\ ky - uv \\ cyz - bz \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(x, y, v, z) = \begin{pmatrix} (-d - \beta v) & 0 & -\beta x & 0 \\ \beta v & (-a - pz) & \beta x & -py \\ 0 & k & -u & 0 \\ 0 & cz & 0 & (cy - b) \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun ein System mit linearer Immunreaktion:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda - dx - \beta xv \\ \dot{y} &= \beta xv - ay - pyz \\ \dot{v} &= ky - uv \\ \dot{z} &= cy - bz \end{aligned} \tag{5. 12}$$

## B. Differentialrechnung

Wir definieren

$$\tilde{f}(x, y, v, z) := \begin{pmatrix} \lambda - dx - \beta xv \\ \beta xv - ay - pyz \\ ky - uv \\ cy - bz \end{pmatrix}.$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(x, y, v, z) = \begin{pmatrix} (-d - \beta v) & 0 & -\beta x & 0 \\ \beta v & (-a - pz) & \beta x & -py \\ 0 & k & -u & 0 \\ 0 & c & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Für das charakteristische Polynom dieser 3 Systeme (als Funktion der Gleichgewichtspunkte)

$$\det(D\tilde{f}(x^*, y^*, v^*, z^*) - sE)$$

bekommen wir ein Polynom

$$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0.$$

Das System ist genau dann stabil, wenn  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  und  $\Delta_4$  positiv sind. Dabei sind

$$\Delta_1 := a_1 \quad , \quad \Delta_2 := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\Delta_3 := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_4 := a_4 \cdot \Delta_3.$$

Damit ist das Stabilitätskriterium angedeutet. Nun gehen wir zu Modellen über, die sich ausschließlich mit der Immunreaktion des Körpers beschäftigen. Die Anzahl der infizierten und nichtinfizierten Zellen wird dabei vernachlässigt. Damit wird eine Vereinfachung erreicht. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v \cdot (r - pz) \\ \dot{z} &= c - bz. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Die neuen Konstanten  $r$  und  $p$  sind Vermehrungs- bzw. Sterberaten. Wir bilden:

$$\tilde{f}(v, z) := (v \cdot (r - pz), c - bz)$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(v, z) = \begin{pmatrix} r - pz & -pv \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\det(D\tilde{f}(v, z) - sE) = (r - pz - s) \cdot (-b - s)$$

## B. Differentialrechnung

Die Nullstellen sind:

$$s_1 = r - \frac{pc}{b} \quad , \quad s_2 = -b < 0$$

Somit haben wir einen Sattelpunkt - auch hyperbolischer Punkt genannt. Hier gibt es stabile und instabile Bereiche. Aus der Gleichgewichtsbedingung  $z^* = \frac{c}{b}$ , die man direkt aus der Gleichung (5. 13) erkennt, folgt:

Wenn  $r < \frac{pc}{b}$ , dann klingt  $v$  allmählich auf Null ab. Das Immunsystem kontrolliert die Viren.

Wenn  $r > \frac{pc}{b}$ , dann wächst  $v$  immer weiter. Das Immunsystem kann die Viren nicht kontrollieren.

Wir gehen nun ein auf das abgeänderte System

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v \cdot (r - pz) \\ \dot{z} &= cv - bz. \end{aligned} \tag{5. 14}$$

Wir definieren:

$$\tilde{f}(v, z) := (v \cdot (r - pz), cv - bz)$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(v, z) = \begin{pmatrix} r - pz & -pv \\ c & -b \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom mit Gleichgewichtspunkten  $v^*, z^*$ :

$$\det(D\tilde{f}(v^*, z^*) - sE) = s^2 + s \cdot b + cpv^* = 0$$

Wir kommen zu den Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4cpv^*}}{2}.$$

Durch Einsetzen von

$$v^* = \frac{rb}{cp} \quad z^* = \frac{r}{p}$$

in die Differentialgleichung (5. 14) ergibt sich die Fixpunkteigenschaft.

Einsetzung von  $v^*$  in das charakteristische Polynom führt zu den Lösungen

$$s_1 < 0 \quad , \quad s_2 < 0.$$

Das System ist also stabil bei  $v^* = \frac{rb}{cp}$  und  $z^*$  beliebig.

## B. Differentialrechnung

Nun verändern wir das System zu

$$\begin{aligned}\dot{v} &= v \cdot (r - pz) \\ \dot{z} &= z \cdot (cv - b).\end{aligned}\tag{5. 15}$$

Wir bilden:

$$\tilde{f}(v, z) := (v \cdot (r - pz), z \cdot (cv - b))$$

Jacobi Matrix:

$$D\tilde{f}(v, z) = \begin{pmatrix} r - pz & -pv \\ cz & cv - b \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$\det(D\tilde{f}(v^*, z^*) - sE) = s^2 + s \cdot (-r - cv^* + b + pz^*) + rcv^* - rb + pcv^*z^* + pz^*b$$

Für die Gleichgewichtspunkte bekommen wir aus dem System (5. 15)

$$v^* = \frac{b}{c} \quad z^* = \frac{r}{p}.$$

Diese eingesetzt in das charakteristische Polynom

$$s^2 + 2rb = 0.$$

Die Nullstellen sind

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-2rb}.$$

Bei einem linearen System würde sich ein Zentrum oder elliptischer Punkt ergeben. Da aber das System nichtlinear ist, bleibt die Entscheidung offen.

## 6. Anhang

In diesem Abschnitt sind die wesentlichen Ergebnisse, die zur Stabilitätsanalyse benötigt werden, zusammengestellt.

**Satz 6.1** Sei  $x = x(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit reellen Einträgen. Das System  $\dot{x}(t) = Ax$  ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negativen Realteil haben.

Nach Leipholz [L] Kapitel 1.3.2 S.36 gilt folgender Satz:

**Satz 6.2** Sei

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

## B. Differentialrechnung

die Hurwitz-Matrix zum Polynom  $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ . Dann haben die Nullstellen des Polynoms genau dann negative Realteile, wenn alle Hauptunterdeterminanten der Matrix  $H$  positiv sind. Die Hauptunterdeterminanten sind die Größen

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \quad , \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} \quad , \\ \dots, \Delta_{n-1} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}. \end{aligned}$$

## Literatur

- [NM] Martin A. Novak and Robert M. May, *Virus dynamics* Oxford University Press 2000.
- [L] Horst Leipholz, *Stability Theory. An Introduction to the Stability of Dynamic Systems and Rigid Bodies*, 2nd ed., Teubner 1987.

© 2002 Harald Schröder

# Kapitel C.

## Numerik

### 12. Konvergenzmaße

#### 1. Konvergenzmaße im Bereich der reellen Zahlen

##### 1.1. Reelle Folgen

Wir behandeln hier zunächst reelle Zahlenfolgen. Wir setzen voraus daß die Folge  $a_n$  gegen die Folge  $b_n$  konvergiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Wir definieren dann das Konvergenzmaß:

$$k(n) := \frac{|a_n - b_n|}{|a_{n+1} - b_{n+1}|}$$

$|\cdot|$  ist dabei der Betrag einer Zahl. Ein Spezialfall ist z.B.  $b_n = b$ . Das heißt, die Folge  $a_n$  konvergiert gegen eine Konstante.

$k$  ist von  $n$  abhängig.  $k$  stellt ein Maß für die **lokale** Konvergenzgeschwindigkeit dar. Die Konvergenz ist desto schneller desto größer  $k$  ist.

Als Beispiel nehmen wir die Folgen  $a_n = \frac{2}{n}$  und  $b_n = \frac{1}{n}$ . Dann ist das Konvergenzmaß:

$$k(n) = \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

##### 1.2. Differenzierbare Funktionen

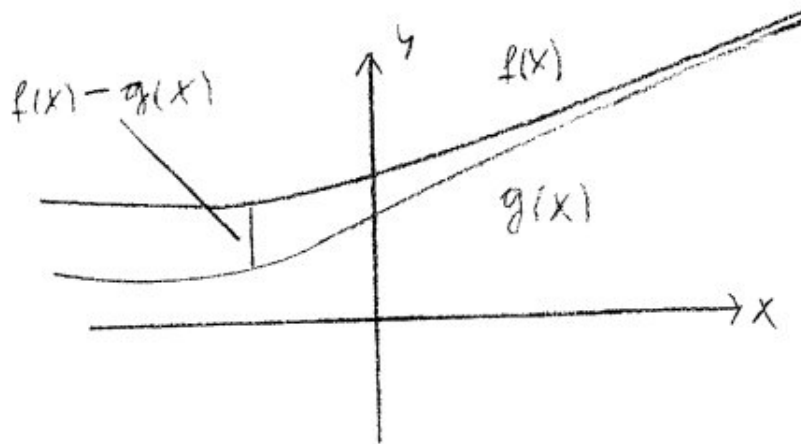
Bei diesen Funktionen kann man ein anderes Konvergenzmaß definieren. Wir setzen voraus, daß  $f$  und  $g$  reelle differenzierbare Funktionen sind. Außerdem soll gelten:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

Das bedeutet asymptotische Annäherung beider Funktionen. Dazu schauen wir uns folgende Zeichnung an:



Dann ist

$$k := \left| \frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) \right| = |f'(x) - g'(x)|$$

Im Spezialfall  $g(x) = b = \text{const.}$  ist  $b$  eine Asymptote parallel zur x-Achse. Als Beispiel nehmen wir  $f(x) = \frac{1}{x}$  und  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ . Wir erhalten für das Konvergenzmaß:

$$k = \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right| = \left| -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right|$$

## 2. Konvergenzmaße in metrischen Räumen

Nun bietet sich die Gelegenheit, diese Konvergenzbegriffe in einen beliebigen metrischen Raum kennenzulernen.

Sei  $M$  eine beliebige Menge. Eine Metrik ist eine Abbildung

$$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

mit folgenden Eigenschaften:  $x, y \in M$

$$d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{Symmetrie}$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Das Paar  $(M, d)$  heißt metrischer Raum.  $d$  ist die Abstandsfunktion.



## 2.1. Folgen

Nun betrachten wir die beiden Folgen  $x_n, y_n \in M$ .  $d$  ist eine Metrik. Vorausgesetzt ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Das ist gleichwertig zu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Das Konvergenzmaß kann dann wie im ersten Fall gebildet werden:

$$k(n) := \frac{d(x_n, y_n)}{d(x_{n+1}, y_{n+1})}$$

Auch hier gilt wieder, daß die Konvergenz schneller erfolgt, desto größer  $k$  ist.  $k$  ist auch hier ein Maß für die lokale Konvergenz.

## 2.2. Differenzierbare Funktionen

Nun schauen wir uns differenzierbare Funktionen in metrischen Räumen an.

$$d(x(t), y(t)) \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

soll differenzierbar nach  $t$  sein. Vorausgesetzt wird dann noch:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), y(t)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

oder:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(x(t), y(t)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$$

Nun bilden wir das Konvergenzmaß wie im zweiten Fall:

$$k := \left| \frac{d}{dt} d(x(t), y(t)) \right|$$

Mit  $d(x, y) = \|x - y\|$  haben wir zugleich die Konvergenzmaße auf normierten Räumen zu beliebiger Norm  $\|\cdot\|$  definiert. Das liegt daran, weil jede Norm auch eine Metrik ist.

Das hier definierte Konvergenzmaß für Folgen hängt mit der in vielen Büchern der numerischen Mathematik vorkommenden Konvergenzordnung zusammen.

# Kapitel D.

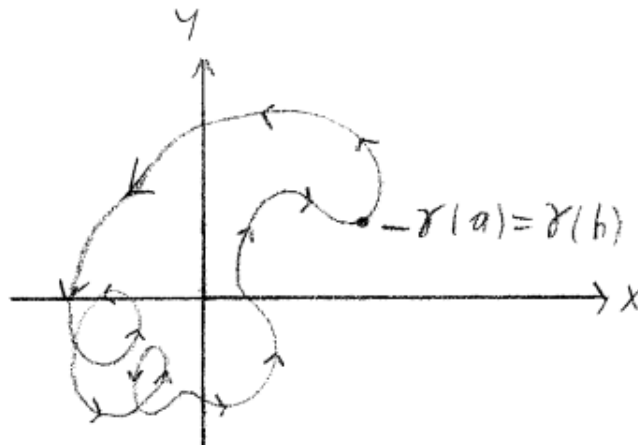
## Funktionentheorie

### 13. Die Umlaufzahl

Das Problem ist hier, die Zahl der Umläufe eines geschlossenen Weges

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  zu bestimmen.



$\gamma$  soll stückweise stetig differenzierbar sein. Die Menge  $\mathbb{R}^2$  ist isomorph zu der Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Wir identifizieren die Abbildung  $\gamma$  mit dem komplexen Integrationsweg  $\beta = \gamma_1 + i \cdot \gamma_2$ , wobei  $i = \sqrt{-1}$  ist. Das weitere Vorgehen kann nach Lieb [1] Kapitel II §1 Def. 1.1 S.38, Kapitel IV §1 Def 1.2 S.101 sowie Beispiel 1 S.101 gemacht werden.

$$\beta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \beta(a) = \beta(b)$$

ist ein geschlossener Integrationsweg und soll stückweise stetig differenzierbar sein.

## D. Funktionentheorie

Wir ziehen nun das Kurvenintegral in  $C$  heran:

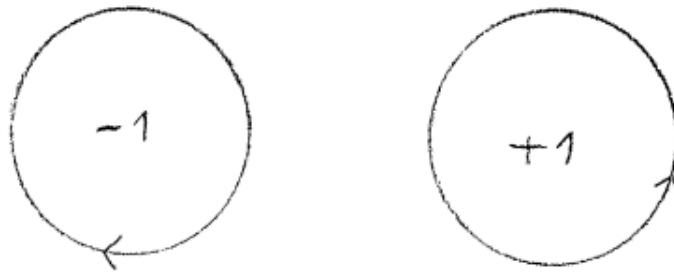
$$\int_{\beta} f(z) dz := \int_a^b f(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}$$

Wie häufig führt der Integrationsweg  $\gamma$  um den Punkt  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  herum? In  $C$  handelt es sich um den Punkt  $z_0 = p_1 + i \cdot p_2 \notin \beta([a, b])$ . Entsprechend gilt auch  $p \notin \gamma([a, b])$ .

Die gesuchte Umlaufzahl ergibt sich nach Lieb [1] Kapitel IV §1 Def. 1.2 S.101:

$$n(\gamma, p) = n(\beta, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\beta} \frac{dz}{z - z_0} \quad (1)$$

$n(\gamma, p)$  ist nach Lieb [1] Kapitel IV §1 Satz 1.2 S.103 eine ganze Zahl. Ist  $n(\gamma, p)$  positiv, so wird die Zahl der Umläufe gegen den Uhrzeigersinn angegeben. Wenn  $n(\gamma, p)$  negativ ist, dann entspricht der Betrag dieser Größe der Zahl der Umläufe mit dem Uhrzeigersinn.



Der Integrationsweg und  $p$  bzw.  $z_0$  sollen nun bekannt sein. Wir werden nun die Formel (1) in eine rein reelle Darstellung bringen.

Mit  $\beta = \gamma_1 + i \cdot \gamma_2, \beta' = \gamma'_1 + i \cdot \gamma'_2$  und  $z_0 = p_1 + i \cdot p_2$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\beta'}{\beta - z_0} &= \frac{\gamma'_1 + i \cdot \gamma'_2}{\gamma_1 + i \cdot \gamma_2 - p_1 - i \cdot p_2} \\ &= \frac{\gamma'_1 + i \cdot \gamma'_2}{(\gamma_1 - p_1) + i \cdot (\gamma_2 - p_2)} \end{aligned}$$

Wir benutzen nun die Zerlegung:

$$\frac{x_1 + i \cdot x_2}{y_1 + i \cdot y_2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{\beta'}{\beta - z_0} &= \frac{\gamma'_1 \cdot (\gamma_1 - p_1) + \gamma'_2 \cdot (\gamma_2 - p_2)}{(\gamma_1 - p_1)^2 + (\gamma_2 - p_2)^2} \\ + i \cdot \frac{\gamma'_2 \cdot (\gamma_1 - p_1) - \gamma'_1 \cdot (\gamma_2 - p_2)}{(\gamma_1 - p_1)^2 + (\gamma_2 - p_2)^2} &=: A + i \cdot B \end{aligned} \quad (2)$$

## D. Funktionentheorie

Weil  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t) \in \mathbb{R}$  folgt  $A(t)$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}$ . Es handelt sich um eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Damit haben wir wegen Gleichung (2):

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b (A + i \cdot B) dt = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b A dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b B dt$$

Aus  $i^2 = -1$  folgern wir  $\frac{1}{i} = -i$  und damit:

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b B dt - i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b A dt$$

$n(\gamma, p)$  ist jedoch eine ganze Zahl, somit:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b A dt = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b B dt$$

oder für  $B$  eingesetzt:

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b \frac{\gamma_2' \cdot (\gamma_1 - p_1) - \gamma_1' \cdot (\gamma_2 - p_2)}{(\gamma_1 - p_1)^2 + (\gamma_2 - p_2)^2} dt$$

Voraussetzungen:  $\gamma(a) = \gamma(b)$  (geschlossener Weg) und  $\gamma$  muß stückweise stetig differenzierbar sein.

Damit ist eine rein reelle Darstellung der Umlaufzahl gewonnen worden.

## Literatur

- [1] Wolfgang Fischer, Ingo Lieb „Funktionentheorie“ Vieweg Verlag 4.Auflage 1985  
Braunschweig

# Kapitel E.

## Geometrie

### Inhalt

14. Projektionen auf Ebenen . . . . .	54
15. Drehungen . . . . .	59
16. Der Schwerpunkt . . . . .	61
17. Die Diagonalen im regelmäßigen n-Eck . . . . .	63
18. Eine besondere Ellipse . . . . .	66
19. Die Halbachsen-Winkelgleichung der Ellipse . . . . .	68
20. Der „Radius“ des Ellipsoiden und die Oberfläche des Rotationsellipsoiden . .	70
21. Die 4. Seite und der Flächeninhalt des Sehnenvierecks . . . . .	74
22. Der 4 Seiten-Fall beim Trapez . . . . .	77
23. Geodätische Linien auf verschiedenen Oberflächen und die maximale Entfernung auf einer Kugeloberfläche . . . . .	80
24. Der Raumwinkel durch ein gleichschenkliges Dreieck . . . . .	84
25. Der Raumwinkel durch ein rechtwinkliges Dreieck . . . . .	85
26. Der Raumwinkel durch ein senkrechtetes Rechteck . . . . .	86
27. Der Raumwinkel durch ein geneigtes Rechteck . . . . .	88

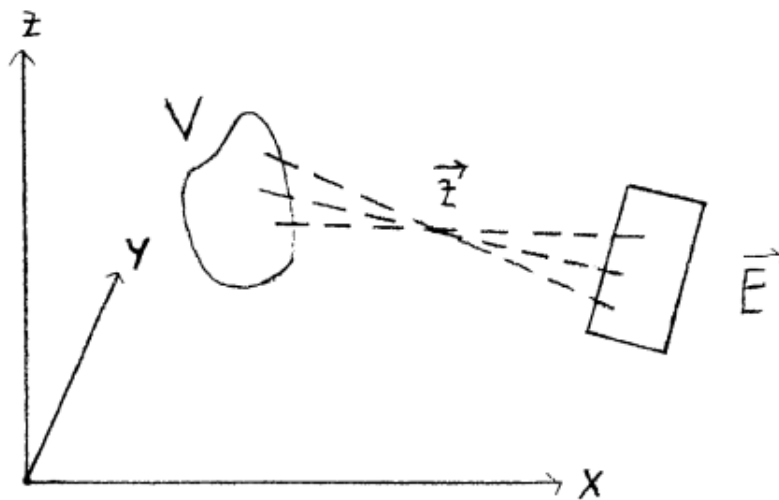
## 14. Projektionen auf Ebenen

### 1. Einleitung

Wir haben eine Menge, einen Projektionspunkt und eine Ebene. Das Ziel dieser Arbeit ist es eine mathematische Beschreibung der Projektion auf der Ebene zu bekommen. Für den Leser ist es interessant eine Vorstellung von der Zentralprojektion zu bekommen, und eine mathematische Form für die Projektion im allgemeinen Fall zu betrachten. Weiterhin ist interessant ,daß dieses Problem ähnlich ist zu der Abbildung auf der Netzhaut (Menschen und Tiere). Ich habe diese Herleitung in der Literatur nicht gesehen. Diese Lücke soll mit diesem Artikel geschlossen werden. Wenn wir eine Darstellung des Bildes im  $R^2$  haben, dann kann die Figur mit Hilfe des Koordinatensystem gezeichnet werden. Die Projektion hat eine wichtige Bedeutung in der Mathematik, Physik, Biologie und in der Naturwissenschaft allgemein darüber hinaus in der Architektur und Technik (darstellende Geometrie). Anwendungen von Projektionen in der Biologie finden sich z.B. in den Buch „Artificial and biological vision systems“ [1]. Anwendungen in der Architektur und in der Technik z.B. bei Salkowski [7], Graf [4], Rehbock [6] und Hohenberg [5].

### 2. Das Problem

Wir betrachten folgendes Problem:



Eine Menge  $V \subset R^3$  wird durch eine Zentralprojektion mit dem Punkt  $\vec{z}$  auf eine Ebene  $\vec{E}$  abgebildet. Es geht um die Darstellung der Abbildung auf der Ebene  $\vec{E}$ .  $\vec{E}$  stellt eine „Mattscheibe“ hinter  $\vec{z}$  dar. Diese Situation kann näherungsweise mit der Abbildung der Augenlinse verglichen werden, wenn der Abstand zwischen  $V$  und  $\vec{z}$  sehr groß gegenüber dem Abstand von  $\vec{z}$  und  $\vec{E}$  ist.

### 3. Die Projektion

Parametrisierung der Ebene:

$$\vec{E} := \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \vec{p}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

Voraussetzung:  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind orthogonal.

Es kann eine Abhängigkeit von der Zeit  $t \in \mathbb{R}$  eingeführt werden.

$$\vec{p} = \vec{p}(t) \quad \vec{v} = \vec{v}(t) \quad \vec{w} = \vec{w}(t) \quad \vec{z} = \vec{z}(t)$$

Parametrisierung von  $V$ :

$$V = \vec{a}(b_1, b_2, b_3, c_1, \dots, c_n, t) = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, t) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in U \subset \mathbb{R}^3$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) \in Q \subset \mathbb{R}^n$$

$b_1, b_2, b_3$  sind örtliche Parameter.

$c_1, \dots, c_n$  sind beliebige Parameter.

Projektionsgerade (siehe Abbildung):

$$\vec{s} := \vec{a} + \varepsilon \cdot (\vec{z} - \vec{a}) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

**Bild auf der Ebene:**

Schnitt zwischen Projektionsgerade und Ebene siehe Abb.:

$$\vec{a} + \varepsilon \cdot (\vec{z} - \vec{a}) = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$$

Als Lösung folgen:

$$\lambda(\vec{b}, \vec{c}, t), \mu(\vec{b}, \vec{c}, t), \varepsilon(\vec{b}, \vec{c}, t)$$

, weil  $\vec{a}$  eine Funktion von  $\vec{b}, \vec{c}$  und  $t$  ist.

Das Bild hat dann die folgende (Koordinaten)-Gestalt:

$$\begin{aligned} \vec{R}(\vec{b}, \vec{c}, t) &:= \vec{a} + \varepsilon(\vec{b}, \vec{c}, t) \cdot (\vec{z} - \vec{a}) \\ &= \vec{p} + \lambda(\vec{b}, \vec{c}, t) \cdot \vec{v} + \mu(\vec{b}, \vec{c}, t) \cdot \vec{w} \end{aligned} \tag{1}$$

**Form des Bildes auf der Ebene:**

$$\vec{f}(\vec{b}, \vec{c}, t) := \vec{R}(\vec{b}, \vec{c}, t) - \vec{p}$$

Der Punkt  $\vec{p}$  wird in den Ursprung des Koordinatensystems der Ebene gelegt.

Es handelt sich hier allerdings um eine Darstellung im  $R^3$ . Angestrebt wird eine Darstellung im  $R^2$ .

Durch Drehung des Koordinatensystems z.B. nach Bronstein [2] Kapitel 2.6.5.2.3 S.216, 217 kann eine Darstellung im  $R^2$  erreicht werden.

Evt. kann eine Verschiebung des geometrischen Mittelpunkts des Bildes in den Ursprung sinnvoll sein.

Schließlich ist evt. eine Drehung im  $R^2$  z.B. nach Bronstein [2] Kapitel 2.6.5.1.3 S.212,213 nötig.

Diese 3 Operationen können (abhängig vom Bild) evt. auch in einer anderen Reihenfolge vorgenommen werden.

Ziel dieser Operationen ist es, eine möglichst einfache Darstellung des Bildes zu erhalten.

#### 4. Zur Voraussetzung, daß $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind:

Die Gestalt der Bilder kann am einfachsten erkannt werden, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  orthogonal sind. Sind  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  nicht orthogonal, so ist es günstig die Richtungsvektoren orthogonal zu machen. Dabei darf allerdings die Ebene nicht **selbst** verändert werden.

Dazu bilden wir einen Normalenvektor:

$$\vec{n} := \vec{v} \times \vec{w}$$

und dann anschließend:

$$\vec{q} := \vec{n} \times \vec{v}$$

Damit ist  $\vec{q}$  orthogonal zu  $\vec{n}$  und  $\vec{v}$ . Da  $\vec{q}$  orthogonal zu  $\vec{n}$  ist, liegt  $\vec{q}$  in der Ebene.

$\vec{q}$  kann auch aus  $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$  und  $\vec{q} \cdot \vec{v} = 0$  ausgerechnet werden. (Skalarprodukt)

Damit ist  $\vec{q}$  bis auf den Betrag bestimmt. Der Betrag kann gewählt werden.

Die neuen zueinander orthogonalen Richtungsvektoren sind dann  $\vec{v}$  und  $\vec{q}$ .



Wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  nicht orthogonal sind, sollte dieses Verfahren zuerst gemacht werden.

## 5. Die Größe des Bildes:

Definition des Abstandsvektors:

$$\vec{r}(\lambda, \mu) := \vec{z} - \vec{E}(\lambda, \mu) = \vec{z} - \vec{p} - \lambda \cdot \vec{v} - \mu \cdot \vec{w}$$

$$r(\lambda, \mu) = |\vec{r}(\lambda, \mu)|$$

Interessant ist nun der minimale Abstand:

$$d := \min\{r(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = r(\lambda_0, \mu_0)$$

Die Ermittlung von  $\lambda_0, \mu_0$  über  $\text{grad}[r(\lambda, \mu)] = 0$  ist eher umständlich. Einfacher geht es so:

Man bildet zuerst die Normalenform der Ebene mit  $\vec{n} := \vec{v} \times \vec{w}$  z.B. nach Fischer [3] Kapitel 0.5.5 S.25. Man rechnet die Parameterform der Ebene in die Normalenform der Ebene um.

Dann kann man z.B. mit Fischer [3] Kapitel 0.4.6 S.21 den minimalen Abstand  $d$  berechnen.

Hat die Ebene  $E$  die Normalenform

$$n_1x + n_2y + n_3z = e \quad e \in \mathbb{R} \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

, so folgt für den Abstand  $d$  mit  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ :

$$d = \frac{|n_1z_1 + n_2z_2 + n_3z_3 - e|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Sind  $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$  Funktionen von  $t$ , so sind auch  $r$  und  $d$  Funktionen von  $t$ .

Es gilt:

Bildgröße  $\sim d(t)$  (Strahlensatz), wenn  $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w}, V$  konstant bleiben,  $\vec{z}$  dagegen eine Funktion von  $t$  ist.

**Literatur**

- [1] „Artificial and biological vision systems“ Springer Verlag Berlin 1992
- [2] Bronstein, Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ 22.Auflage 1985 Leipzig
- [3] Gerd Fischer „Lineare Algebra“ 8.Auflage Vieweg Verlag Braunschweig 1984
- [4] Ulrich Graf „Darstellende Geometrie“ 8.Auflage Heidelberg 1964
- [5] F. Hohenberg „Konstruktive Geometrie für Techniker“ Wien 1956
- [6] F.Rehbock „Darstellende Geometrie“ 3.Auflage Heidelberg 1969
- [7] E. Salkowski „Grundzüge der darstellende Geometrie“ 9.Auflage Leipzig 1963

© 2001 **Harald Schröder**

## 15. Drehungen

Wir schauen uns hier ein interessantes Drehungsproblem bei Vektoren an:



$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  werden durch Drehung in der Ebene in  $\vec{c}$  und  $\vec{d}$  überführt.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in R^3$

Bei der Drehung bleiben die Beträge der Vektoren erhalten, ebenso wie die Winkel zwischen den Vektoren:

$$|\vec{a}| = |\vec{c}| \quad |\vec{b}| = |\vec{d}|$$

$$\alpha := \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{c}, \vec{d})$$

Für den Betrag des Vektorprodukts folgt daraus:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c} \times \vec{d}| \quad (1)$$

wegen:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \quad |\vec{c} \times \vec{d}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \sin \alpha$$

Aus den Bildern ist klar, daß die Vektoren  $\vec{a} \times \vec{b}$  und  $\vec{c} \times \vec{d}$  in dieselbe Richtung zeigen. Mit der Gleichung (1) können wir dann auf

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} \quad (2)$$

schließen.

Nun wenden wir uns dem Problem zu, mit Hilfe von drei bekannten Vektoren den vierten Vektor zu bestimmen. Wir gehen jetzt davon aus, daß  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bekannt sind und  $\vec{d}$  berechnet werden muß. Die einfache Auflösung von Gleichung (2) nach  $\vec{d}$  führt zu keiner vernünftigen Lösung. Wir müssen an  $\vec{d}$  mit einem anderen Verfahren herankommen. Wegen  $|\vec{a}| = |\vec{c}|$  und  $|\vec{b}| = |\vec{d}|$  sowie  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{c}, \vec{d})$  kommen wir zu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha = \vec{c} \cdot \vec{d}$$

Also haben wir folgende Skalarproduktaussage:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d} \quad (3)$$

Wir gehen jetzt von der Gleichung (2) aus und bilden:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{d}) \times \vec{c}$$

Nun wenden wir den Entwicklungssatz z.B. nach Bartsch [1] Kapitel 7.3.2 S.275 an:

$$= (\vec{c} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d} - (\vec{d} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c}$$

Mit Gleichung (3):

$$= \vec{a}^2 \cdot \vec{d} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Wir bekommen:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}^2 \cdot \vec{d} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Nun kann  $\vec{d}$  isoliert werden:

$$\vec{d} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}}{\vec{a}^2}$$

Mit dem Entwicklungssatz:

$$= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}}{\vec{a}^2}$$

$\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$  müssen **in einer Ebene** liegen. Das heißt sie müssen linear abhängig sein. Aus

$$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c} = 0$$

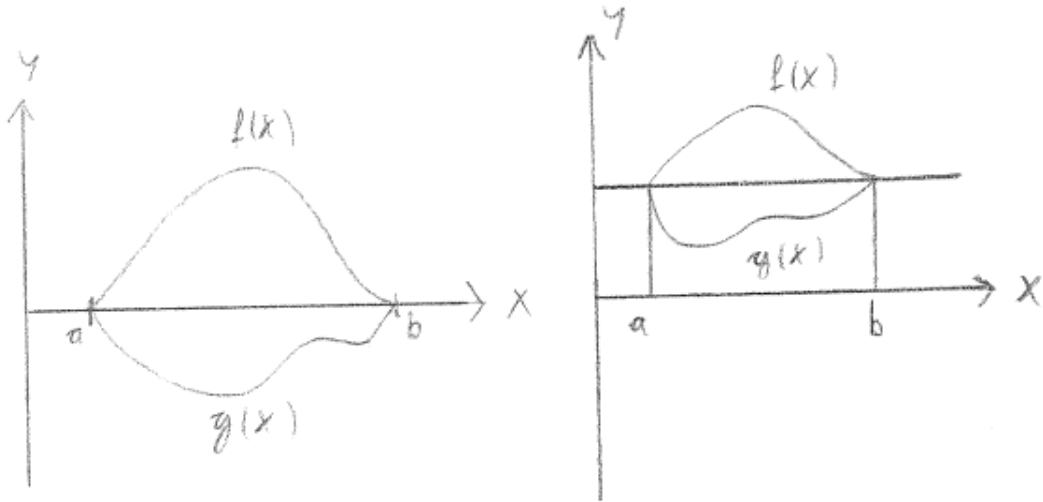
mit  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$  darf nicht folgen  $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ .  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  müssen aufeinander abgestimmt werden. Wird das nicht gemacht, so kann es sein, daß  $|\vec{b}| \neq |\vec{d}|$  herauskommt. Die Beträge von  $\vec{b}$  und  $\vec{d}$  müssen aber gleich sein.

## Literatur

- [1] Hans-Jochen Bartsch „Taschenbuch mathematischer Formeln“ Verlag Harri Deutsch 7. bis 9. Auflage Frankfurt am Main 1986

## 16. Der Schwerpunkt

Wir schauen uns folgende Flächen an:



Das Ziel ist es, den Schwerpunkt dieser Flächen zu ermitteln. Dazu betrachten wir eine beliebige Fläche  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Mit  $u = (x_1, x_2) = (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$ , der Masse  $m(A)$  und der Dichte  $\varphi(u)$  gilt für den Ortsvektor  $s(A) = (s_1, s_2) \in A$  des Schwerpunkts:

$$s_i(A) = \frac{1}{m(A)} \int_A \varphi(u) \cdot x_i \, d^2u$$

Dabei ist  $i \in 1, 2$ .

Wenn wir uns nun wieder den obigen speziellen Flächen zuwenden, dann können wir aus den Abbildungen schließen:

$$f(a) = g(a) \quad f(b) = g(b)$$

Wir setzen voraus, daß die Dichte  $\varphi = c$  konstant ist. Dann haben wir:

$$m(A) = F(A) \cdot c \tag{1}$$

$F(A)$  ist der Flächeninhalt oder das 2-dimensionale Volumen von  $A$ . Wir berechnen nun die x-Koordinate des Schwerpunkts:

$$x_s = \frac{1}{m(A)} \cdot \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} c \cdot x \, dy dx$$

Nun setzen wir Gleichung (1) für  $m(A)$  ein:

$$x_s = \frac{1}{F(A)} \cdot \int_a^b x \int_{g(x)}^{f(x)} dy dx = \frac{1}{F(A)} \cdot \int_a^b x \cdot [y]_{g(x)}^{f(x)} dx$$

Wir rechnen aus:

$$x_s = \frac{1}{F(A)} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

In die letzte Gleichung setzen wir ein:

$$F(A) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad (2)$$

Wir erhalten:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \quad (3)$$

Damit ist die x-Koordinate berechnet. Nun kommen wir zu der y-Koordinate des Schwerpunkts. Wir verwenden wieder die allgemeine Formel für den Schwerpunkt:

$$y_s = \frac{1}{m(A)} \cdot \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} c \cdot y dy dx$$

Wiederum mit Gleichung (1):

$$y_s = \frac{1}{F(A)} \cdot \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} y dy dx = \frac{1}{F(A)} \cdot \int_a^b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{g(x)}^{f(x)} dx$$

Die Auswertung ergibt:

$$y_s = \frac{1}{2F(A)} \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Nun benutzen wir wieder Gleichung (2) und bekommen schließlich:

$$y_s = \frac{\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx}{2 \cdot \int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \quad (4)$$

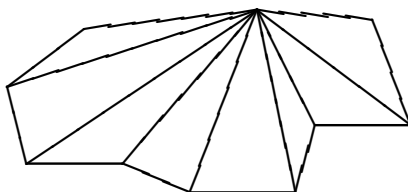
Mit den Gleichungen (3) und (4) kann man die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche  $A$  bestimmen. Die Formeln (3) und (4) sind im Bartsch [1] Kapitel 10.11 S.437 3. Abschnitt ohne Beweis angegeben.

## Literatur

- [1] „Taschenbuch mathematischer Formeln“ Hans-Jochen Bartsch Verlag Harri Deutsch 7. bis 9. Auflage Frankfurt am Main 1986

## 17. Die Diagonalen im regelmäßigen n-Eck

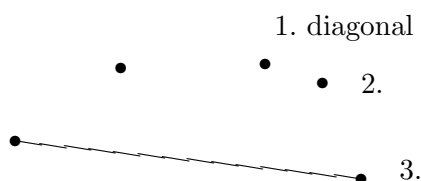
Von jedem Punkt eines n-Ecks gehen  $n - 3$  Diagonalen aus. Das ergibt  $n \cdot (n - 3)$  Diagonalen. vgl. Abb.



Jedoch hat jede Diagonale zwei Punkte des n-Ecks. So wird jede Diagonale zweimal gezählt. Also ist die Anzahl der Diagonalen:

$$z_D = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Wir wollen nun beim regelmäßigen n-Eck die Zahl der geschnittenen Diagonalen bei der m. Diagonale ermitteln. vgl. Abb.



Auf der einen Seite von der m. Diagonale befinden sich  $m$  Punkte. Auf der anderen Seite sind es  $n - m - 2$  Punkte.

Die m. Diagonale schneidet also  $m \cdot (n - m - 2)$  Diagonalen innerhalb des regelmäßigen n-Ecks.

### Das Maximum:

Wir ermitteln jetzt das Maximum von  $m \cdot (n - m - 2) = mn - m^2 - 2m$ .

Ableitung nach  $m$ :

$$f'(m) = n - 2m - 2$$

Kriterium für lokales Extremum:

$$0 = f'(m) = n - 2 - 2m \quad f''(m) = -2$$

Daraus folgt:

$$m = \frac{n-2}{2}$$

Es handelt sich um ein Maximum. Wir werden diese maximale Anzahl für das gerade n-Eck nun bestimmen. Später kommen wir dann auch zum ungeraden n-Eck.

Beim geraden n-Eck ist  $\frac{n-2}{2}$  eine natürliche Zahl. Daher kann diese Zahl für  $m$  in die Formel  $m \cdot (n - m - 2)$  eingesetzt werden.

Einsetzung:

$$\frac{n-2}{2} \cdot \left( n - \frac{n-2}{2} - 2 \right) = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{(n-2)^2}{4}$$

Im geraden regelmäßigen n-Eck kann eine Diagonale maximal  $\frac{(n-2)^2}{4}$  Diagonalen schneiden.

Beim ungeraden n-Eck ist  $\frac{n-2}{2}$  keine natürliche Zahl. Daher müssen die Einsetzungen für  $\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$  und  $\frac{n-2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{2}$  vorgenommen werden.

Einsetzung von  $\frac{n-1}{2}$  für  $m$  in  $m \cdot (n - m - 2)$ :

$$\frac{n-1}{2} \cdot \left( n - \frac{n-1}{2} - 2 \right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n - n + 1 - 4}{2} = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2}$$

Einsetzung von  $\frac{n-3}{2}$ :

$$\frac{n-3}{2} \cdot \left( n - \frac{n-3}{2} - 2 \right) = \frac{n-3}{2} \cdot \frac{2n - n + 3 - 4}{2} = \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

Die beiden Maximalwerte sind gleich. Die Diagonalen können in einen regelmäßigen ungeraden n-Eck maximal  $\frac{(n-3) \cdot (n-1)}{4}$  Diagonalen schneiden.

### **Abschätzung für die Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen im regelmäßigen n-Eck:**

Zu diesen Überlegungen vgl. [1]. Die Verbindungsstrecken zwischen 4 Punkten ergeben einen Diagonalenschnittpunkt, wobei es auch Schnittpunkte von mehreren Diagonalen geben kann. Deswegen gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen im regelmäßigen n-Eck} \\ & \leq \binom{n}{4} = \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} \leq \frac{n^4}{24} \end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir eine Abschätzung gewonnen.

Weitere Informationen zum n-Eck sind enthalten bei Schröer [2].



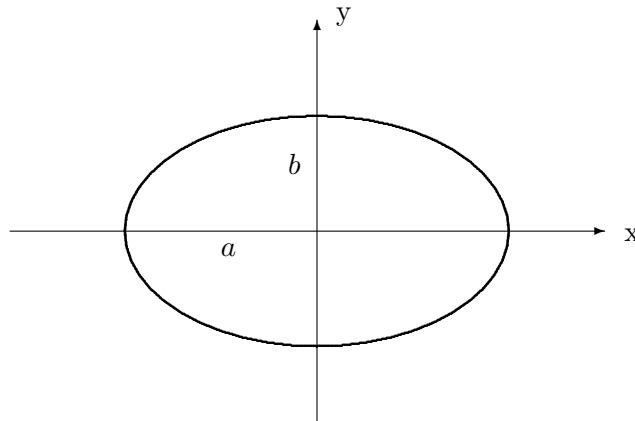
**Literatur**

- [1] „The number of triangles formed by intersecting diagonals of a regular polygon“
- [2] Harald Schröder „Das n-Eck“ Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001

© 2012 **Harald Schröder**

## 18. Eine besondere Ellipse

Wir betrachten eine gewöhnliche Ellipse:



Wir benötigen die Mittelpunktsleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a$  und  $b$  sind die große und die kleine Halbachse. Wir formen nach  $y^2$  um:

$$y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2)$$

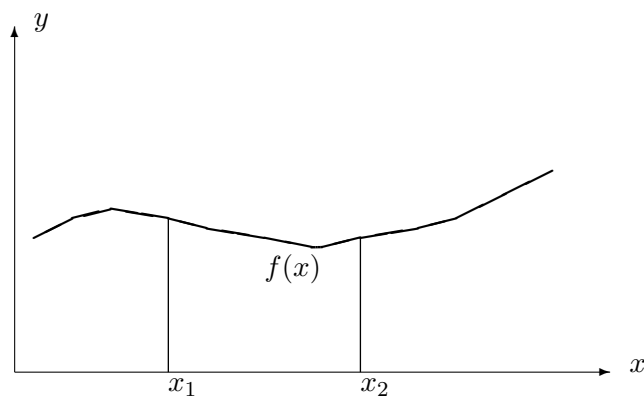
Daraus folgt:

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wir leiten nach der Kettenregel ab:

$$y'(x) = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Nun werfen wir einen Blick auf die folgende Abbildung:



Für die Weglänge  $U_s$  gilt allgemein:

$$U_s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Also ist der gesamte Umfang der Ellipse:

$$U = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (1)$$

Wir führen nun die lineare Exzentrizität  $e$  und die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  ein. Wir haben die Zusammenhänge  $e^2 = a^2 - b^2$  und  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ , so daß wir erhalten:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 a^2 = a^2 - b^2$$

Schließlich:

$$b^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2$$

Bei  $\varepsilon = 1$  folgt  $b = 0$ . Der Fall  $\varepsilon = 1$  liefert nach Gleichung (1) den Umfang:

$$U = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + 0} dx = 4 \cdot \int_0^a 1 dx = 4 \cdot a$$

Bei  $b = 0$  kann dieses Resultat auch gesehen werden. Die Ellipse geht in eine Strecke über.

Ganz allgemein haben wir für den Ellipsenumfang folgende Formel, vgl. Bartsch [1] Kapitel 7.5.1 S. 302:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot w$$

mit:

$$w = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots$$

Für  $\varepsilon = 1$  hatten wir  $U = 4a$  ausgerechnet. Also können wir für  $\varepsilon = 1$  setzen:

$$4a = U = 2\pi a \cdot w$$

Daraus folgern wir:

$$w = \frac{2}{\pi} \quad \text{für} \quad \varepsilon = 1$$

Wir bekommen schließlich die bemerkenswerte Beziehung:

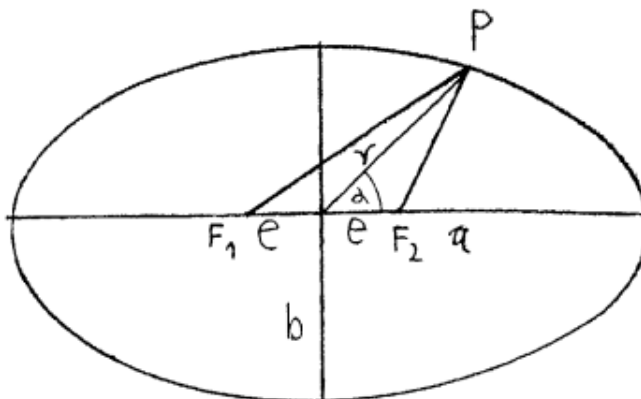
$$\frac{2}{\pi} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 - \dots$$

## Literatur

- [1] Hans-Jochen Bartsch „Taschenbuch mathematischer Formeln“ Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main 1986 7. bis 9.Auflage

## 19. Die Halbachsen-Winkelgleichung bei der Ellipse

Wir betrachten folgende Ellipse:



$a$  ist die große Halbachse und  $b$  die kleine Halbachse.  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  soll die lineare Exzentrizität sein. Im Fall  $a = b$  ist  $r$  tatsächlich der Radius des Kreises (ein Spezialfall der Ellipse). Wir wollen die Winkelabhängigkeit von  $r$  herausbekommen. Für die Ellipse gilt bezüglich der Abstandssumme und der beiden Brennpunkte  $F_1, F_2$ :

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Wir setzen zweimal den Kosinussatz ein:

$$2a = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \alpha} + \sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos(180^\circ - \alpha)}$$

Mit  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ :

$$2a = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \alpha} + \sqrt{e^2 + r^2 + 2er \cos \alpha}$$

Quadriert:

$$4a^2 = 2e^2 + 2r^2 + 2 \cdot \sqrt{e^4 + 2e^2r^2 + r^4 - 4e^2r^2 \cos^2 \alpha}$$

Die Wurzel wird isoliert und quadriert:

$$(2a^2 - e^2 - r^2)^2 = e^4 + 2e^2r^2 + r^4 - 4e^2r^2 \cos^2 \alpha$$

Ausmultipliziert:

$$4a^4 + e^4 + r^4 - 4a^2e^2 - 4a^2r^2 + 2e^2r^2 = e^4 + 2e^2r^2 + r^4 - 4e^2r^2 \cos^2 \alpha$$

Zusammengefaßt:

$$4a^4 - 4a^2e^2 - 4a^2r^2 = -4e^2r^2 \cos^2 \alpha$$

Dividiert durch  $4a^2$ :

$$a^2 - e^2 - r^2 = -\frac{e^2}{a^2} \cdot r^2 \cos^2 \alpha$$

Wir führen  $a^2 - e^2 = b^2$  und die numerische Exzentrizität  $\varepsilon = \frac{e}{a}$  ein:

$$b^2 - r^2 = -\varepsilon^2 r^2 \cos^2 \alpha$$

Umgeformt:

$$b^2 = r^2 \cdot (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha)$$

Nach  $r$  umgeformt:

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}} \quad (1)$$

Damit haben wir  $r$  als Funktion von der numerischen Exzentrizität, den Halbachsen und dem Winkel  $\alpha$ . Wir wollen nun daraus eine Formel herleiten, in der nur die Halbachsen und der Winkel  $\alpha$  vorkommen. Wir setzen

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

in die Gleichung (1) ein:

$$r = \sqrt{\frac{b^2}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \cos^2 \alpha}}$$

Erweitert und vereinfacht:

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + b^2 \cos^2 \alpha}}$$

Wegen  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}$$

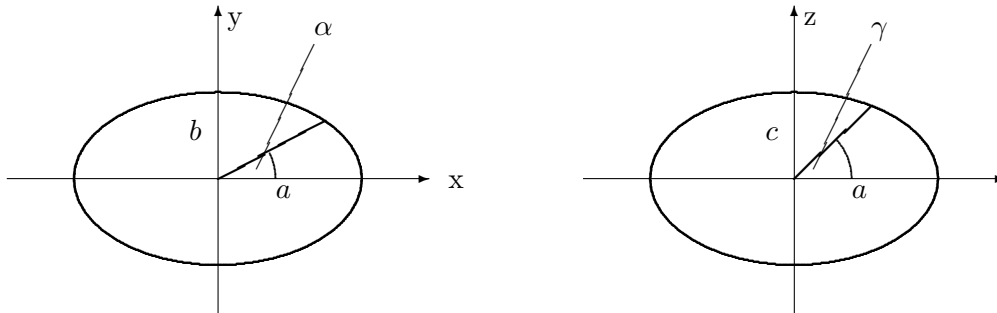
Das ist eine Halbachsen-Winkel-Gleichung, die in die folgende Form überführt werden kann:

$$a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = \frac{a^2 b^2}{r^2} \quad (2)$$

## 20. Der „Radius“ des Ellipsoiden und die Oberfläche des Rotationsellipsoiden

### 1. Der „Radius“ des Ellipsoiden

Wir schauen uns die folgenden Abbildungen an:



$r$  = „Radius“ des Ellipsoiden

$a, b, c$  = Halbachsen des Ellipsoiden

Bei  $r$  handelt es sich um keinen wirklichen Radius.  $r$  wird nur so bezeichnet, weil der Ellipsoid im Fall gleicher Halbachsen in eine Kugel übergeht und  $r$  dann der Kugelradius ist. Es ist aber interessant auch beim Ellipsoiden diese Größe  $r$  zu betrachten.  $r$  wird anders als bei der Kugel nicht konstant sein, sondern von den Koordinaten  $x, y, z$  abhängen. Die erste Gleichung folgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

Die zweite Gleichung erhalten wir z.B. mit Bronstein [1] Kapitel 2.6.6.2 S. 233:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

Für die Winkel bekommen wir nach den Abbildungen die Beziehungen:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \quad \tan \gamma = \frac{z}{x}$$

Wir formen Gleichung (2) nach  $z^2$  um und setzen bei  $z^2$  in Gleichung (1) ein:

$$r^2 = x^2 + y^2 + c^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Damit haben wir eine Gleichung für  $r$  die nur von zwei Koordinaten und von den Halbachsen abhängig ist. Auflösung von Gleichung (2) nach  $y^2$  und Einsetzen in Gleichung (1) liefert:

$$r^2 = x^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) + z^2$$

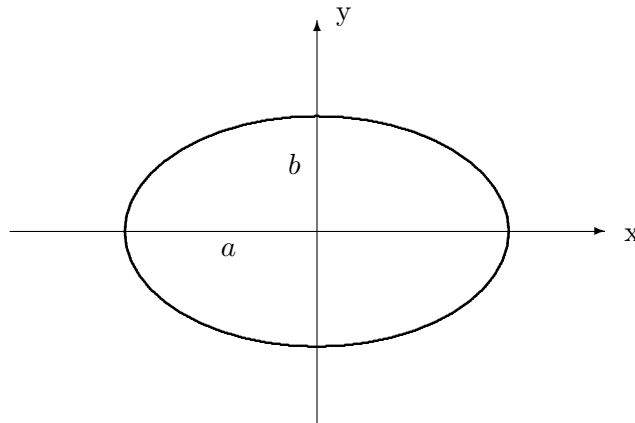
Umformung von Gleichung (2) nach  $x^2$  und Einsetzen in Gleichung (1) führt zu:

$$r^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2$$

Wesentlich schwieriger ist eine Darstellung von  $r$  mit 2 Winkeln und den 3 Halbachsen. Mutige Leser können sich mit diesem Problem auseinandersetzen.

## 2. Die Oberfläche des Rotationsellipsoiden

Wir schauen uns eine Ellipse an:



Wir benötigen die Mittelpunktsleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

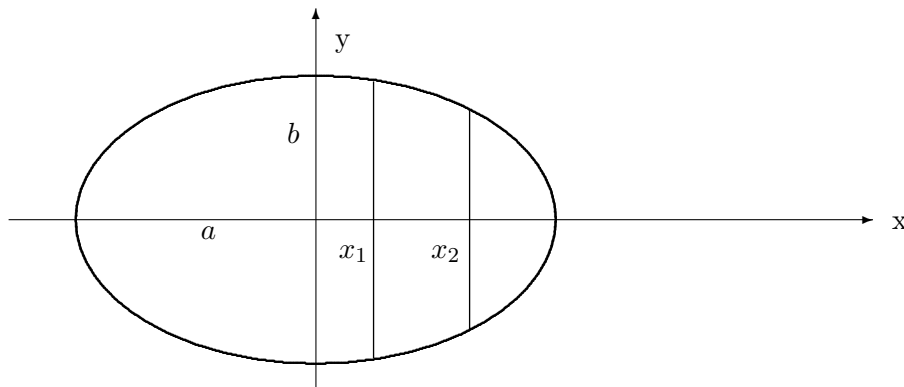
Nach  $y$  aufgelöst:

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wir bilden die Ableitung:

$$y' := \frac{dy}{dx} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Wir betrachten nun den Rotationsellipsoiden in der folgenden Abbildung:



Für den Mantel des Rotationskörpers gilt:

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Es ist dabei  $-a \leq x_1 \leq x_2 \leq a$ . Nun setzen wir für den Rotationsellipsoiden ein:

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2) &= 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 \cdot (a^2 - x^2)}} dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2} dx \end{aligned}$$

Dann erreichen wir:

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot x^2} dx \quad (3)$$

Wir formen diesen Term noch weiter um zu:  $a > b > 0$

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} - x^2} dx \quad (4)$$

Die Integration kann z.B. nach Gröbner [2] Kapitel 236 S.52 Nr. 5f oder Bronstein [1] Kapitel 1.1.3.3 S.44 Nr. 157 geleistet werden.

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{|R|} + c$$

$c$  ist die Integrationskonstante. Dieses Integral kann durch Differenzieren bestätigt werden. Es gilt  $a > b > 0$ . Wir setzen ein für den Rotationsellipsoiden:

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2) &= 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \left[ \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} - x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{2} \cdot a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \arcsin \left( \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \right]_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

Nun setzen wir  $x_2 = h$  und  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} M(0, h) &= 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \left( \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} - h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \cdot \arcsin \left( \frac{h}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \right) \end{aligned}$$



Nun vereinfachen wir weiter für  $h = a$ , dann kommt die halbe Oberfläche heraus:

$$M(0, a) = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \left( \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} - a^2} \right. \\ \left. + \frac{a^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \cdot \arcsin \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \right)$$

Wir führen eine Zwischenrechnung durch:

$$\sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} - a^2} = \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - a^2} = \sqrt{\frac{a^4 - a^4 + b^2 a^2}{a^2 - b^2}} = \frac{ba}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Mit dieser Zwischenrechnung bekommen wir:

$$M(0, a) = 2\pi \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \left( \frac{ba^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{a^4}{2 \cdot (a^2 - b^2)} \cdot \arcsin \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \right)$$

Schließlich erhalten wir:

$$M(0, a) = 2\pi \cdot \left( \frac{b^2}{2} + \frac{ba^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arcsin \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \right)$$

Diese Formel ist gültig für  $a > b > 0$ . Die gesamte Oberfläche  $O$  bekommen wir mit:

$$O = 2 \cdot M(0, a) = M(-a, a) \\ = 4\pi \cdot \left( \frac{b^2}{2} + \frac{ba^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arcsin \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \right)$$

Nun untersuchen wir den Spezialfall  $r = a = b$  (Kugel). Dieser Fall kann mit der vorletzten Formel nicht ausgerechnet werden. Wir müssen von Gleichung (3) ausgehen. Wir setzen dort ein:

$$M(0, r) = 2\pi \cdot \int_0^r r \, dx = 2\pi [rx]_0^r = 2\pi r^2$$

$M(0, r)$  ist die Oberfläche der Halbkugel.

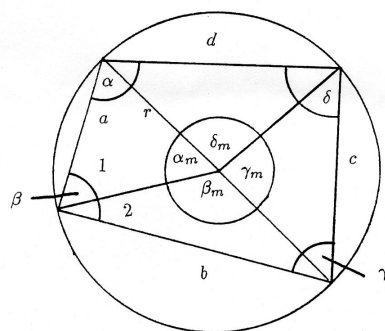
## Literatur

- [1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage
- [2] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5.Auflage 1975 Springer Verlag Wien

## 21. Die 4.Seite und der Flächeninhalt des Sehnenvierecks

**Abstract:** Wir werden hier zwei unbekannte Flächenformeln herleiten. Außerdem wird die 4.Seite bei 3 gegebenen Seiten berechnet, unter der Voraussetzung, dass der Kreismittelpunkt im Sehnenviereck ist.

**Key words:** Sehnenviereck - Diagonale - Seite - Flächeninhalt - Umkreisradius - Winkel



Wir addieren die Flächeninhalte der 4 gleichschenkligen Dreiecke mit den Basen  $a, b, c, d$ , wobei wir als Fläche das halbe Produkt aus Basis (Grundseite) und Höhe verwenden (vgl. Abbildung).

Für den Flächeninhalt  $F$  erhalten wir dann:

$$F = \frac{r}{2} \cdot \left( a \cdot \cos \frac{\alpha_m}{2} + b \cdot \cos \frac{\beta_m}{2} + c \cdot \cos \frac{\gamma_m}{2} + d \cdot \cos \frac{\delta_m}{2} \right)$$

Nach der Abbildung haben wir:

$$\sin \frac{\alpha_m}{2} = \frac{a}{2r} \quad \sin \frac{\beta_m}{2} = \frac{b}{2r} \quad \sin \frac{\gamma_m}{2} = \frac{c}{2r} \quad \sin \frac{\delta_m}{2} = \frac{d}{2r}$$

Mit  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  folgern wir:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha_m}{2} &= \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r} & \cos \frac{\beta_m}{2} &= \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2r} \\ \cos \frac{\gamma_m}{2} &= \frac{\sqrt{4r^2 - c^2}}{2r} & \cos \frac{\delta_m}{2} &= \frac{\sqrt{4r^2 - d^2}}{2r} \end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke in die erste Flächenformel ein, so ergibt sich:

$$F = \frac{1}{4} \cdot \left( a \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} + b \cdot \sqrt{4r^2 - b^2} + c \cdot \sqrt{4r^2 - c^2} + d \cdot \sqrt{4r^2 - d^2} \right) \quad (1)$$

Damit haben wir die Fläche als Funktion vom Radius und den vier Seiten. Wir werden jetzt sehen, wie sich eine Seite durch die anderen drei Seiten ausdrücken läßt.

Im Sehnenviereck ist die Summe der Gegenwinkel gleich  $180^\circ$ . Also haben wir  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Aufgrund der 4 gleichschenkligen Dreiecke erkennen wir:

$$\beta_1 = \alpha_2 \quad \delta_1 = \gamma_2$$

Damit können wir schließen:

$$\alpha = \alpha_1 + \beta_1 \quad \gamma = \gamma_1 + \delta_1$$

und bekommen schließlich:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 180^\circ \quad (2)$$

Mit Hilfe der 4 gleichschenkligen Dreiecke folgern wir auch:

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 180^\circ \quad (3)$$

Nach der Abbildung ist:

$$\cos \beta_1 = \frac{a}{2r} \quad \cos \gamma_1 = \frac{b}{2r} \quad \cos \delta_1 = \frac{c}{2r}$$

und mit Gleichung (2):

$$\frac{d}{2r} = \cos \alpha_1 = \cos(180^\circ - \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1)$$

Also:

$$d = 2r \cdot \cos \left( 180^\circ - \arccos \frac{a}{2r} - \arccos \frac{b}{2r} - \arccos \frac{c}{2r} \right)$$

Damit ist die Bestimmung der Seite  $d$  mit dem Radius und den Seiten  $a, b, c$  möglich. Die Fläche ist daher eine Funktion des Radius und drei Seiten.

Mit den Höhen der Dreiecke senkrecht zu den Radien ergibt sich durch die Flächenformel für Dreiecke:

$$F = \frac{r^2}{2} \cdot (\sin \alpha_m + \sin \beta_m + \sin \gamma_m + \sin \delta_m)$$

Wegen der gleichschenkligen Dreiecke haben wir  $\alpha_m = 180^\circ - 2\alpha_2$ . Aufgrund von  $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$  bekommen wir:

$$\sin \alpha_m = \sin(180^\circ - 2\alpha_2) = \sin 2\alpha_2$$

Mit dieser Einsetzung erhalten wir:

$$F = \frac{r^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha_2 + \sin 2\beta_2 + \sin 2\gamma_2 + \sin 2\delta_2) \quad (4)$$

Mit Gleichung (3) kann aus drei dieser Winkel der vierte Winkel bestimmt werden, so dass der Flächeninhalt eine Funktion vom Radius und drei dieser Winkel ist.

Bei all diesen Formeln gilt die Voraussetzung, dass der Kreismittelpunkt im Sehnenviereck ist. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann man zur Berechnung der 4. Seite eine Formel bei Bartsch [1] Kapitel 6.5 S.231 für den Umkreisradius verwenden. Zur Berechnung der 4. Seite müssen dann numerische Verfahren z.B. Newton-Verfahren verwendet werden. Eine allgemeinere Flächenformel für das Sehnenviereck findet sich in Bronstein [2] Kapitel 2.6.1 S. 193 als Funktion von den 4 Seiten.

Weitere trigonometrische Probleme, die in der Fachliteratur kaum vorkommen, befinden sich bei Schröer [3].

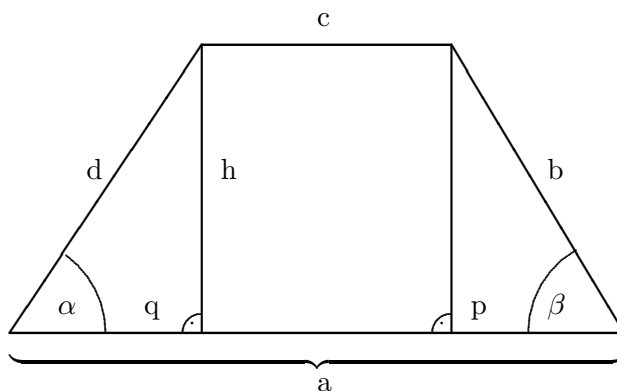
**Literatur**

- [1] Hans-Jochen Bartsch „Taschenbuch mathematischer Formeln“  
7.-9.Auflage 1986 VEB Fachbuchverlag Leipzig
- [2] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage
- [3] Harald Schröder „Problemfälle aus der Trigonometrie gut gelöst“ Wissenschaft & Technik Verlag Berlin 2001

© 2009 **Harald Schröder**

## 22. Der 4 Seiten-Fall beim Trapez

In einem Trapez sollen die Seiten  $a, b, c$  und  $d$  bekannt sein.



$\alpha$  und  $\beta$  sind spitze Winkel. Dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$a - c = p + q \qquad q^2 + h^2 = d^2 \qquad p^2 + h^2 = b^2$$

Wir setzen  $h^2$  gleich:

$$d^2 - q^2 = b^2 - p^2$$

Oder:

$$b^2 - d^2 = p^2 - q^2$$

Division durch  $a - c = p + q$ :

$$\frac{b^2 - d^2}{a - c} = \frac{p^2 - q^2}{p + q} = p - q$$

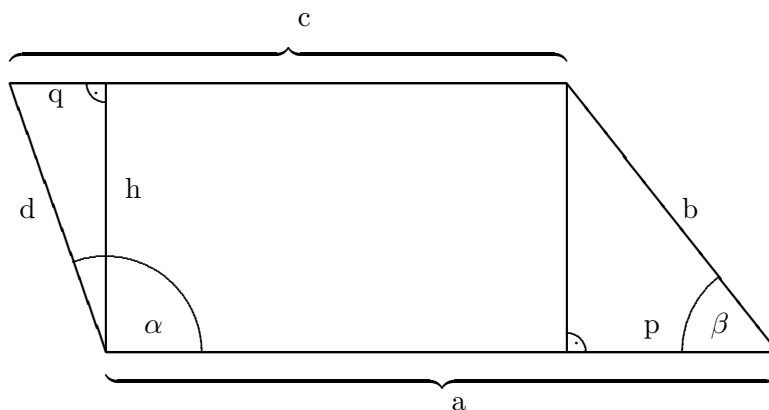
Zu dieser Gleichung addieren wir  $p + q = a - c$  hinzu. Dann fällt  $q$  raus und wir erhalten:

$$2p = a - c + \frac{b^2 - d^2}{a - c}$$

Oder:

$$p = \frac{(a - c)^2 + b^2 - d^2}{2 \cdot (a - c)}$$

Schließlich berechnen wir  $q = a - c - p$ . Nun betrachten wir den Fall, daß  $\alpha$  ein stumpfer aber  $\beta$  ein spitzer Winkel ist.



## E.Geometrie

Hier entnehmen wir folgende Gleichungen:

$$p = a - (c - q) \quad h^2 = d^2 - q^2 \quad h^2 = b^2 - p^2$$

Gleichsetzung:

$$d^2 - q^2 = b^2 - p^2$$

Also:

$$p^2 - q^2 = b^2 - d^2$$

Division durch  $p - q = a - c$ :

$$\frac{b^2 - d^2}{a - c} = \frac{p^2 - q^2}{p - q} = p + q$$

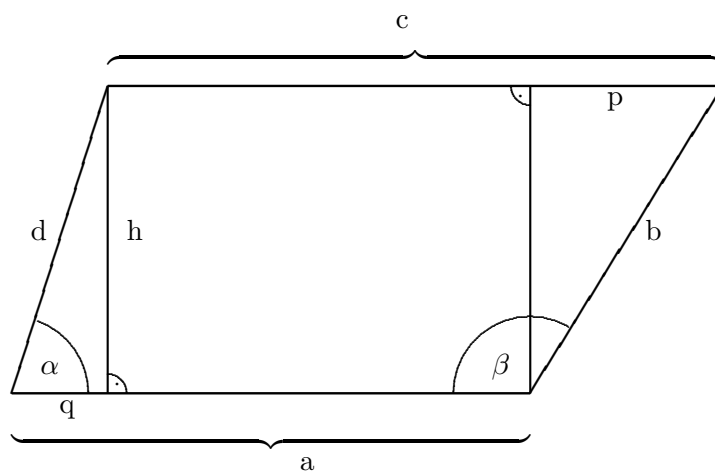
Dazu addieren wir die Gleichung  $p - q = a - c$  und bekommen:

$$2p = a - c + \frac{b^2 - d^2}{a - c}$$

Oder:

$$p = \frac{(a - c)^2 + b^2 - d^2}{2 \cdot (a - c)}$$

Mit  $q = p - a + c$  ist dann die Berechnung abgeschlossen. Nun beschäftigen wir uns mit dem Fall, daß  $\beta$  ein stumpfer Winkel und  $\alpha$  ein spitzer Winkel ist.



Wir erkennen die 3 Gleichungen:

$$p = c - (a - q) \quad h^2 = b^2 - p^2 \quad h^2 = d^2 - q^2$$

Zusammengebracht:

$$b^2 - p^2 = d^2 - q^2$$

Oder:

$$b^2 - d^2 = p^2 - q^2$$

## E.Geometrie

Dividiert durch  $p - q = c - a$ :

$$\frac{b^2 - d^2}{c - a} = \frac{p^2 - q^2}{p - q} = p + q$$

Wenn wir zu dieser Gleichung  $p - q = c - a$  addieren, führt das zu:

$$2p = c - a + \frac{b^2 - d^2}{c - a}$$

Oder:

$$p = \frac{(c - a)^2 + b^2 - d^2}{2 \cdot (c - a)}$$

Schließlich folgt  $q$  aus  $q = p - c + a$ .

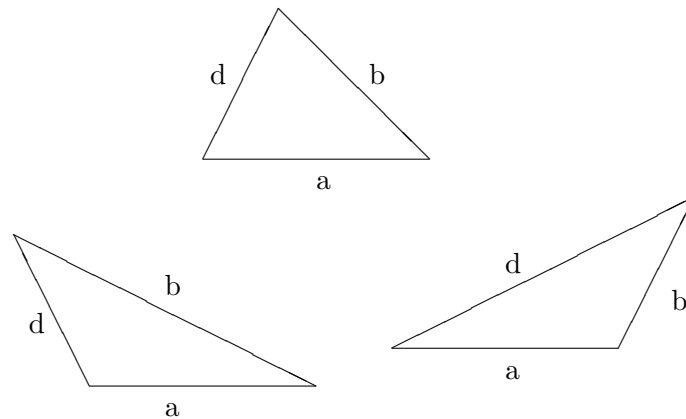
In allen drei Fällen bekommen wir die Höhe mit  $h^2 = b^2 - p^2 = d^2 - q^2$ .

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division rationaler Zahlen ergeben rationale Zahlen. Insgesamt folgt aus den Rechnungen der folgende Satz:

Sind bei einem Trapez alle vier Seiten rationale Zahlen, dann sind es auch  $p$  und  $q$ .

$h$  hingegen muß nicht rational sein.

Im Fall  $c = 0$  folgt dieselbe Aussage für ein allgemeines Dreieck als Spezialfall. Die Umformungen für  $p, q$  und  $h$  sind ebenso für die folgenden allgemeinen Dreiecke gültig:



## 23. Geodätische Linien auf verschiedenen Oberflächen und die maximale Entfernung auf einer Kugeloberfläche

### 1. Geodätische Linien

Wir behandeln hier ein Problem aus der Differentialgeometrie. Man bezeichnet eine Linie, die zwei verschiedene Punkte auf einer Oberfläche mit minimaler Umfangslänge verbindet, als geodätische Linie oder Geodäte. Es wird nun angedeutet, wie man auf einer gegebenen Oberfläche im  $R^3$  zu geodätischen Linien kommen kann.

Die allgemeine Gleichung für geodätische Linien wird in Laugwitz [6] Kapitel II Aufgabe 4.13 S.41 angegeben:

$$\ddot{u}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = \lambda \cdot \dot{u}^i \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{d^2t}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Die Christoffel-Symbole zweiter Art  $\Gamma_{jk}^i$  werden erklärt durch die Gleichung (4.9) in a.a.O.:

$$\Gamma_{ik}^r = \sum_{l=1}^2 \frac{g^{lr}}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} \right)$$

Die Größe  $g^{il}$  wird gebildet mit Gleichung (4.6) in a.a.O.:

$$\sum_{l=1}^2 g^{il} g_{lk} = \delta_k^i \quad g^{il} = g^{li} \quad \delta_k^i = \begin{cases} 1 & : i = k \\ 0 & : i \neq k \end{cases}$$

Die metrische Fundamentalgröße  $g_{ik}$  wird definiert in a.a.O. Gleichung (3.16) durch:

$$g_{ik} = x_i x_k$$

Mit  $x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$  nach Gleichung (3.2) in a.a.O.,  $x$  ist das Flächenstück nach a.a.O. Gleichung (3.1). In dieser Form können in Prinzip die geodätischen Linien auf einer gegebenen Oberfläche berechnet werden. Ein interessantes Teilresultat ist das Clairautsche Theorem auf einer Rotationsfläche vgl. Arnol'd [1] Kapitel 4.3.4.3 S.94 und Abbildung 66 oder Strubecker [8] Gleichung (38.6). Bei Köhnlein [5] werden Dreiecke aus Geodäten auf Rotationsflächen behandelt.

Zu geodätischen Linien auf Rotationsparaboloiden wird in Strubecker [8] Kapitel III 38, Beispiel 5 S.227–232 eingegangen.

Zu Geodäten auf Rotationsellipsoiden findet man in Strubecker [8] Kapitel III 38, Beispiel 6 S.232,233 ein elliptisches Integral, das numerisch bestimmt werden muß evt. mit Hilfe von Hofreiter [4] Nr.244 1)-3) S.81,82.

Das Problem der Bestimmung von Geodäten auf Rotationsellipsoiden spielt eine große Rolle in der Geodäsie, weil die Erde selbst als Rotationsellipsoid beschrieben werden kann. In der Geodäsie gibt es die „zweite geodätische Grundaufgabe“: Bestimmung der Entfernung von zwei Punkten, die bekannte geographische Länge und geographische

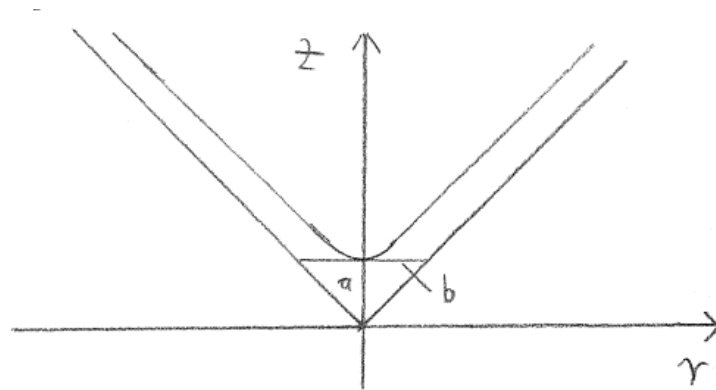


Breite haben. In Schödlbauer [7] werden verschiedene Verfahren zur Entfernungsberechnung für kurze, mittlere und lange Distanzen dargestellt. Dort werden auch ellipsoide Dreiecke ausgerechnet. Das wird auch in Heck [3] Kapitel 6.6 S.212-214 gemacht für Dreiecke deren Seiten kleiner als  $\frac{1}{10}$  des Erdradius ist. Ähnliche Formeln findet man teilweise auch bei Großmann [2] §38.2 S.87.

Beim Rotationshyperboloiden haben wir die Gleichung:

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$$

vgl. Abbildung:



Eine Umformung ergibt:

$$z^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)$$

Das führt zu:

$$z(r) = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + r^2}$$

Weiter erhalten wir:

$$\frac{\partial z(r)}{\partial r} = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

Setzen wir das in die Gleichung (38.8) bei Strubecker [8] S. 223 ein, so bekommen wir die Polargleichung der Geodäten auf einen Rotationshyperboloiden:

$$(\varphi - \varphi_0) = k \cdot \int \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{a^2 r^2}{b^2(b^2 + r^2)}}{r^2 - k^2}} dr$$

## 2. Die maximale Entfernung auf einer Kugeloberfläche

Wir wollen hier sehen, wie man den Ort mit der maximalen Entfernung zu bekannten Städten wie z.B. Boston, New York, Washington, Paris, London, Berlin, Hamburg, Kopenhagen, Stockholm, Helsinki berechnen kann.

## E.Geometrie

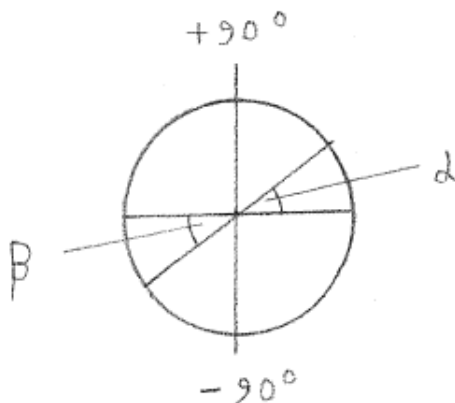
Die folgenden Größen sind gegeben:

$R$  = Radius der (Erd-) Kugel

$\alpha$  = Breitengrad des Ausgangsortes  $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$

$\varphi$  = Längengrad des Ausgangsortes  $\varphi \in [-180^\circ, 180^\circ]$

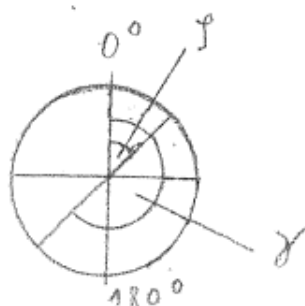
Längengrad und Breitengrad werden in Grad angegeben. Der Längengrad wird westlich vom Nulllängengrad positiv und östlich davon negativ gezählt. In Atlanten werden häufig beim östlichen Bereich die negativen Vorzeichen weggelassen.



Gesucht sind jetzt Breiten- und Längengrad mit maximaler Entfernung zum Ausgangsort.

$\beta, \gamma$  = Breitengrad, Längengrad des Ortes, der zum Ausgangsort die maximale Entfernung hat.

Für  $\beta$  erhalten wir  $\beta = -\alpha$  nach der ersten Zeichnung.



$\gamma$  bekommen wir auf folgende Weise aus der zweiten Zeichnung:

$$\gamma^\circ = \begin{cases} \varphi^\circ - 180^\circ & \text{falls } \varphi^\circ \geq 0 \\ 180^\circ + \varphi^\circ & \text{falls } \varphi^\circ \leq 0 \end{cases}$$

Maximale Entfernung =  $\pi \cdot R$

$(\gamma, \beta)$  bestimmen den Ort mit der maximalen Entfernung von  $(\varphi, \alpha)$ .

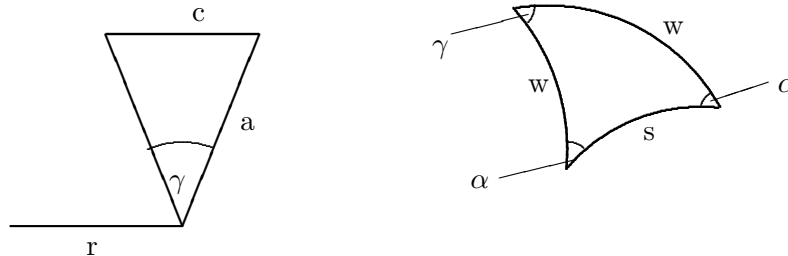
## **Literatur**

- [1] Vladimir Arnol'd „Mathematische Methoden der klassischen Mechanik“ Birkhäuser Verlag Basel 1988
- [2] Walter Großmann „Geodätische Rechnungen und Abbildungen“ Verlag Konrad Wittwer Stuttgart 1964
- [3] Bernhard Heck „Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung: klassische und moderne Methoden“ Karlsruhe Wichmann Verlag 1987
- [4] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5.Auflage 1975 Springer Verlag Wien
- [5] Walter Köhnlein „Untersuchungen über große geodätische Dreiecke auf geschlossenen Rotationsflächen unter besonderer Berücksichtigung des Rotationsellipsoiden“ Dissertation, Bayerische Akademie der Wissenschaften 1962 München
- [6] Detlef Laugwitz „Differentialgeometrie“ 3.Auflage 1977 Teubner Verlag Stuttgart
- [7] Albert Schödlbauer „Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung“ Wichmann-Skripten Heft 2 Teil 1 Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe 1981
- [8] Karl Strubecker „Differentialgeometrie“ Band 2 de Gruyter Verlag Berlin

© 2002 **Harald Schröer**

## 24. Der Raumwinkel durch ein gleichschenkliges Dreieck

Wir wollen hier den Raumwinkel  $\Omega$  durch ein gleichschenkliges Dreieck bestimmen. Die Methode ist ähnlich zu der in Schröer [1] (Kapitel 5 und 6). Wir betrachten die folgenden Dreiecke:



Mit der Entfernung  $r$  und den Seitenlängen  $a, c$  ergibt sich folgende Gleichung:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2a} \quad (1)$$

Wir berechnen die Seite  $w$  des Kugeldreiecks auf der Einheitskugel:

$$\tan w = \frac{a}{r}$$

Die 3.Seite im Kugeldreieck kann mit dem Seitenkosinussatz dargestellt werden:

$$\cos s = \cos^2 w + \sin^2 w \cdot \cos \gamma$$

Zur Bestimmung der übrigen beiden Winkel im Kugeldreieck dient der sphärische Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin w} = \frac{\sin \gamma}{\sin s}$$

Wir kommen nun zum sphärischen Exzeß  $\varepsilon$  in Bogenmaß und zum Raumwinkel:

$$\Omega = \varepsilon = \gamma + 2\alpha - \pi$$

Der maximale Raumwinkel wird bei  $r \rightarrow 0$  erreicht:

$$\Omega \rightarrow \frac{\gamma}{2\pi} \cdot 2\pi = \gamma = 2 \cdot \arcsin \left( \frac{c}{2a} \right)$$

Für  $a, c \ll r$  gilt mit Gleichung (1):

$$\Omega \approx \frac{ca}{2r^2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{ca}{2r^2} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{c}{2a} \right)^2}$$

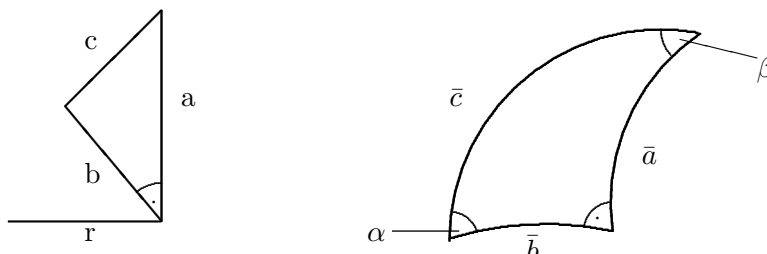
$\Phi = I \cdot \Omega$  mit  $I$  als Lichtstärke (Stahlstärke) ergibt den Lichtstrom (Strahlungsfluß oder Strahlungsleistung) durch das Dreieck im Vakuum.

### Literatur

- [1] Harald Schröer „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001

## 25. Der Raumwinkel durch ein rechtwinkliges Dreieck

Wir werden hier den Raumwinkel  $\Omega$  durch ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen. Die Methode ist ähnlich zu der in Schröer [1] (Kapitel 5 und 6). Wir betrachten die folgenden Dreiecke:



$a, b, c$  = Seiten des ebenen rechtwinkligen Dreiecks,  
 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  = Seiten des rechtwinkligen Kugeldreiecks auf der Einheitskugel,  
 $r$  ist die Entfernung.

In den beiden Dreiecken erkennen wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tan \bar{a} &= \frac{a}{r} & \tan \bar{b} &= \frac{b}{r} \\ \tan \alpha &= \frac{\tan \bar{a}}{\sin \bar{b}} & \tan \beta &= \frac{\tan \bar{b}}{\sin \bar{a}} \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen befinden sich in [2](S.189, Satz 5). Nun berechnen wir den sphärischen Exzeß  $\varepsilon$  und den Raumwinkel:

$$\Omega = \varepsilon = \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} - \pi = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$$

Der maximale Raumwinkel wird bei  $r \rightarrow 0$  erreicht:

$$\Omega \rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Für  $a, b \ll r$  gilt:

$$\Omega \approx \frac{a \cdot b}{2 \cdot r^2}$$

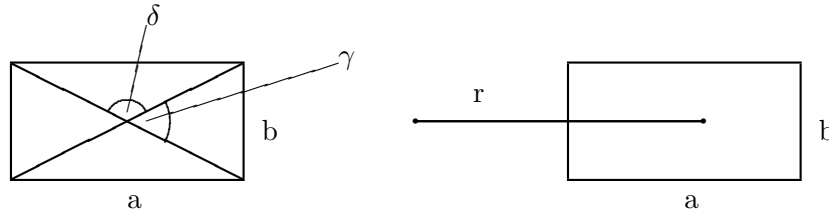
$\Phi = I \cdot \Omega$  mit  $I$  als Lichtstärke (Stahlstärke) ergibt den Lichtstrom (Strahlungsfluß oder Strahlungsleistung) durch das Dreieck im Vakuum.

### Literatur

- [1] Harald Schröer „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001
- [2] „dtv-Atlas zur Mathematik“, Band 1, 3. Auflage, Deutscher Taschenbuch Verlag München 1978

## 26. Der Raumwinkel durch ein senkrechtes Rechteck

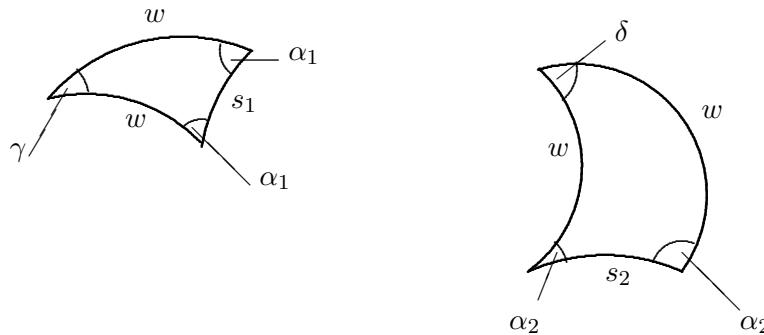
Wir wollen hier den Raumwinkel  $\Omega$  durch ein senkrechtes Rechteck bestimmen. Die Methode ist ähnlich zu der in Schröer [1] (Kapitel 5 und 6). Wir betrachten das folgende Rechteck:



Mit der Entfernung  $r$  und den Seitenlängen  $a, b$  ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{a} \qquad \tan \frac{\delta}{2} = \frac{a}{b}$$

Wir schauen uns die folgenden Kugeldreiecke auf der Einheitskugel an:



Wir bekommen einen Seitenwinkel  $w$  der 4 Kugeldreiecke mit:

$$\tan w = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2r}$$

Mit den Seitenkosinussatz berechnen wir die anderen Seitenwinkel:

$$\cos s_1 = \cos^2 w + \sin^2 w \cdot \cos \gamma$$

$$\cos s_2 = \cos^2 w + \sin^2 w \cdot \cos \delta$$

Zur Berechnung der übrigen Winkel in den 4 Kugeldreiecken dient der sphärische Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin w} = \frac{\sin \gamma}{\sin s_1}$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin w} = \frac{\sin \delta}{\sin s_2}$$

## *E.Geometrie*

Ist  $\varepsilon$  der sphärische Exzeß in Bogenmaß, dann gilt:

$$\varepsilon_1 = \gamma + 2\alpha_1 - \pi \qquad \varepsilon_2 = \delta + 2\alpha_2 - \pi$$

Den Raumwinkel erhalten wir dann mit:

$$\Omega = 2 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Der maximale Raumwinkel kann gleich  $2\pi$  sein, wenn die Entfernung  $r$  gegen Null geht.

Für  $a, b \ll r$  gilt:

$$\Omega \approx \frac{a \cdot b}{r^2}$$

$\Phi = I \cdot \Omega$  mit  $I$  als Lichtstärke (Stahlstärke) ergibt den Lichtstrom (Strahlungsfluß oder Strahlungsleistung) durch das Rechteck im Vakuum.

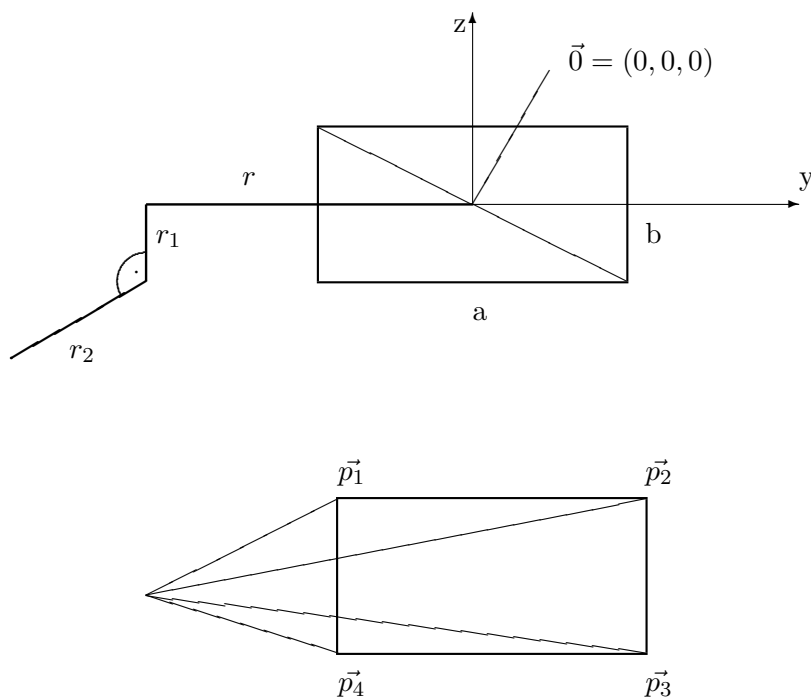
### **Literatur**

- [1] Harald Schröder „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001

© 2006 **Harald Schröder**

## 27. Der Raumwinkel durch ein geneigtes Rechteck

Wir werden hier den Raumwinkel durch ein geneigtes Rechteck berechnen, die Methode ist ähnlich zu der in Schröer [1] (Kapitel 5). Das Rechteck soll im Koordinatenursprung sein.



Wir führen den Entfernungsvektor  $\vec{l} = (r, r_2, r_1)$  ein. Wir bilden die Differenzvektoren:

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} - \vec{l} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} - \vec{l}$$

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \\ \frac{-b}{2} \end{pmatrix} - \vec{l} \quad \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-a}{2} \\ \frac{-b}{2} \end{pmatrix} - \vec{l}$$

Nun bestimmen wir die Seitenwinkel der beiden Kugeldreiecke auf der Einheitskugel:

$$\cos \alpha_{12} := \cos \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}$$

$$\cos \alpha_{23} := \cos \angle(\vec{p}_2, \vec{p}_3) = \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3}{|\vec{p}_2| \cdot |\vec{p}_3|}$$

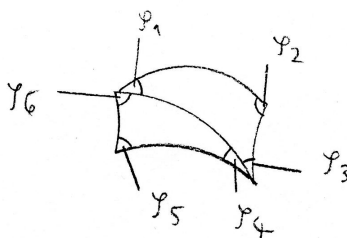
$$\cos \alpha_{13} := \cos \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_3|}$$

$$\cos \alpha_{34} := \cos \angle(\vec{p}_3, \vec{p}_4) = \frac{\vec{p}_3 \cdot \vec{p}_4}{|\vec{p}_3| \cdot |\vec{p}_4|}$$



$$\cos \alpha_{14} := \cos \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_4) = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_4|}$$

Wir betrachten die folgende Abbildung:



Wir verwenden den Seitenkosinussatz, um zwei Winkel zu erhalten:

$$\cos \alpha_{13} = \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{23} + \sin \alpha_{12} \sin \alpha_{23} \cos \varphi_2$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_2 = \frac{\cos \alpha_{13} - \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{23}}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{23}}$$

$$\cos \alpha_{13} = \cos \alpha_{34} \cos \alpha_{14} + \sin \alpha_{34} \sin \alpha_{14} \cos \varphi_5$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_5 = \frac{\cos \alpha_{13} - \cos \alpha_{34} \cos \alpha_{14}}{\sin \alpha_{34} \sin \alpha_{14}}$$

Nun benutzen wir den sphärischen Sinussatz im ersten Dreieck:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \alpha_{23}} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \alpha_{13}} = \frac{\sin \varphi_3}{\sin \alpha_{12}}$$

Im zweiten Dreieck:

$$\frac{\sin \varphi_4}{\sin \alpha_{14}} = \frac{\sin \varphi_5}{\sin \alpha_{13}} = \frac{\sin \varphi_6}{\sin \alpha_{34}}$$

Schließlich bekommen wir den sphärischen Exzeß in Bogenmaß:

$$\varepsilon_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi \quad \varepsilon_2 = \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 - \pi$$

Für den Raumwinkel gilt  $\Omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

Wenn  $a, b \ll r$ , dann haben wir die Näherung:

$$\Omega \approx \frac{ab \cdot \cos \alpha}{r^2 + r_1^2 + r_2^2} \quad \text{mit} \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r}$$

$\Phi = I \cdot \Omega$  mit  $I$  als Lichtstärke (Stahlstärke) ergibt den Lichtstrom (Strahlungsfluß oder Strahlungsleistung) durch das geneigte Rechteck im Vakuum.

## Literatur

- [1] Harald Schröer „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001

# Kapitel F.

## Stochastik

### Inhalt

28. Lineare und nichtlineare Regression mit Meßreihen . . . . .	91
29. Das Buffonsche Nadelproblem . . . . .	102

## 28. Lineare und Nichtlineare Regression mit Meßreihen

### Erste Methode

Wir betrachten folgende Meßreihe:

$$\begin{array}{ll} x_{11} & y_{21} \\ x_{12} & y_{22} \\ x_{13} & y_{23} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1i} & y_{2i} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & y_{2n} \end{array}$$

Zu jedem  $x_{1i} \in R$  wird ein  $y_{2i} \in R$  gemessen.  $i \in \{1, \dots, n\}$

Es wird vorausgesetzt, daß es eine Näherung  $y = f(x)$  gibt so, daß  $y_{2i} \approx f(x_{1i})$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Es geht nun darum diese Näherung für diese Meßreihe genauer zu machen, oder  $f(x)$  an die Meßreihe **anzupassen**.

Wir definieren:  $y_{1i} := f(x_{1i}) \quad i \in \{1, \dots, n\}$

Nun schauen wir uns die Werte  $y_{11}, \dots, y_{1n}$  und  $y_{21}, \dots, y_{2n}$  an. Wir werden durch lineare Regression eine Funktion  $g(y) = my + b$  ermitteln so, daß  $g(y_{1i}) \approx y_{2i}$   $i \in \{1, \dots, n\}$  und

$$\sum_{i=1}^n (g(y_{1i}) - y_{2i})^2$$

ein Minimum sein soll.

Wir schauen uns zunächst folgende Meßreihe an:

$$x_1, \dots, x_n \quad \text{und} \quad y_1, \dots, y_n$$

Dann gelten die bekannten Formeln der linearen Regression z.B. nach Bronstein [1] Kapitel 5.2.4.1 S.692.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i & \bar{y} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \\ s_x^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 & s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

## F. Stochastik

$$m_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$
$$r = \frac{m_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$
$$m = b_{Y|X} = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = \frac{m_{xy}}{s_x^2}$$
$$b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$$

mit

$\bar{x}, \bar{y}$  = Mittelwerte

$s_x^2, s_y^2$  = Stichprobenvarianzen

$m_{xy}$  = empirische Kovarianz

$r$  = empirischer Korrelationskoeffizient

$m$  = Steigung der Ausgleichsgerade

$b$  = Abschnitt der Ausgleichsgerade

Die Ausgleichs- oder Regressionsgerade hat dann die Gestalt:

$$y = mx + b$$

Diese Hilfsmittel können auf die Reihen  $y_{11}, \dots, y_{1n}$  und  $y_{21}, \dots, y_{2n}$  angewendet werden, indem sie als Wertepaare betrachtet werden.

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_{1i} \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_{2i}$$
$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 \quad S_2^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{2i} - \bar{y}_2)^2$$
$$m_{12} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1) \cdot (y_{2i} - \bar{y}_2)$$
$$m = \frac{m_{12}}{S_1^2} \quad b = \bar{y}_2 - m\bar{y}_1$$
$$r = \frac{m_{12}}{S_1 \cdot S_2} \quad (\text{Korrelation})$$

$g(y) = my + b$  lautet dann die gesuchte Funktion.

Korrigierte Funktion:

$$y = m \cdot f(x) + b$$

Damit ist  $f(x)$  an die Meßreihe angepaßt.

$r$  ist die Korrelation von  $g$ .

Diese Methode wird in Bronstein [1] Kapitel 7.1.5.1.2 S.788 unter „Linearisierung“ kurz erwähnt. Wir werden später noch eine 2.Methode der Linearisierung kennenlernen.

**Anwendung auf Vektoren:**

Diese Methode kann für Vektoren verallgemeinert werden. Es werden folgende  $2n$  Vektoren gemessen:

$$\begin{array}{cc} x_{11} & y_{21} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1i} & y_{2i} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & y_{2n} \end{array}$$

mit

$$x_{1i} =: \begin{pmatrix} x_{1i1} \\ \vdots \\ x_{1im} \end{pmatrix} \in R^m \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$y_{2i} =: \begin{pmatrix} y_{2i1} \\ \vdots \\ y_{2im} \end{pmatrix} \in R^m \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Es wird vorausgesetzt, daß es eine Näherung

$$f : U \longrightarrow V \quad U, V \subset R^m \quad f =: \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

mit  $y_{2i} \approx f(x_{1i})$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt.

Nun wird folgende Größe erklärt:

$$f(x_{1i}) =: y_{1i} =: \begin{pmatrix} y_{1i1} \\ \vdots \\ y_{1im} \end{pmatrix} \in R^m$$

für  $i \in \{1, \dots, n\}$

Es ist nun möglich die lineare Regression **komponentenweise** durchzuführen.

$y_{1ij}$  und  $y_{2ij}$  werden gegenübergestellt.  $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{array}{cc} y_{11j} & y_{21j} \\ \vdots & \vdots \\ y_{1nj} & y_{2nj} \end{array}$$

## F. Stochastik

$$\text{Sei } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in V \subset \mathbb{R}^m.$$

Es wird nach  $m$  Funktionen  $g_j$  gesucht.

$$g_j(y_j) = m_j y_j + b_j$$

und  $g_j(y_{1ij}) \approx y_{2ij}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Es müssen also hier  $m$  lineare Funktionen  $g_j$  bestimmt werden.

Anwendung der linearen Regression:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{1j} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_{1ij} & \bar{y}_{2j} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_{2ij} \\ S_{1j}^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{1ij} - \bar{y}_{1j})^2 & S_{2j}^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{2ij} - \bar{y}_{2j})^2 \\ m_{12j} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_{1ij} - \bar{y}_{1j}) \cdot (y_{2ij} - \bar{y}_{2j}) \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$g_j(y_j) = m_j y_j + b_j \quad j \in \{1, \dots, m\}$$

mit

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{m_{12j}}{S_{1j}^2} & b_j &= \bar{y}_{2j} - m_j \cdot \bar{y}_{1j} \\ r_j &= \frac{m_{12j}}{S_{1j} \cdot S_{2j}} & & \text{(Korrelation von } g_j) \end{aligned}$$

Anpassung an die Meßreihe:

$$G(y) := \begin{pmatrix} g_1(y_1) \\ \vdots \\ g_m(y_m) \end{pmatrix}$$

korrigierte Funktion:

$$\begin{aligned} y &= G(f(x)) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(x)) \\ \vdots \\ g_m(f_m(x)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 f_1(x) + b_1 \\ \vdots \\ m_m f_m(x) + b_m \end{pmatrix} \\ \text{mit } f &=: \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## F. Stochastik

Mit  $r_j$  gibt es zusätzlich noch eine Aussage über die Qualität von  $g_j$ .

Es ist nicht klar, ob  $r = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_j$  eine Gesamtkorrelation von  $G$  ist.

Ist die korrigierte Funktion nicht genau genug, kann die korrigierte Funktion als  $f$  angewendet werden. Dann ergibt sich eine weitere Korrektur um  $G_2$  also:

$$y = G_2(G_1(f(x)))$$

Dann kann diese Funktion wieder eingesetzt werden bis mit

$$y = G_r(G_{r-1}(\dots G_1(f(x)) \dots))$$

evt. die gewünschte Genauigkeit erzielt worden ist.

### Ein Beweis, daß dieses Verfahren funktioniert:

$\|\cdot\|$  = euklidische Norm

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|y_{2i} - y_{1i}\|^2 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{2ij} - y_{1ij})^2 \\ \bar{y}_{1i} &:= \begin{pmatrix} \bar{y}_{1i1} \\ \vdots \\ \bar{y}_{1im} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} m_1 y_{1i1} + b_1 \\ \vdots \\ m_m y_{1im} + b_m \end{pmatrix} \\ \sum_{i=1}^n \|y_{2i} - \bar{y}_{1i}\|^2 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{2ij} - \bar{y}_{1ij})^2 \end{aligned}$$

aufgrund des Verfahrens der kleinsten Quadrate ist vgl. z.B. Bronstein [1] Kapitel 7.1.5.1 S.787,788 :

$$\sum_{i=1}^n (y_{2ij} - \bar{y}_{1ij})^2 < \sum_{i=1}^n (y_{2ij} - y_{1ij})^2 \quad (1)$$

sofern

$$\begin{pmatrix} y_{11j} \\ \vdots \\ y_{1nj} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_{21j} \\ \vdots \\ y_{2nj} \end{pmatrix}$$

Im Gleichheitsfall steht bei (1) das Gleichheitszeichen.

daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{2ij} - \bar{y}_{1ij})^2 < \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{2ij} - y_{1ij})^2$$

sofern

$$\begin{pmatrix} y_{11j} \\ \vdots \\ y_{1nj} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_{21j} \\ \vdots \\ y_{2nj} \end{pmatrix} \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, m\}$$

Im Fall

$$\begin{pmatrix} y_{11j} \\ \vdots \\ y_{1nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{21j} \\ \vdots \\ y_{2nj} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\}$$

ist keine Anpassung nötig. q.e.d.

## Zweite Methode

Wir betrachten noch mal die Meßreihe:

$$\begin{array}{ll} x_{11} & y_{21} \\ x_{12} & y_{22} \\ x_{13} & y_{23} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1i} & y_{2i} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & y_{2n} \end{array}$$

Zu jedem  $x_{1i} \in R$  wird ein  $y_{2i} \in R$  gemessen.  $i \in \{1, \dots, n\}$

Wir setzen wieder voraus, daß es eine Näherung  $y = f(x)$  gibt so, daß  $y_{2i} \approx f(x_{1i})$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$

Nun soll auf einen anderen Weg die Funktion  $f(x)$  genauer an die Meßreihe **angepaßt** werden.

Definiert wird:  $y_{1i} := f(x_{1i}) \quad x_{2i} := f^{-1}(y_{2i})$

$i \in \{1, \dots, n\}$

$f$  soll eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzen.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Werte  $x_{11}, \dots, x_{1n}$  und  $x_{21}, \dots, x_{2n}$  zu betrachten, und durch lineare Regression eine lineare Funktion  $g(x) = mx + b$  zu bestimmen so, daß  $g(x_{1i}) \approx x_{2i} \quad i \in \{1, \dots, n\}$  und

$$\sum_{i=1}^n (g(x_{1i}) - x_{2i})^2$$

ein Minimum wird. Diese Methode wird auch als Linearisierung bezeichnet.

Es werden wieder die bekannten Formeln aus der linearen Regression verwendet.



Dann ist:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i} & \bar{x}_2 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ S_1^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 & S_2^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \\ m_{12} &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1) \cdot (x_{2i} - \bar{x}_2) \\ m &= \frac{m_{12}}{S_1^2} & b &= \bar{x}_2 - m \cdot \bar{x}_1 \\ r &= \frac{m_{12}}{S_1 \cdot S_2}\end{aligned}$$

Als gesuchte Funktion ergibt sich dann:

$$g(x) = mx + b$$

Die Funktion  $f(x)$  ist der Meßreihe angepaßt, wenn in  $f(x)$  statt  $x$   $g(x)$  eingesetzt wird. Die so korrigierte Funktion lautet dann:

$$y = f(mx + b)$$

Mit  $r$  erhält man zusätzlich noch eine Aussage über die Qualität von

$$g(x) = mx + b.$$

Damit ist nun auch die 2.Methode der Linearisierung vorgestellt.

### Anwendung auf Vektoren:

Nun kann diese Methode auch auf Vektoren angewendet werden. Es werden folgende  $2n$  Vektoren gemessen:

$$\begin{array}{cc} x_{11} & y_{21} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1i} & y_{2i} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & y_{2n} \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned}x_{1i} &=: \begin{pmatrix} x_{1i1} \\ \vdots \\ x_{1im} \end{pmatrix} \in R^m \quad i \in \{1, \dots, n\} \\ y_{2i} &=: \begin{pmatrix} y_{2i1} \\ \vdots \\ y_{2im} \end{pmatrix} \in R^m \quad i \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

## F. Stochastik

Nun setzen wir wiederum voraus, daß es eine Näherung

$$f: U \rightarrow V \quad U, V \subset \mathbb{R}^m$$

mit  $y_{2i} \approx f(x_{1i})$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt.  $f: U \rightarrow V$  muß bijektiv sein, sonst gibt es keine Umkehrfunktion.

Nun werden folgende Größen gebildet:

$$f(x_{1i}) =: y_{1i} =: \begin{pmatrix} y_{1i1} \\ \vdots \\ y_{1im} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$f^{-1}(y_{2i}) =: x_{2i} =: \begin{pmatrix} x_{2i1} \\ \vdots \\ x_{2im} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Es ist nun möglich die lineare Regression **komponentenweise** durchzuführen.

$x_{1ij}$  und  $x_{2ij}$  können gegenübergestellt werden.  $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{array}{cc} x_{11j} & x_{21j} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1nj} & x_{2nj} \end{array}$$

Sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in U \subset \mathbb{R}^m$$

,dann werden  $m$  Funktionen  $g_j$  gesucht, mit  $g_j(x_j) = m_j x_j + b_j$  und  $g_j(x_{1ij}) \approx x_{2ij}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Es müssen also  $m$  Funktionen  $g_j$  bestimmt werden.

Anwendung der linearen Regression:

$$\bar{x}_{1j} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{1ij} \quad \bar{x}_{2j} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2ij}$$

$$S_{1j}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1ij} - \bar{x}_{1j})^2 \quad S_{2j}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{2ij} - \bar{x}_{2j})^2$$

## F. Stochastik

$$m_{12j} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1ij} - \bar{x}_{1j}) \cdot (x_{2ij} - \bar{x}_{2j})$$

Daraus erhält man:

$$g_j(x_j) = m_j x_j + b_j \quad j \in \{1, \dots, m\}$$

mit

$$m_j = \frac{m_{12j}}{S_{1j}^2} \quad b_j = \bar{x}_{2j} - m_j \cdot \bar{x}_{1j}$$

$$r_j = \frac{m_{12j}}{S_{1j} \cdot S_{2j}} \quad \text{ist die Korrelation von } g_j.$$

Anpassung an die Meßreihe:

$$G(x) := \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ \vdots \\ g_m(x_m) \end{pmatrix}$$

korrigierte Funktion:

$$\begin{aligned} y &= f(G(x)) = f(g_1(x_1), \dots, g_m(x_m)) \\ &= f(m_1 x_1 + b_1, \dots, m_m x_m + b_m) \end{aligned}$$

Mit  $r_j$  erhält man zusätzlich noch eine Aussage über die Qualität von  $g_j$ . Die Frage, ob durch  $r := \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m r_j$  eine Gesamtkorrelation von  $G$  bestimmt wird, bleibt offen.

Ist die korrigierte Funktion noch nicht genau genug, kann die korrigierte Funktion als  $f$  angewendet werden. Dann erfolgt eine weitere Korrektur um  $G_2$ . Also ergibt sich eine 2-fach korrigierte Funktion:

$$y = f(G_1(G_2(x)))$$

Dann kann diese Funktion wieder eingesetzt werden, bis mit

$$y = f(G_1(G_2(\dots(G_r(x))\dots)))$$

evt. die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

### Ein Beweis zu diesem Verfahren:

$\|\cdot\|$  = euklidische Norm

$$\sum_{i=1}^n \|x_{1i} - x_{2i}\|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{1ij} - x_{2ij})^2$$

$$\bar{x}_{2i} := \begin{pmatrix} \bar{x}_{2i1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{2im} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{x_{2i1} - b_1}{m_1} \\ \vdots \\ \frac{x_{2im} - b_m}{m_m} \end{pmatrix}$$

## F. Stochastik

$$\sum_{i=1}^n \|x_{1i} - \bar{x}_{2i}\|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{1ij} - \bar{x}_{2ij})^2$$

wegen des Verfahrens der kleinsten Quadrate ist vgl. z.B. Bronstein [1] Kapitel S.787,788  
:

$$\sum_{i=1}^n (x_{1ij} - \bar{x}_{2ij})^2 < \sum_{i=1}^n (x_{1ij} - x_{2ij})^2 \quad (2)$$

$$\text{sofern} \quad \begin{pmatrix} x_{11j} \\ \vdots \\ x_{1nj} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_{21j} \\ \vdots \\ x_{2nj} \end{pmatrix}$$

Im Gleichheitsfall steht bei (2) das Gleichheitszeichen.

Daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{1ij} - \bar{x}_{2ij})^2 < \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{1ij} - x_{2ij})^2$$

$$\text{sofern} \quad \begin{pmatrix} x_{11j} \\ \vdots \\ x_{1nj} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_{21j} \\ \vdots \\ x_{2nj} \end{pmatrix} \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, m\}$$

$$\text{Im Fall} \quad \begin{pmatrix} x_{11j} \\ \vdots \\ x_{1nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21j} \\ \vdots \\ x_{2nj} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\}$$

ist keine Anpassung notwendig.      q.e.d.

Wir haben nun 2 Methoden beschrieben, die ein näherungsweise gültiges Gesetz  $y = f(x)$  verfeinern. Diese Verfahren können verwendet werden, wenn die Form des bereits bekannten Gesetzes nur geringfügig geändert werden soll. In den Naturwissenschaften ist das durchaus von Bedeutung, weil es im bekannten Gesetz häufig Variablen gibt, die eine feste Bedeutung in der jeweiligen Naturwissenschaft haben. Das gilt evt. auch in anderen Wissenschaften. In der numerischen Mathematik werden dagegen Verfahren entwickelt, die die Form des gewünschten Gesetzes evt. total verändern.

Ein anderes Problem ist es überhaupt erstmal eine Näherung  $y = f(x)$  zu finden. Dazu können z.B. die in Bronstein [1] Kapitel 7.1.5 S.786-790 genannten Verfahren (Methode der kleinsten Quadrate, Verfahren der ausgewählten Punkte, Mittelungsverfahren) verwendet werden. Diese Verfahren können allerdings auch zur Verfeinerung von Näherungen dienen. Möglichkeiten sind z.B. die Erhöhung der Anzahl der Meßpunkte oder der Parameter.

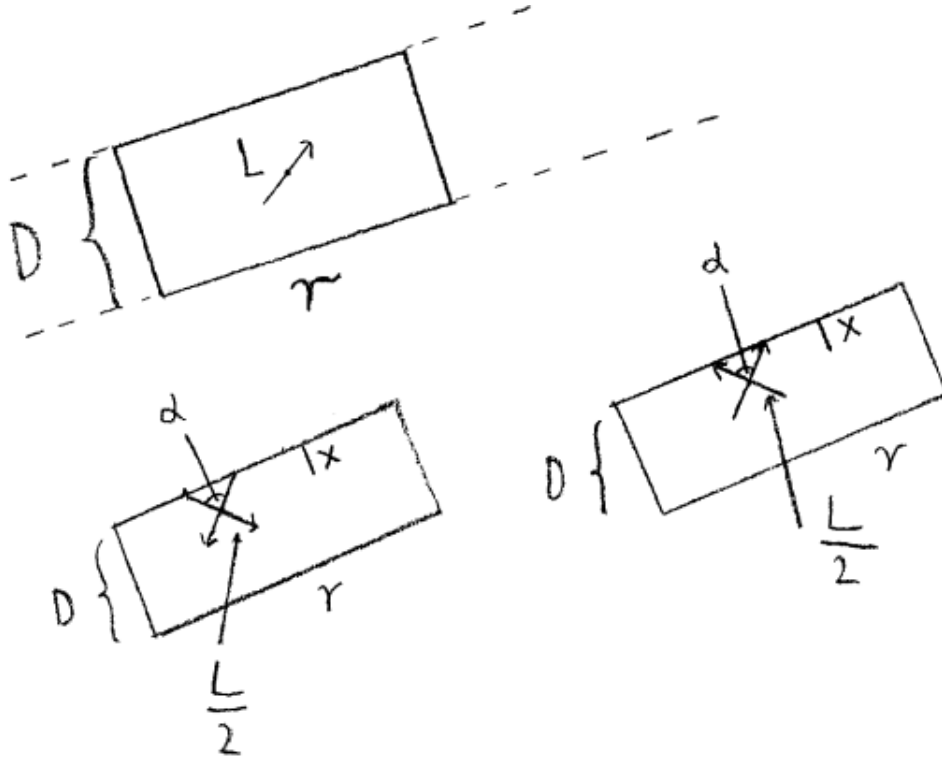
**Literatur**

- [1] Bronstein, Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ 22.Auflage 1985 Teubner Verlag Leipzig

© 2013 Harald Schröder

## 29. Das Buffonsche Nadelproblem

Wir lassen eine Nadel mit der Länge  $L$  zufällig auf einen Tisch fallen. Auf dem Tisch sollen parallele Linien im Abstand  $D$  eingezeichnet sein. Wir nehmen  $L \leq D$  an.



Wir bezeichnen dann noch:

$F = r \cdot D =$  Flächeninhalt des begrenzten Flächenstücks

$x =$  Abstand des geometrischen Mittelpunkts der Nadel von einer der Parallelen vgl. Abbildung. Aus der Abbildung entnehmen wir:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{\left(\frac{L}{2}\right)} = \frac{2x}{L}$$

Wir formen diese Gleichung um zu:

$$\alpha = 2 \cdot \arccos \left( \frac{2x}{L} \right) = \alpha(x)$$

Im Abstand  $x$  hat die Nadel eine „Drehungswahrscheinlichkeit“ von  $\frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi}$ , wenn sie eine Parallele schneidet.

Nun führen wir die Wahrscheinlichkeit  $w$  ein, daß die Nadel einer der beiden Parallelen schneidet:

$$w = \frac{2r \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2\alpha(x)}{2\pi} dx}{F} = \frac{2r \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2 \arccos\left(\frac{2x}{L}\right)}{\pi} dx}{r \cdot D}$$

schließlich:

$$w = \frac{4}{\pi D} \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \arccos\left(\frac{2x}{L}\right) dx$$

Nun ziehen wir das Integral

$$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \cdot \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

heran. Dieses kann durch Differenzieren bestätigt werden.

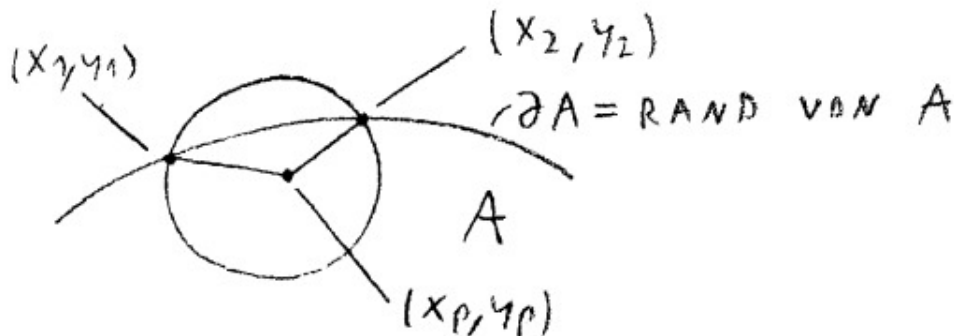
Setzen wir nun  $a = \frac{L}{2}$ , so kommen wir zu:

$$w = \frac{4}{\pi D} \cdot \left[ x \cdot \arccos\left(\frac{2x}{L}\right) - \sqrt{\frac{L^2}{4} - x^2} \right]_0^{\frac{L}{2}}$$

Nach der Auswertung an den Grenzen erhalten wir:

$$w = \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D}$$

Wir werden nun das Buffonsche Nadelproblem verallgemeinern.



Wir betrachten eine allgemeine konvexe Menge  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Das bedeutet, zu zwei Punkten aus dieser Menge gehört die ganze Verbindungsstrecke ebenfalls zu dieser Menge. Sei  $(x_p, y_p) \in A$ , so kann der Winkel  $\alpha$  durch

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} x_1 - x_p \\ y_1 - y_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_p \\ y_2 - y_p \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} x_1 - x_p \\ y_1 - y_p \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} x_2 - x_p \\ y_2 - y_p \end{pmatrix} \right|}$$

beschrieben werden.  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  sind dabei Vektoren aus der Schnittmenge des Randes der Menge  $A$  und der Lösungsmenge von  $(y - y_p)^2 + (x - x_p)^2 = \frac{L^2}{4}$ . Es darf

## F. Stochastik

nur diese beiden Lösungen geben. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Nadel den Rand schneidet oder berührt, ist somit:

$$w = \frac{1}{\pi F} \cdot \int_A \alpha dy_p dx_p$$

Ein zweidimensionales Integral ist zu lösen.  $\alpha$  muß dabei in Bogenmaß sein. Mit  $F$  wird der Flächeninhalt von der Menge  $A$  bezeichnet. Zu beachten ist noch, daß  $x_1, y_1, x_2, y_2$  Funktionen von  $x_p$  und  $y_p$  sind, die vor der Integration einzusetzen sind.

© 2001 **Harald Schröer**



# Kapitel G.

## Mechanik

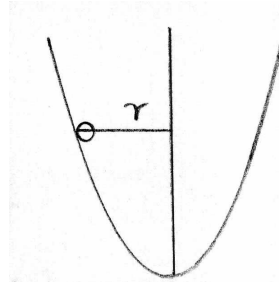
### Inhalt

30. Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit auf Rotationskörperschalen . . . . .	106
31. Wurfbahnen von Kugeln auf der schiefen Ebene . . . . .	144
32. Bewegung einer Kugel mit künstlicher Beschleunigung auf der schiefen Ebene	151
33. Der vertikale Looping . . . . .	155
34. Abflug von einer Kugel . . . . .	158
35. Ruhende Kugeln . . . . .	160
36. Der schwingende Körper und die rotierende Scheibe . . . . .	173
37. Der allgemeine Überholvorgang . . . . .	177
38. Die Rolle . . . . .	181
39. Das Basketballproblem . . . . .	185
40. Aufeinanderfolgende Wurfbahnen . . . . .	189
41. Besondere Formen des elastischen Stoßes und das ballistische Pendel . . . . .	193
42. Interferenz bei zwei Wellenerregern . . . . .	197
43. Der Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit (Gas) . . . . .	200
44. Schwebende Hohlkugel in einer Flüssigkeit . . . . .	207
45. Beschleunigung in Flüssigkeiten und Gasen . . . . .	210
46. Schwimmende Quader . . . . .	214
47. Seifenblasen . . . . .	217
48. Aufstieg einer Gasblase in einer Flüssigkeit . . . . .	223

## 30. Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit auf Rotationskörperschalen

### 1. Der reibungslose Fall

In einer Rotationskörperschale befindet sich eine Kugel.

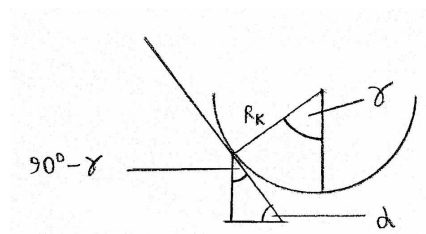


Setzt man die Schale in Rotation, so strebt die Kugel vom Mittelpunkt der Schale weg auf eine höhere Position. Hier ergeben sich mehrere Fragen. Ist die Kugel bei der Rotation im Gleichgewicht oder stürzt sie ab? Gibt es Spielräume bei der angenommenen Position? Gibt es vielleicht Bereiche der Schale, in denen die Kugel nicht sein kann? Es ist anschaulich klar, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Schale eine wichtige Rolle spielt. Welche anderen Größen spielen sonst noch eine Rolle? Wie ist die Abhängigkeit von diesen Größen? Gibt es vielleicht auch Größen, von denen diese Position unabhängig ist? Physikalisch ist die Situation der rotierenden Schale gleichwertig zu der Situation einer Kugel, die in der ruhenden Schale kreist.

Es soll die Abhängigkeit von  $r$  und  $v$  (Geschwindigkeit) bestimmt werden und auch die Winkelgeschwindigkeit  $w$ . Schwerkraft und Fliehkraft (Zentrifugalkraft) müssen dabei im Gleichgewicht sein. Die Fliehkraft kommt im Alltag durchaus häufig vor. Jeder hat schon mal die Wirkung der Zentrifugalkraft (Fliehkraft) erfahren, z.B. bei einem Karussell oder beim Fahren einer Kurve.

#### 1.1. Kugelschale

Zuerst soll die Rotationskörperschale selbst eine Kugelschale sein. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene sei  $\alpha$ .



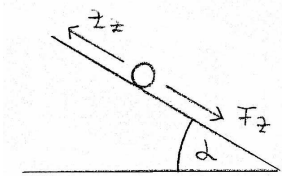
$m$  = Masse der innenliegenden Kugel

## G. Mechanik

$R_k$  = Radius der Kugelschale (innerer Radius der Schale)

$g$  = Erdbeschleunigung

$$\alpha = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma \quad \text{also} \quad \alpha = \gamma$$

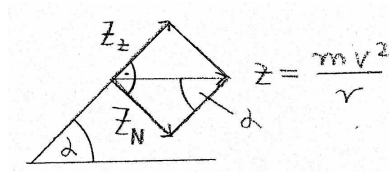
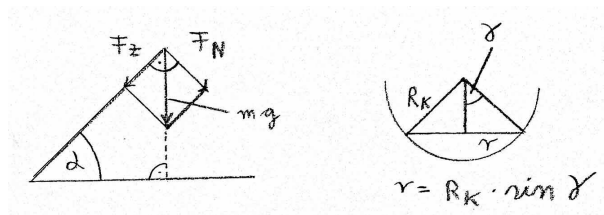


$F_z$  = Fallkraft

$Z_z$  = Zentrifugalkraft, die entgegenwirkt

$$F_z = mg \sin \alpha \quad \text{und} \quad Z_z = \frac{mv^2}{r} \cdot \cos \alpha$$

folgen aus folgenden Skizzen:



$F_N, Z_N$  sind Normalkräfte.

Es folgt:

$$Z_z = Z \cdot \cos \alpha \quad Z_N = Z \cdot \sin \alpha$$

wir erhalten:

$$Z_z = \frac{mv^2}{r} \cdot \cos \alpha \quad \alpha = \gamma$$

$$r = R_k \cdot \sin \alpha$$

Einsetzung:

$$Z_z = \frac{mv^2}{R_k \cdot \sin \gamma} \cdot \cos \gamma$$

## G. Mechanik

Für  $F_z$  bekommen wir wegen  $\alpha = \gamma$ :

$$F_z = mg \cdot \sin \gamma$$

Für eine stabile Kreisbahn in der Kugelschale muß  $F_z = Z_z$  (Gleichgewicht) sein, also:

$$mg \sin \gamma = \frac{mv^2}{R_k \cdot \sin \gamma} \cdot \cos \gamma$$

umgeformt:

$$v^2 = g \cdot R_K \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \quad \text{mit} \quad \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \tan \gamma$$

ergibt:

$$v(\gamma) = \sqrt{g \cdot R_k \cdot \sin \gamma \cdot \tan \gamma}$$

$$w = \frac{v}{r} \quad w = \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\begin{aligned} w(\gamma) &= \frac{\sqrt{g R_k \sin \gamma \tan \gamma}}{R_k \sin \gamma} = \sqrt{\frac{g R_k \sin \gamma \tan \gamma}{R_k^2 \cdot \sin^2 \gamma}} \\ &= \sqrt{\frac{g \tan \gamma}{R_k \sin \gamma}} = \sqrt{\frac{g}{R_k \cdot \cos \gamma}} \end{aligned}$$

$$\text{Rotationszeit:} \quad U_t = \frac{2\pi}{w}$$

Näherungen:

Für  $\gamma \ll 90^\circ$  gilt  $\sin \gamma \approx \tan \gamma$

daraus folgt:

$$v \approx \sqrt{g \cdot R_k \cdot \sin^2 \gamma} = \sin \gamma \cdot \sqrt{g \cdot R_K}$$

Für  $\gamma$  nahe  $90^\circ$  gilt  $\sin \gamma \approx 1$ :

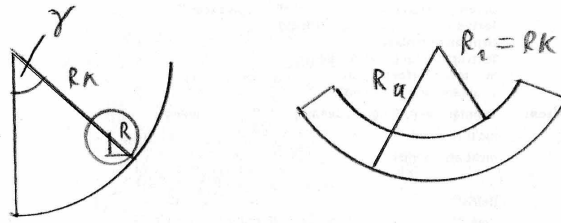
$$v \approx \sqrt{g \cdot R_K \cdot \tan \gamma}$$

Wenn der Schwerpunkt der Mittelpunkt der kleinen Kugel ist, dann können wir folgendes machen:

$R$  = Radius der kleinen Kugel

$R_k = R_i$  = Radius der Kugelschale (innerer Radius)

$R_a$  = äußerer Radius



Nach der Skizze erhalten wir die Beziehung:

$$r_m = r \cdot \frac{\sin \gamma \cdot R_k - \sin \gamma \cdot R}{\sin \gamma \cdot R_k} \quad (1)$$

daraus erhalten wir:

$$r_m = r \cdot \frac{R_k - R}{R_k}$$

$r_m$  ist bei einer kleinen Kugel nur geringfügig kleiner als  $r$ .

Wenn wir  $r_m$  anstatt von  $r$  in die Gleichungen einsetzen, dann bekommen wir die Winkelgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der kleinen Kugel. Wir nehmen an, dass die kleine Kugel konstante örtliche Dichte hat. Mit der Schwerpunktkorrektur erhalten wir die Schwerpunktschwindigkeit:

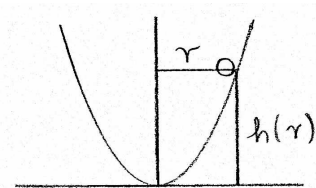
$$v_m = \sqrt{g \cdot r_m \cdot \tan \gamma} \quad \text{mit} \quad r_m = R_k \cdot \sin \gamma \cdot \left(1 - \frac{R}{R_k}\right)$$

Für die Geschwindigkeit am Berührungspunkt gilt:

$$v = v_m \cdot \frac{R_k \cdot \sin \gamma}{r_m}$$

## 1.2. Allgemeiner Rotationskörper

Nun soll die Schale eines allgemeinen Rotationskörpers betrachtet werden.



$h(r)$  ist die Funktion des allgemeinen Rotationskörpers.

$$h'(r) = s = \tan \alpha = \text{Steigung}$$

$\alpha$  ist dabei der Neigungswinkel. Wir erhalten wie bei der Kugelschale:

$$F_z = mg \cdot \sin \alpha \quad Z_z = \frac{mv^2}{r} \cdot \cos \alpha$$

## G. Mechanik

Es gilt:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

hieraus folgt:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Wir setzen nun  $s$  ein und erhalten:

$$F_z = \frac{mgs}{\sqrt{1 + s^2}} \quad Z_z = \frac{mv^2}{r\sqrt{1 + s^2}}$$

Für eine stabile Bahn muß wieder  $F_z = Z_z$  (Gleichgewicht) gelten, also:

$$\frac{mv^2}{r\sqrt{1 + s^2}} = \frac{mgs}{\sqrt{1 + s^2}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = g \cdot r \cdot s$$

also folgt:

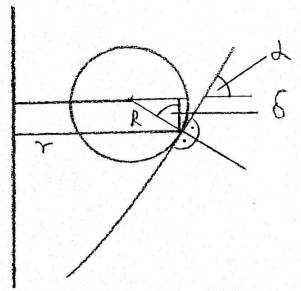
$$v = +\sqrt{g \cdot r \cdot s}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit bekommen wir:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{grs}{r^2}} = \sqrt{\frac{g \cdot s}{r}}$$

Wegen  $s = h'(r)$  ist eine Auflösung von  $v$  oder  $w$  nach  $r$  im allgemeinen nicht möglich. Das muß dann bei einer konkret gegebenen Funktion  $h(r)$  geschehen.

Wenn der Schwerpunkt der kleinen Kugel im Mittelpunkt ist, können wir folgendes machen:  $R$  ist der Radius der Kugel.



Für den Winkel  $\delta$  gilt:  $\delta = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$  Aus der Abbildung entnehmen wir:

$$r_m = r \cdot \frac{r - R \cdot \sin \delta}{r}$$

Mit  $\tan \alpha = s$  und

$\sin \delta = \frac{\tan \delta}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta}}$  folgern wir daraus:

$$r_m = r \cdot \frac{r - \frac{R \cdot s}{\sqrt{1 + s^2}}}{r} \quad (2)$$

mit  $s = h'(r)$

$r_m$  ist bei einer kleinen Kugel nur geringfügig kleiner als  $r$ . Wenn wir  $r_m$  anstatt von  $r$  in die Gleichungen einsetzen, erhalten wir die Winkelgeschwindigkeit und Geschwindigkeit des Schwerpunkts der kleinen Kugel. Wir nehmen an, dass die kleine Kugel eine konstante örtliche Dichte hat. Das ist bei allen Kapiteln gültig. Die genaue Auswertung mit Schwerpunkt ergibt dann für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der kleinen Kugel:

$$v_m = \sqrt{g \cdot r_m \cdot h'(r)}$$

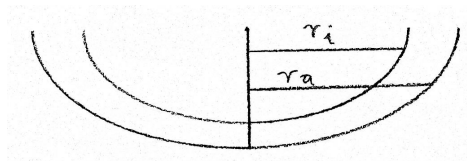
Für die Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \frac{v_m}{r_m} = \sqrt{\frac{g \cdot h'(r)}{r_m}}$$

Mit

$$v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

erhalten wir die Geschwindigkeit am Berührungspunkt.

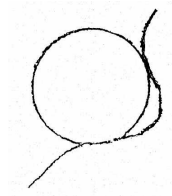


Mit der Rotationskörperfunktion  $h(r)$  ist immer die innere gemeint. Wir bezeichnen:

$r = r_i =$  innerer Radius

$r_a =$  äußerer Radius

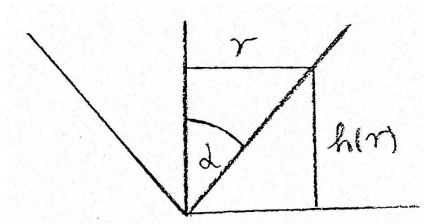
$h(r)$  muß so sein, daß es mit der Kugel nur **ein** Berührungspunkt gibt. Also keine „Mulden“ mit zwei Berührungspunkten vgl. Abbildung:



Vom allgemeinen Rotationskörper können nun verschiedene Spezialfälle abgeleitet werden.

### 1.3. Rotationskegel

Wir betrachten nun einen Rotationskegel:



$\alpha$  = Öffnungswinkel des Kegels

Durch die Abbildung sehen wir:

$$h(r) = \frac{r}{\tan \alpha} \quad \Rightarrow \quad s = h'(r) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Setzen wir nun in die allgemeine Formel  $v = \sqrt{gr s}$  für  $h(r)$  und  $s$  ein, so bekommen wir für die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot r}{\tan \alpha}}$$

Umgeformt nach  $r$ :

$$r = \frac{v^2 \cdot \tan \alpha}{g}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{gr}{\tan \alpha \cdot r^2}} = \sqrt{\frac{g}{r \cdot \tan \alpha}}$$

Wiederum nach  $r$  umgeformt:

$$r = \frac{g}{w^2 \cdot \tan \alpha}$$

vgl. Sommerfeld [5] §14.1 S.73.

Zur Anwendung von Gleichung (2) wird nun  $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$  berechnet.

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{\tan \alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \cos \alpha$$

Aus Gleichung (2) folgt nun:

$$r_m = r \cdot \frac{r - R \cdot \cos \alpha}{r}$$

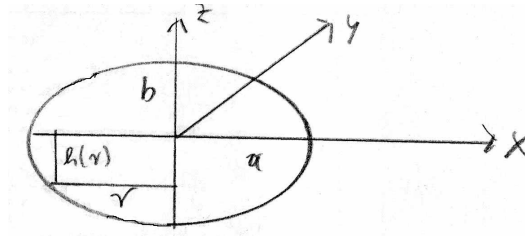
Die Berücksichtigung des Schwerpunkts führt zu:

$$v_m = \sqrt{\frac{g \cdot r_m}{\tan \alpha}} \quad w = \sqrt{\frac{g}{r_m \cdot \tan \alpha}} \quad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$



### 1.4. Rotationsellipsoid

Wir wenden uns nun dem Rotationsellipsoiden zu. Die Halbachse  $a$  liegt auf der  $x$ -Achse und auf der  $y$ -Achse, die Halbachse  $b$  auf der  $z$ -Achse. Die  $z$ -Achse soll Rotationsachse sein. Die Halbachsen  $a$  und  $b$  können beliebig sein.



Es gilt die Mittelpunktgleichung der Ellipse:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$$

Umgeformt:

$$h^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = b^2 \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2}$$

Daraus folgt:

$$h(r) = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - r^2}$$

Bilden wir die Ableitung nach  $r$ , so erhalten wir:

$$s = h'(r) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2r}{\pm \sqrt{a^2 - r^2}} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

mit  $v = +\sqrt{gr s}$  folgt:

$$v = +\sqrt{g \cdot r \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}}$$

schließlich:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{b \cdot g}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}} \quad (3)$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $w$  ergibt sich:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{bg}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}} \quad (4)$$

Näherung für  $r \ll a$ :

$$v \approx \frac{r}{a} \cdot \sqrt{bg} \quad w = \frac{v}{r} \approx \frac{1}{a} \cdot \sqrt{bg}$$

Jetzt muß noch die Beziehung zwischen  $r$  und  $r_m$  gefunden werden. Wir erhalten im Fall des Rotationsellipsoids für den Ausdruck:

$$\frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} = \frac{br}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 r^2}{a^2 \cdot (a^2 - r^2)}}}$$

$$= \frac{br}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2 + \frac{b^2 r^2}{a^2}}} = \frac{br}{\sqrt{a^4 - r^2 a^2 + b^2 r^2}}$$

Wir setzen diesen Term in Gleichung (2) ein:

$$r_m = r \cdot \frac{r - \frac{brR}{\sqrt{a^4 - r^2 a^2 + b^2 r^2}}}{r}$$

$$r_m = r \left( 1 - \frac{bR}{\sqrt{a^4 - r^2 a^2 + b^2 r^2}} \right) \quad (5)$$

Die Berücksichtigung durch den Schwerpunkt liefert:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{b \cdot g}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}} \quad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

Die Winkelgeschwindigkeit bleibt dieselbe.

### 1.5. Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden:

Es ist auch möglich, die Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden mit dem Kugelradius  $R_k = a = b$  zu betrachten. Durch Spezialisierung der Formeln (3) und (4) ergibt sich:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_k^2 - r^2}}} \quad w = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_k^2 - r^2}}}$$

Näherung für  $r \ll R_k$ :

$$v \approx r \cdot \sqrt{\frac{g}{R_k}} \quad w \approx \sqrt{\frac{g}{R_k}}$$

Spezialisierung von (5):

$$r_m = r \cdot \left( 1 - \frac{R}{R_k} \right)$$

Eine noch genauere Berechnung mit dem Schwerpunkt ergibt:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_k^2 - r^2}}} \quad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

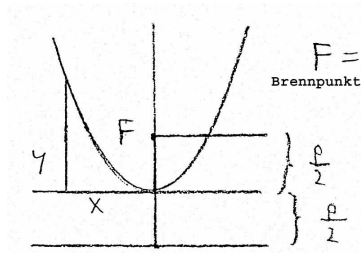
Die Winkelgeschwindigkeit bleibt unverändert.

### 1.6. Paraboloid

Wir gehen nun auf den Rotationsparaboloiden ein. Für die Parabel gilt:

$$x^2 = 2py$$

Wir betrachten folgende Abbildung:



Bezeichnungen:

Brennweite  $f = \frac{p}{2}$       $x = r$  ,  $y = h$

$$r^2 = 2h \cdot 2f = 4hf$$

daraus erhalten wir:

$$h = \frac{r^2}{4f} \quad s = h'(r) = \frac{r}{2f}$$

mit  $v = +\sqrt{gr s}$  folgt:

$$v = \sqrt{gr \cdot \frac{r}{2f}} = r \cdot \sqrt{\frac{g}{2f}}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{g}{2f}}$$

$w$  ist unabhängig von  $r$ .

Wir formen die Geschwindigkeitsgleichung um:

$$r = v \cdot \sqrt{\frac{2f}{g}}$$

Zur Beziehung zwischen  $r$  und  $r_m$ :

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{r}{2f \cdot \sqrt{1+\frac{r^2}{4f^2}}} = \frac{r}{\sqrt{4f^2+r^2}}$$

Mit Gleichung (2) bekommen wir:

$$r_m = r \cdot \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{4f^2+r^2}} \right)$$

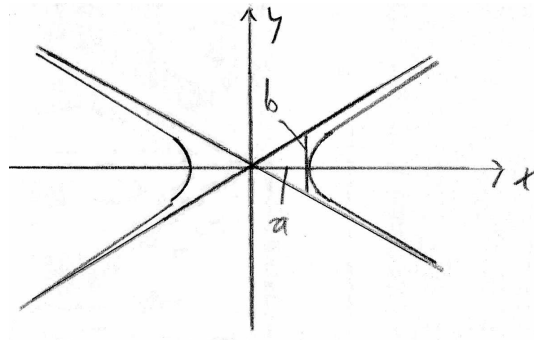
Eine noch genauere Berechnung mit dem Schwerpunkt der kleinen Kugel führt zu:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{g}{2f}} \quad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

Die Winkelgeschwindigkeit verändert sich nicht.

### 1.7. Hyperboloid

Wir schauen uns nun die Kreisbahnen auf einer Rotationshyperboloidenschale an:

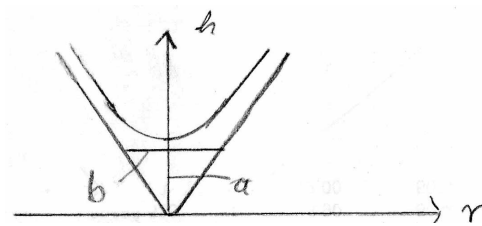


Mittelpunktsgleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sinnvoll sind die Bezeichnungen:

$$y = r, x = h$$



In die Mittelpunktsgleichung eingesetzt:

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$$

Umgeformt:

$$h^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right) = \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 + r^2)$$

also:

$$h = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + r^2}$$

Für die Steigung  $s$  ergibt sich:

$$s = h'(r) = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{b^2 + r^2}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

mit  $v = +\sqrt{gr s}$  folgt:

$$v = \sqrt{gr \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}} = r \cdot \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}} \quad (6)$$

## G. Mechanik

Eine Näherung für  $a, b \ll r$ :

$$v \approx r \cdot \sqrt{\frac{ag}{br}} = \sqrt{\frac{arg}{b}}$$

Asymptote:  $h'(r) \approx \frac{a}{b}$

Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

für  $a, b \ll r$ :

$$w \approx \sqrt{\frac{ag}{br}}$$

Nun berechnen wir noch die Kugelmittelpunktsgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} &= \frac{ar}{b \cdot \sqrt{b^2+r^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2r^2}{b^2 \cdot (b^2+r^2)}}} \\ &= \frac{ar}{b \cdot \sqrt{b^2+r^2+\frac{a^2r^2}{b^2}}} = \frac{ra}{\sqrt{b^4+r^2b^2+a^2r^2}} \end{aligned}$$

aus (2) folgt für  $r_m$ :

$$r_m = r \cdot \frac{r - \frac{Rra}{\sqrt{b^4+r^2b^2+r^2a^2}}}{r}$$

schließlich:

$$r_m = r \cdot \left( 1 - \frac{Ra}{\sqrt{b^4+r^2b^2+r^2a^2}} \right)$$

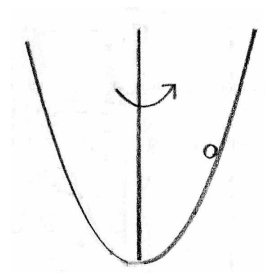
Mit dieser Schwerpunktkorrektur erhalten wir:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{a \cdot g}{b \cdot \sqrt{b^2+r^2}}} \quad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

Die Winkelgeschwindigkeit bleibt dieselbe.

### Verallgemeinerungen:

a): Statt Rotationskörperschalen kann man auch einen Arm betrachten, der die Form des Rotationskörpers hat.



Dieser Arm wird in Rotation versetzt und der Körper darauf nimmt durch Gravitation und Zentrifugalkraft eine Gleichgewichtstellung ein. Wenn der Körper auf diesem Arm reibungsfrei gleitet, gelten dieselben Gleichungen dafür. (Vor allem kann man das bei Rotationskörpern wie Kugel, Zylinder u.s.w. erreichen.)

**b):** Der reibungslose Fall im Medium kann genauso behandelt werden, wenn statt  $g$ ,  $\frac{g \cdot (\varphi_K - \varphi_F)}{\varphi_K} = g \cdot \left(1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_K}\right)$  (vgl z.B. Budo [2] §16 S.85) in die Gleichungen eingesetzt wird. Dabei ist  $\varphi_F$  die Dichte des Mediums (Flüssigkeit oder Gas) und  $\varphi_K$  die Dichte des Körpers, der sich im Gleichgewicht befindet (nicht die Dichte der Rotationskörperschale).

**Begründung:**

Bei diesen Gleichgewichtsfällen treten nur Gravitation und Zentrifugalkraft auf. Die Zentrifugalkraft ist unabhängig vom Medium, im Falle der Kreisbewegung hängt die Zentrifugalkraft nur von  $r$  und  $v$  ab, wie man aus der Herleitung der Zentrifugalkraft sehen kann, nicht aber vom Medium. Die Gravitationsbeschleunigung verändert sich von  $g$  zu  $g \cdot \frac{\varphi_K - \varphi_F}{\varphi_K}$ . Nur bei der Gravitation tritt eine Veränderung auf, weswegen in diesem Fall  $g \cdot \left(1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_K}\right)$  statt  $g$  einfach eingesetzt werden kann.

Bei  $\varphi_F > \varphi_K$  muß die Rotationskörperschale (bzw. der Arm) umgedreht werden.



Dann gelten wieder dieselben Gleichungen.

**2. Der Reibungsfall**

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $m$  = Masse der Kugel
- $R$  = Radius der Kugel
- $g$  = Erdbeschleunigung
- $F_R$  = Reibungskraft
- $\mu$  = allgemeiner Reibungskoeffizient
- $\mu_H$  = Haftreibungskoeffizient
- $\mu_G$  = Gleitreibungskoeffizient
- $\mu'$  = Rollreibungskoeffizient
- $\alpha$  = Neigungswinkel der Ebene

Wir erklären den Faktor  $\delta$  folgenderweise:

$$\delta := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls } \frac{\mu'}{R} < \mu_H \text{ (Rollen)} \\ 1 & \text{falls } \mu_H < \frac{\mu'}{R} \text{ (Gleiten)} \\ \frac{5}{7} \text{ oder } 1 & \text{falls } \frac{\mu'}{R} = \mu_H \neq 0 \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \\ 1 & \text{falls } 0 = \frac{\mu'}{R} = \mu_H \text{ (reibungsfrei)} \end{cases}$$

vgl dazu Assmann [1], Band 1, Kapitel 11.10, S. 265.

Die Beschleunigung  $b$  auf der schiefen Ebene ist:

$b = \delta g \cdot \sin \alpha$ , die Geschwindigkeit  $v$  und die zurückgelegte Strecke  $s$  ergeben sich dann als  $v = \delta g \sin \alpha \cdot t$  und  $s = \frac{1}{2} \cdot \delta g \cdot t^2 \cdot \sin \alpha$ .

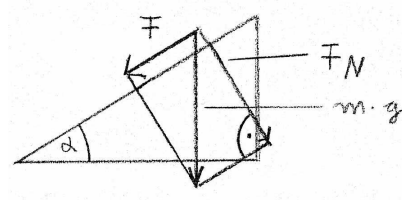
Rollt eine Kugel auf der schiefen Ebene, so ist  $\delta = \frac{5}{7}$ , dieses folgt zum Beispiel aus Budo [2] §57, S.302, Gl. (8). Das Trägheitsmoment  $J$  einer Kugel ist  $J = \frac{2}{5} \cdot mR^2$ . Die allgemeine Formel für das Abrollen auf der schiefen Ebene lautet:

$$b = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}} \quad (7)$$

Eine Herleitung befindet sich bei \* am Ende des Kapitels oder man kann das mit Budo [2] §57, S.302, Gl. (5)-(7) sehen. Das Trägheitsmoment der Kugel eingesetzt ergibt:

$$b = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{2}{5} \cdot m} = \frac{5}{7} \cdot g \sin \alpha \quad (8)$$

Damit ergibt sich im Fall des Rollens  $\delta = \frac{5}{7}$ .



Für die Kräfte erhalten wir (siehe Abb.):

$$F = mg \sin \alpha \quad F_N = mg \cos \alpha$$

Reibungskraft:

$$F_R = \mu \cdot F_N = mg \mu \cos \alpha$$

Im Reibungsfall ist:

$$\mu = \begin{cases} \frac{\mu'}{R} & \text{falls } \mu_H > \frac{\mu'}{R} \text{ (Rollen)} \\ \mu_G & \text{falls } \frac{\mu'}{R} > \mu_H \text{ (Gleiten)} \\ \mu_G \text{ oder } \frac{\mu'}{R} & \text{falls } \mu_H = \frac{\mu'}{R} \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \end{cases}$$

vgl. Assmann [1], Band 1, Kapitel 11.10, S.265 Im Reibungsfall ist:

$$F = mg \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad b = g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$v = gt \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad s = \frac{1}{2} \cdot gt^2 (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

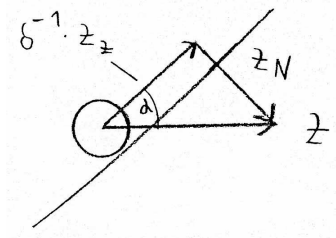
Betrachtet man Kreisbahnen auf Rotationskörperschalen und ist  $Z$  die Zentrifugalkraft so lauten die Ungleichungen für stabile Bahnen vgl. Sommerfeld [5] Band 1, §14.1, S.73:

$$Z_z - F_z \leq Z_R + F_R \quad F_z - Z_z \leq Z_R + F_R$$

mit:

$$F_z = \delta mg \sin \alpha \quad F_R = mg \cos \alpha \cdot \mu$$

Für die Zentrifugalkräfte (siehe Abb.):



$$Z = \frac{mv^2}{r} = \text{Zentrifugalkraft}$$

$$Z_N = Z \cdot \sin \alpha \quad Z_z = \delta \cdot \frac{mv^2}{r} \cdot \cos \alpha$$

$Z_R$  = Reibungskraft der Zentrifugalkraft

$$Z_R = \mu \cdot Z_N = \mu \cdot \frac{mv^2}{r} \cdot \sin \alpha$$

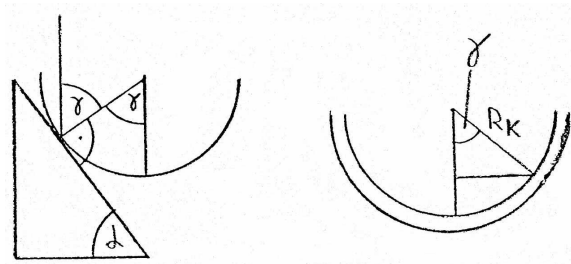
## 2.1. Bahnen auf der Kugelschale

Nun geht es um stabile Bahnen auf der Kugelschale, bei der diesmal die Reibung berücksichtigt wird.

$R_K$  = Kugelradius (innerer Radius der Kugelschale)

$\gamma$  = Höhenwinkel der Kugelschale

$\alpha = \gamma$



Die Grenzggeschwindigkeiten für stabile Bahnen ergeben sich aus:

$$Z_z - F_z = Z_R + F_R \quad (9)$$

$$F_z - Z_z = Z_R + F_R \quad (10)$$

Es ist  $r = \sin \gamma \cdot R_K$  und  $\alpha = \gamma$  Es folgt aus (9):

$$\delta \cdot \frac{mv_{max}^2 \cos \gamma}{\sin \gamma \cdot R_K} - \delta mg \sin \gamma = \mu \frac{mv_{max}^2 \sin \gamma}{\sin \gamma \cdot R_K} + mg \cos \gamma \cdot \mu$$



mit  $\tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$  folgt:

$$\frac{\delta m v_{max}^2}{\tan \gamma \cdot R_K} - \delta m g \sin \gamma = \frac{\mu m v_{max}^2}{R_K} + m g \cos \gamma \cdot \mu$$

geordnet:

$$v_{max}^2 \cdot \left( \frac{\delta m}{\tan \gamma \cdot R_K} - \frac{\mu m}{R_K} \right) = m g \cos \gamma \cdot \mu + \delta m g \sin \gamma$$

Auflösung:

$$v_{max}^2 = \frac{g \sin \gamma \cdot \left( \delta + \frac{\mu}{\tan \gamma} \right)}{\left( \frac{\delta}{\tan \gamma} - \mu \right) \cdot \frac{1}{R_K}}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{g R_K \sin \gamma \cdot (\tan \gamma \cdot \delta + \mu)}{\delta - \mu \tan \gamma}}$$

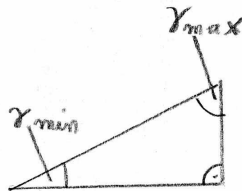
Aus Gl (10) kann man auf dieselbe Weise einen Ausdruck für die minimale Geschwindigkeit bekommen:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{g R_K \sin \gamma \cdot (\delta \tan \gamma - \mu)}{\delta + \tan \gamma \cdot \mu}}$$

Es ist allgemein:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = w = \frac{v}{r} = \frac{v}{\sin \gamma \cdot R_K}$$

Es gibt ein  $\gamma_{max}$  und ein  $\gamma_{min}$  die folgendermaßen aus der maximalen und minimalen Geschwindigkeit bestimmt werden können.



$v_{max} = \infty$  wenn  $\delta - \mu \tan \gamma = 0$ , daraus folgt:

$$\tan \gamma_{max} = \frac{\delta}{\mu}$$

$v_{min} = 0$  wenn  $\delta \tan \gamma - \mu = 0$  daraus bekommt man:

$$\tan \gamma_{min} = \frac{\mu}{\delta}$$

Man erhält zusätzlich:

$$\gamma_{max} + \gamma_{min} = 90^\circ$$

Die Kugel kann sich also nur im Bereich  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  in einer stabilen Kreisbahn bewegen. Außerhalb dieses Bereiches gibt es keine stabilen Kreisbahnen mit konstanten Höhenwinkel.

Wenn man für  $\mu$  Null einsetzt erhält man aus der Maximalgeschwindigkeit und der Minimalgeschwindigkeit denselben Ausdruck

$$v = \sqrt{gR_K \sin \gamma \tan \gamma}$$

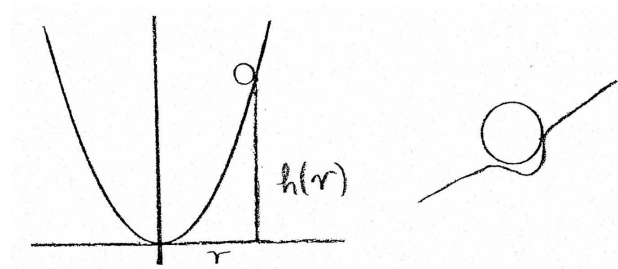
für den reibungslosen Fall. Das ist die Formel von Kapitel 1.

Die Beziehung zwischen  $r$  und  $r_m$  bleibt dieselbe wie im Kapitel 1 für den reibungslosen Fall.

## 2.2. Die Bahn auf der allgemeinen Rotationskörperschale

$h(r)$  = Rotationskörperfunktion siehe Abbildung,  $s = h'(r)$

$h(r)$  muß so sein, daß es mit der Kugel nur **ein** Berührungspunkt gibt. Also keine „Mulden“.



Mit der Rotationskörperfunktion ist immer die von der inneren Schale gemeint.  
 $r$  = innerer Radius

Es gilt folgendes:

$$s = \tan \alpha \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \quad \sin \alpha = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

daraus folgt:

$$F_z = \delta mg \cdot \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \quad F_R = \frac{mg\mu}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$Z_z = \delta \cdot \frac{mv^2}{r \cdot \sqrt{1+s^2}} \quad Z_R = \frac{\mu mv^2 s}{r \cdot \sqrt{1+s^2}}$$

Nun wenden wir wieder die Gleichung (9) an.

$$\frac{\delta mv_{max}^2}{r \cdot \sqrt{1+s^2}} - \frac{\delta mgs}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\mu mv_{max}^2 s}{r \cdot \sqrt{1+s^2}} + \frac{mg\mu}{\sqrt{1+s^2}}$$

vereinfacht:

$$\frac{v_{max}^2 \cdot \delta}{r} - \frac{v_{max}^2 \cdot \mu s}{r} = g\mu + \delta g s$$

$$\frac{v_{max}^2}{r} \cdot (\delta - \mu s) = g \cdot (\mu + \delta s)$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}}$$

Analog kann man auch eine Formel für die minimale Geschwindigkeit aus der Gleichung (10) herleiten. Diese lautet:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s - \mu)}{\mu s + \delta}}$$

Es gibt auch hier ein  $s_{max}$  und ein  $s_{min}$ , die aus den Gleichungen für Maximalgeschwindigkeit und Minimalgeschwindigkeit bestimmt werden.

$v_{max} = \infty$  wenn  $\delta - \mu s = 0$  daraus folgt:

$$s_{max} = \frac{\delta}{\mu} \quad (11)$$

$v_{min} = 0$  wenn  $\delta s - \mu = 0$  man erhält:

$$s_{min} = \frac{\mu}{\delta} \quad (12)$$

Wir finden:

$$s_{min} \cdot s_{max} = 1$$

Im reibungslosen Fall mit  $\mu = 0$  ergibt sich:

$$v_{max} = v_{min} = \sqrt{grs}$$

Diese Formel stimmt mit der vom Kapitel 1 überein.

Die Beziehung zwischen  $r$  und  $r_m$  ist dieselbe wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit =  $w = \frac{v}{r}$

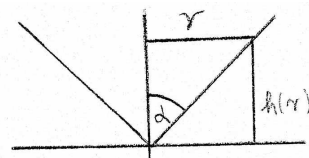
Vom allgemeinen Rotationskörper können nun verschiedene Spezialfälle hergeleitet werden.

### 2.3. Der Rotationskegel

In diesem Fall ist:

$$h(r) = \frac{r}{\tan \alpha} \quad s = h'(r) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$\alpha$  = Öffnungswinkel des Kegels



In die Formel für die maximale Geschwindigkeit des allgemeinen Rotationskörpers eingesetzt ergibt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\frac{\delta}{\tan \alpha} + \mu\right)}{\delta - \frac{\mu}{\tan \alpha}}}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta + \tan \alpha \cdot \mu)}{\delta \tan \alpha - \mu}}$$

In derselben Weise erhält man aus der Minimalgeschwindigkeitsformel für den allgemeinen Rotationskörper die Minimalgeschwindigkeit beim Rotationskegel:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta - \mu \tan \alpha)}{\mu + \delta \tan \alpha}}$$

Aus den allgemeinen Grenzbedingungen  $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$  und  $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$  folgen  $\frac{1}{\tan \alpha_{max}} = \frac{\delta}{\mu}$  und  $\frac{1}{\tan \alpha_{min}} = \frac{\mu}{\delta}$ , so daß wir erhalten:

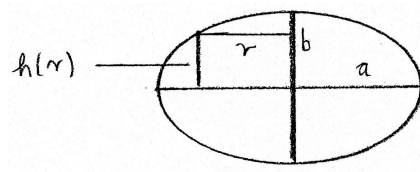
$$\tan \alpha_{max} = \frac{\mu}{\delta} \quad \tan \alpha_{min} = \frac{\delta}{\mu}$$

Beim Rotationskegel gibt es nicht  $r_{min}, r_{max}$  sondern  $\alpha_{min}, \alpha_{max}$ . Setzt man bei den beiden Geschwindigkeitsformel  $\mu = 0$  ein so ergibt sich die Formel  $v = \sqrt{\frac{rg}{\tan \alpha}}$  für den reibungslosen Fall. Diese Formel ist schon vom vorigen Kapitel bekannt. Die Beziehung zwischen  $r$  und  $r_m$  ist dieselbe wie im vorigen Kapitel beim reibungslosen Fall.

Winkelgeschwindigkeit =  $w = \frac{v}{r}$

## 2.4. Der Rotationsellipsoid

Wir betrachten die Abbildung:



Aus der Mittelpunktsformel der Ellipse mit den Halbachsen  $a, b$  bekommen wir (siehe auch voriges Kapitel):  $b = \text{Rotationsachse}$

$$h(r) = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - r^2} \quad s = h'(r) = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Wir wenden wieder die Formel für die maximale Geschwindigkeit beim allgemeinen Rotationskörper an:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\delta \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \mu\right)}{\delta - \frac{b}{a} \cdot \frac{\mu r}{\sqrt{a^2 - r^2}}}}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta br + \mu a \cdot \sqrt{a^2 - r^2})}{\delta a \cdot \sqrt{a^2 - r^2} - b\mu r}}$$

Analog kann man aus der Formel für die Minimalgeschwindigkeit des allgemeinen Rotationskörpers folgende Gleichung herleiten:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta br - \mu a \cdot \sqrt{a^2 - r^2})}{\mu br + \delta a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}}$$

Aus den allgemeinen Grenzbedingungen  $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$  und  $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$  bekommt man die speziellen Bedingungen für den Rotationsellipsoiden:

$$\frac{\delta}{\mu} = \frac{b}{a} \cdot \frac{r_{max}}{\sqrt{a^2 - r_{max}^2}} \quad \frac{\mu}{\delta} = \frac{b}{a} \cdot \frac{r_{min}}{\sqrt{a^2 - r_{min}^2}}$$

wir formen jetzt nach  $r_{max}$  um:

$$\delta^2 a^2 \cdot (a^2 - r_{max}^2) = \mu^2 b^2 r_{max}^2$$

$$\delta^2 a^4 - \delta^2 a^2 r_{max}^2 = \mu^2 b^2 r_{max}^2$$

$$r_{max}^2 = \frac{\delta^2 a^4}{\mu^2 b^2 + \delta^2 a^2}$$

also:

$$r_{max} = \frac{\delta a^2}{\sqrt{\mu^2 b^2 + \delta^2 a^2}} < a$$

Die andere Grenzbedingung kann man genauso nach  $r_{min}$  umformen:

$$r_{min} = \frac{a^2 \mu}{\sqrt{b^2 \delta^2 + a^2 \mu^2}} < a$$

Für  $\mu \ll 1$  folgt nun:

$$r_{min} \approx \frac{a^2 \mu}{b \delta} \quad r_{max} \approx a$$

Einsetzung von  $\mu = 0$  bei den Formeln für die Maximal- und Minimalgeschwindigkeit führt zur bekannten Formel für den reibungsfreien Fall (siehe Kapitel 1):

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{gb}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}}$$

Die Gleichung zwischen  $r$  und  $r_m$  ist dieselbe wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit =  $w = \frac{v}{r}$

### 2.5. Spezialfall Kugel ( $a = b = R_K$ )

Durch Spezialisierung der Rotationsellipsoidengleichungen erhält man die Gleichungen für die Kugel diesmal in Abhängigkeit von  $r$  und nicht vom Höhenwinkel.  $a = b = R_K$  gesetzt ergeben:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r + \mu \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2})}{\delta \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2} - \mu r}}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r - \mu \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2})}{\mu r + \delta \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2}}}$$

$$r_{max} = \frac{\delta \cdot R_K}{\sqrt{\mu^2 + \delta^2}} \quad r_{min} = \frac{R_K \cdot \mu}{\sqrt{\delta^2 + \mu^2}}$$

für  $\mu \ll 1$  ist  $r_{min} \approx \frac{R_K \cdot \mu}{\delta}$  und  $r_{max} \approx R_K$ . Beim reibungslosen Fall  $\mu = 0$  erhält man aus den Geschwindigkeitsformeln wieder die bekannte Formel

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_K^2 - r^2}}}$$

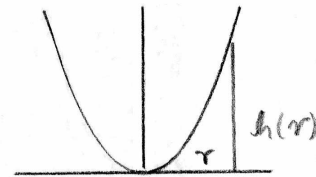
aus Kapitel 1.

Die Beziehung zwischen  $r$  und  $r_m$  ist wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit =  $w = \frac{v}{r}$

### 2.6. Der Paraboloid

Wir wenden nun die Gleichungen des allgemeinen Rotationskörpers auf den Paraboloiden an.  $f$  ist die Brennweite des Paraboloiden.



Für den Paraboloiden gilt nach Kapitel 1:

$$h(r) = \frac{r^2}{4f} \quad s = h'(r) = \frac{r}{2f}$$

Wir setzen nun die Parabelfunktion in die Formel für die maximale Geschwindigkeit des allgemeinen Rotationskörpers ein.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\delta \cdot \frac{r}{2f} + \mu\right)}{\delta - \frac{\mu r}{2f}}}$$

also folgt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r + 2f\mu)}{2f\delta - \mu r}}$$

Entsprechend erhält man aus der Minimalgeschwindigkeitsformel die minimale Geschwindigkeit für den Paraboloiden:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r - 2f\mu)}{\mu r + 2f\delta}}$$

Aus den allgemeinen Grenzbedingungen  $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$  und  $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$  bekommen wir durch Einsetzung für  $s$ :

$$\frac{r_{max}}{2f} = \frac{\delta}{\mu} \quad \text{also:} \quad r_{max} = 2 \cdot \frac{\delta f}{\mu}$$

und

$$\frac{r_{min}}{2f} = \frac{\mu}{\delta} \quad \text{also:} \quad r_{min} = 2 \cdot \frac{f\mu}{\delta}$$

Bei  $\mu = 0$  folgt aus den Geschwindigkeitsformeln die bekannte Formel für den reibungsfreien Fall (Kapitel 1):

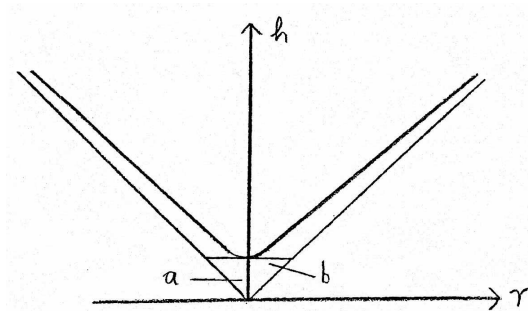
$$v = r \cdot \sqrt{\frac{g}{2f}}$$

Die Gleichung zwischen  $r$  und  $r_m$  bleibt dieselbe wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit =  $w = \frac{v}{r}$

## 2.7. Der Hyperboloid

Unter Beachtung der Abbildung und der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel erhalten wir wie im Kapitel 1:  $a, b =$  Halbachsen



$$h(r) = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + r^2} \quad s = h'(r) = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

Setzen wir nun die Hyperbelgleichung in die Formel für die maximale Geschwindigkeit (allgemeiner Rotationskörper) ein, so bekommen wir:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left( \delta \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}} + \mu \right)}{\delta - \frac{\mu r a}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}}$$

also:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta ar + \mu b \cdot \sqrt{b^2 + r^2})}{\delta b \cdot \sqrt{b^2 + r^2} - \mu ra}}$$

Aus der Formel für die minimale Geschwindigkeit im allgemeinen Rotationskörper kann man analog folgern:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta ar - \mu b \sqrt{b^2 + r^2})}{\mu ar + \delta b \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

wenn  $b \ll r$  so kann man schließen:

$$s = h'(r) = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}} \approx \frac{a}{b}$$

daraus folgt nun für  $b \ll r$ :

$$v_{max} \approx \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta \cdot \frac{a}{b} + \mu)}{\delta - \frac{\mu a}{b}}} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta a + \mu b)}{\delta b - \mu a}}$$

Aus der Formel für die minimalen Geschwindigkeit kann man für  $b \ll r$  analog berechnen:

$$v_{min} \approx \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta a - \mu b)}{\mu a + \delta b}}$$

Setzen wir die Formel für  $s$  in die allgemeinen Grenzbedingungen  $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$  und  $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{r_{max}}{\sqrt{b^2 + r_{max}^2}} = \frac{\delta}{\mu} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{r_{min}}{\sqrt{b^2 + r_{min}^2}} = \frac{\mu}{\delta}$$

Wir formen die erste Gleichung um:

$$a^2 \mu^2 r_{max}^2 = \delta^2 \cdot (b^2 + r_{max}^2) \cdot b^2$$

$$a^2 \mu^2 r_{max}^2 = \delta^2 b^4 + \delta^2 b^2 r_{max}^2$$

$$r_{max}^2 = \frac{\delta^2 b^4}{a^2 \mu^2 - \delta^2 b^2}$$

schließlich:

$$r_{max} = \frac{\delta b^2}{\sqrt{a^2 \mu^2 - \delta^2 b^2}}$$

Aus der Gleichung für  $r_{min}$  kriegen wir durch eine ähnliche Rechnung:

$$r_{min} = \frac{\mu b^2}{\sqrt{a^2 \delta^2 - \mu^2 b^2}}$$

Als Näherung für  $\mu \ll \delta \leq 1$ :

$$r_{min} \approx \frac{\mu b^2}{a \delta} \quad r_{max} \approx b$$



## G. Mechanik

Für  $\mu = 0$  bekommen wir aus den beiden Geschwindigkeitsformeln die von Kapitel 1 bekannte Formel für den reibungsfreien Fall:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{ga}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

Für  $r$  und  $r_m$  gilt dieselbe Beziehung wie im Kapitel 1.

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = w = \frac{v}{r}$$

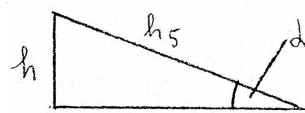
zu \*: Es geht um die Herleitung von Formel (7):

Bezeichnungen:

$$\text{kinetische Energie} = E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\text{potentielle Energie} = E_{pot} = mgh \text{ mit } h = h_s \sin \alpha \text{ siehe Abb.}$$

$$\text{Rotationsenergie} = E_{rot} = \frac{Jw^2}{2} \quad J = \text{Trägheitsmoment}$$



Energiesatz:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} = mgh$$

Wir setzen voraus, daß der Körper nur rollt und nicht gleitet. Dann gilt:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = w = \frac{v}{R} \quad R = \text{Radius des rollenden Körpers}$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = mgh_s \sin \alpha$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh_s \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

Da der rollende Körper mit der konstanten Beschleunigung  $b = g \sin \alpha$  gezogen wird, liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. Für diese Bewegung gilt:  $v^2 = 2h_s \cdot b$  umgeformt zu  $b = \frac{v^2}{2h_s}$ . Nun wird die Gleichung zu  $v$  eingesetzt:

$$b = \frac{2mgh_s \sin \alpha}{2h_s \cdot \left(m + \frac{J}{R^2}\right)} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}$$

Damit haben wir dann die gewünschte Formel.

### 3. Umkehrungen

#### 3.1. Umkehrungen beim reibungslosen Fall

Die Kugelschale:

Wir nehmen die Notation von Kapitel 1.1.

Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{\frac{g}{R_k \cdot \cos \gamma}} \quad \Rightarrow \quad w^2 = \frac{g}{R_k \cdot \cos \gamma}$$

umgeformt nach  $\cos \gamma$ :

$$\cos \gamma = \frac{g}{R_k \cdot w^2}$$

Geschwindigkeitsformel:

$$v^2 = g \cdot R_k \cdot \sin \gamma \cdot \tan \gamma$$

mit

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \quad \sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \quad \tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$$

folgt:

$$v^2 = g R_k \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}}{\cos \gamma} = g R_k \cdot \frac{1 - \cos^2 \gamma}{\cos \gamma}$$

ausmultipliziert:

$$v^2 \cos \gamma = g R_k - g R_k \cos^2 \gamma$$

schließlich erhalten wir eine quadratische Gleichung:

$$\cos^2 \gamma + \frac{v^2}{g R_k} \cdot \cos \gamma - 1 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\cos \gamma = +\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{2gR_k}\right)^2} - \frac{v^2}{2gR_k}$$

Hier ist nur die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen sinnvoll, sonst wird  $\cos \gamma < 0$  und im Bereich  $[0, 90^\circ]$  gibt es dafür keine Lösung.

#### Rotationsellipsoid:

Wir übernehmen die Symbole von Kapitel 1.4. Nun geht es darum  $r$  als Funktion von der Geschwindigkeit  $v$  zu ermitteln. Wir gehen dabei von der Geschwindigkeitsgleichung (3) im Kapitel 1 aus:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{b \cdot g}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}}$$

daraus folgt:

$$\frac{v^2}{r^2} = \frac{bg}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}$$

Umgeformt:

$$\frac{v^4 a^2}{r^4} \cdot (a^2 - r^2) = b^2 \cdot g^2$$

Wir bringen diesen Ausdruck zu einer Polynomgleichung:

$$v^4 a^4 - v^4 a^2 \cdot r^2 = b^2 g^2 \cdot r^4$$

Normierte Form:

$$r^4 + \frac{v^4 a^2}{b^2 g^2} \cdot r^2 - \frac{v^4 a^4}{b^2 g^2} = 0$$

Dieser Ausdruck kann als quadratische Gleichung nach  $r^2$  aufgefaßt werden, also:

$$r^2 = +\sqrt{\frac{v^4 a^4}{b^2 g^2} + \left(\frac{v^4 a^2}{2b^2 g^2}\right)^2} - \frac{v^4 a^2}{2b^2 g^2} \quad (13)$$

Wir leiten jetzt eine Formel für  $r$  in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit  $w$  her. Wir gehen dabei von der Gleichung (4) in Kapitel 1 für die Winkelgeschwindigkeit aus.

$$w^2 = \frac{bg}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}$$

umgeformt:

$$\sqrt{a^2 - r^2} = \frac{bg}{aw^2}$$

Auflösung nach  $r$ :

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 - \left(\frac{bg}{aw^2}\right)^2 \\ r &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{bg}{aw^2}\right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

### Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden:

Es ist auch wieder möglich, die Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden mit dem Kugelradius  $R_k = a = b$  betrachten. Spezialisierung von (13) und (14):

$$\begin{aligned} r(v)^2 &= +\sqrt{\frac{v^4 R_k^2}{g^2} + \left(\frac{v^4}{2g^2}\right)^2} - \frac{v^4}{2g^2} \\ r &= \sqrt{R_k^2 - \left(\frac{g}{w^2}\right)^2} \end{aligned}$$

**Hyperboloid:**

Die Symbole von Kapitel 1.7 werden übernommen. Nun geht es darum den Radius  $r$  aus der Geschwindigkeit  $v$  zu ermitteln, Gleichung (6) von Kapitel 1:

$$v = \sqrt{gr \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}} = r \cdot \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

umgeformt:

$$\frac{v^2}{r^2} = \frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}$$

$$v^4 b^2 \cdot (b^2 + r^2) = a^2 g^2 r^4$$

Ausmultipliziert:

$$v^4 b^4 + v^4 b^2 r^2 = a^2 g^2 r^4$$

Normierte Form:

$$r^4 - \frac{v^4 b^2}{a^2 g^2} \cdot r^2 - \frac{v^4 b^4}{a^2 g^2} = 0$$

Dieser Ausdruck kann als quadratische Gleichung für  $r^2$  behandelt werden.

$$r^2 = +\sqrt{\frac{v^4 b^4}{a^2 g^2} + \left(\frac{v^4 b^2}{2a^2 g^2}\right)^2} + \frac{v^4 b^2}{2a^2 g^2}$$

Ermittlung von  $r$  aus der Winkelgeschwindigkeit  $w$ :

$$w = \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

Umformung:

$$\sqrt{b^2 + r^2} = \frac{ag}{bw^2}$$

nach  $r$  aufgelöst:

$$r = \sqrt{\left(\frac{ag}{bw^2}\right)^2 - b^2}$$

**3.2. Umkehrungen zum Reibungsfall**

Wir übernehmen die Symbole von Kapitel 2.1 - 2.7. Lösen wir die Formeln für die maximale Geschwindigkeit nach den Radius  $r$  oder den Höhenwinkel  $\gamma$  auf, so bekommen wir Formeln für  $r_{min}$  bzw.  $\gamma_{min}$ . Eine Auflösung der minimalen Geschwindigkeitsformeln nach  $r$  oder  $\gamma$  führt dagegen zu einen Ausdruck für  $r_{max}$  und  $\gamma_{max}$ . Beim Rotationskegel erhalten wir:

$$r_{min} = \frac{(\delta \tan \alpha - \mu) \cdot v^2}{g \cdot (\delta + \tan \alpha \cdot \mu)} \quad r_{max} = \frac{(\mu + \delta \tan \alpha) \cdot v^2}{g \cdot (\delta - \mu \tan \alpha)}$$

Bei dem Paraboloiden ist die Auflösung nach  $r$  etwas komplizierter. Sie führt über eine quadratische Gleichung für  $r$  zu den folgenden Ausdrücken:

$$r_{min} = +\sqrt{\left(\frac{2f\mu g + \mu v^2}{2\delta g}\right)^2 + \frac{2fv^2}{g}} - \frac{2f\mu g + \mu v^2}{2\delta g}$$

$$r_{max} = +\sqrt{\left(\frac{2f\mu g + \mu v^2}{2g\delta}\right)^2 + \frac{2fv^2}{g}} + \frac{2f\mu g + \mu v^2}{2g\delta}$$

Die positive Wurzel ist bei beiden Formeln zu nehmen, da sonst die Lösungen negativ werden.

Auch beim Ellipsoiden und beim Hyperboloiden können solche Auflösungen nach  $r$  durchgeführt werden. Man kommt dann zu Polynomen 4. Grades in  $r$ , die mit großen Aufwand noch exakt gelöst werden können. Die Auflösung der Geschwindigkeitsformel von der Kugel mit Höhenwinkel  $\gamma$  nach  $\gamma$  führt zu einem Polynom 4. Grades in  $\tan \gamma$ .

Die Formeln für Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten bei Bahnen auf Rotationskörperschalen können auch als Funktion von  $h$  (beim Ellipsoiden auch durch den Höhenwinkel  $\gamma$ ) berechnet werden. Bei allen speziellen Rotationskörpern kann  $r = f(h)$  eingesetzt werden. Beim allgemeinen Rotationskörper muß der Fall mit  $h$  nochmals hergeleitet werden. (Von diesen ist evt. ebenfalls die Entwicklung der speziellen Formeln möglich.) Für die Einsetzungen von  $v, w = f(r)$  zu  $v, w = f(h)$  gelten:

$$x = r, y = h$$

$$\text{für Ellipsoiden: } \frac{r^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1 \quad (a \leq b) \text{ oder } (a \geq b)$$

$$\text{für Kugeln: } r^2 + h^2 = R_K^2$$

$$\text{für Hyperboloiden: } \frac{h^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$$

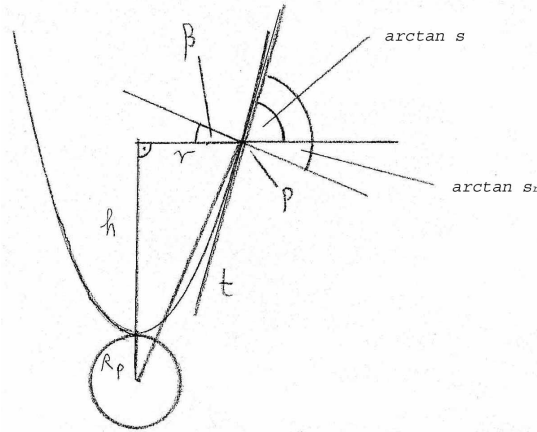
$$\text{für Paraboloiden: } r^2 = 4hf$$

$$\text{für Rotationskegel: } h = r \cdot \tan \alpha$$

## 4. Stabile Kugelbahnen auf Makrorotationskörpern im reibungslosen Fall

### 4.1. Der allgemeine Rotationskörper

Ein Planet steht still oder führt eine gleichförmige Bewegung im sonst materiefreien Raum aus. Der Planet wird als Kugel angesehen. Senkrecht zur Kugeloberfläche steht die Achse des allgemeinen Rotationskörpers. Der Planet soll überhaupt nicht rotieren.



$R_p$  = Radius des Planeten

$g$  = Gravitationsbeschleunigung in  $P$

$m_p$  = Masse des Planeten

$G$  = Gravitationskonstante

$v$  = Geschwindigkeit

$m$  = Masse der Kugel

$t$  = Tangente

$h(r)$  = Rotationskörperfunktion

$s = h'(r)$

$h(r)$  muß so sein, daß es mit der Kugel immer nur **ein** Berührungspunkt gibt.

$$g = \frac{Gm_p}{(h + R_p)^2 + r^2}$$

Zentrifugalkraft =  $Z = \frac{mv^2}{r}$

Nun muß  $s_r$  berechnet werden. Es gilt  $s_r = f(s, h, r)$ .

$$\beta = 90^\circ - \arctan \frac{h + R_p}{r}$$

Wir haben für  $s_r$ :

$$\arctan s_r = \arctan s + \beta = \arctan s + 90^\circ - \arctan \frac{h + R_p}{r}$$

wegen  $\tan(90^\circ - a) = \frac{1}{\tan a}$  daraus folgt:

$$\arctan s + \arctan \frac{r}{h + R_p} = \arctan s_r$$

Damit kann eine einfache Beziehung mit Hilfe des Additionstheorem des Tangens gefunden werden.

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

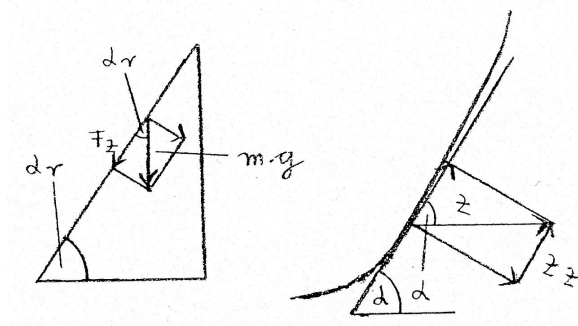
damit bekommt man:

$$s_r = \frac{s + \frac{r}{h+R_p}}{1 - \frac{sr}{h+R_p}} = \frac{r + s \cdot (h + R_p)}{h + R_p - sr}$$

Bei  $h, r \ll R_p$  ist  $s_r \approx s$ .

Bedingung für Bahnen:  $s_r > 0$  ist gleichwertig zu  $0 < r + s \cdot (h + R_p)$  und  $h + R_p - sr > 0$ .  
 $s_r < 0$  ist hier nicht möglich. Aus den beiden Bedingungen folgen:

$$s > \frac{-r}{h + R_p} \quad \text{und} \quad \frac{h + R_p}{r} > s$$



$F_z$  = Fallkraftkomponente     $Z_z$  = Zentrifugalkraftkomponente

$$F_z = mg \cdot \sin \alpha_r \quad Z_z = Z \cdot \cos \alpha$$

$$\tan \alpha_r = s_r \quad \tan \alpha = s \quad \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}}$$

$$\sin \alpha_r = \frac{s_r}{\sqrt{1 + s_r^2}}$$

das führt zu:

$$F_z = \frac{mgs_r}{\sqrt{1 + s_r^2}}$$

Zentrifugalkraft =  $Z = \frac{mv^2}{r}$  wir erhalten:

$$Z_z = \frac{mv^2}{r \cdot \sqrt{1 + s^2}}$$

Für die Kreisbahn muß  $Z_z = F_z$  sein, also:

$$\frac{mgs_r}{\sqrt{1 + s_r^2}} = \frac{mv^2}{r \cdot \sqrt{1 + s^2}}$$

schließlich folgt:

$$v = \sqrt{gr s_r \cdot \sqrt{\frac{1 + s^2}{1 + s_r^2}}}$$

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{gs_r}{r} \cdot \sqrt{\frac{1 + s^2}{1 + s_r^2}}}$$

Die Beziehung zwischen  $r$  und  $r_m$  bleibt dieselbe.

In die allgemeinen Gleichungen können in  $s$  die Formeln für  $s$  bei Rotationskegel, Ellipsoid, Kugel, Paraboloid, Hyperboloid eingesetzt werden. Man erhält dann die zugehörigen Gleichungen für den Makrotyp im reibungslosen Fall.

#### 4.2. Die Makrokugel mit Höhenwinkel

Wir kommen nun zur Makrokugelschale:

$R_p$  = Planetenradius

$m_p$  = Masse des Planeten

$R_K$  = Radius der Makrokugel

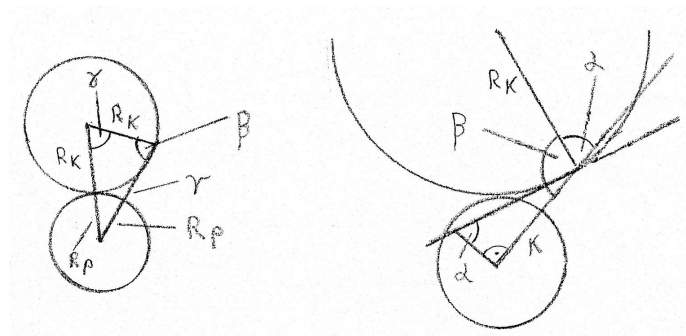
$m$  = Masse der Kugel

$\gamma$  = Höhenwinkel

$\alpha$  = Neigungswinkel zur Gravitation

$K$  = Gravitationskraft

$G$  = Gravitationskonstante



Kosinussatz:

$$r^2 = (R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_K + R_p) \cdot \cos \gamma$$

Beim reibungslosen Fall im homogenen Feld wurde  $\alpha = \gamma$  gezeigt. Im Gravitationsfeld ist die Beziehung  $\alpha = f(\gamma)$  etwas komplizierter ebenso wie die Gravitationsbeschleunigung  $g$ :

$$g = \frac{Gm_p}{r^2} = \frac{Gm_p}{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_p + R_K) \cdot \cos \gamma} \quad (15)$$

noch einmal Kosinussatz:

$$(R_K + R_p)^2 = r^2 + R_K^2 - 2rR_K \cos \beta$$

umgeformt und für  $r$  eingesetzt:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{r^2 + R_K^2 - (R_K + R_p)^2}{2rR_K} \\ &= \frac{R_K - (R_K + R_p) \cdot \cos \gamma}{\sqrt{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_K + R_p) \cdot \cos \gamma}} \end{aligned}$$



nach der Abbildung ist:

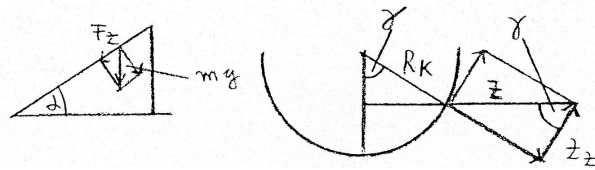
$$\beta = 180^\circ - \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

daraus folgt:

$$\cos \alpha = \frac{(R_K + R_p) \cdot \cos \gamma - R_K}{\sqrt{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_p + R_K) \cdot \cos \gamma}} \quad (16)$$

$F_z$  = Fallkraftkomponente

$Z_z$  = Zentrifugalkraftkomponente



$$F_z = mg \sin \alpha \quad Z_z = Z \cdot \cos \gamma$$

$$Z = \frac{mv^2}{R_K \cdot \sin \gamma}$$

mit  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  erhalten wir:

$$Z_z = \frac{mv^2}{R_K \cdot \tan \gamma}$$

Für eine Kreisbahn in der Makrokugelschale muß  $F_z = Z_z$  sein, also:

$$mg \sin \alpha = \frac{mv^2}{R_K \cdot \tan \gamma}$$

es folgt:

$$v = \sqrt{gR_K \sin \alpha \tan \gamma} \quad (17)$$

$w$  = Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{v}{R_K \cdot \sin \gamma} = \sqrt{\frac{gR_K \sin \alpha \tan \gamma}{R_K^2 \cdot \sin^2 \gamma}} = \sqrt{\frac{g \sin \alpha \sin \gamma}{R_K \sin^2 \gamma \cos \gamma}}$$

schließlich:

$$w = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{R_K \sin \gamma \cos \gamma}} \quad (18)$$

In (17) und (18) sind für  $g$  und  $\alpha$  (15) bzw. (16) einzusetzen. Die Gleichung zwischen  $r$  und  $r_m$  bleibt unverändert. Die Verallgemeinerung a) am Ende von Kapitel 1 gilt sinngemäß auch für die Makrorotationskörper.

## 5. Stabile Bahnen auf Makrorotationskörpern mit Reibung

### 5.1. Der allgemeine Makrorotationskörper mit Reibung

Die Symbole werden vom reibungslosen Makrofall (Kapitel 4.1) übernommen.

$R_p$  = Radius des Planeten

$g$  = Gravitationsbeschleunigung in  $P$

$m_p$  = Masse des Planeten

$G$  = Gravitationskonstante

$v$  = Geschwindigkeit

$m$  = Masse der Kugel

$h(r)$  = Rotationskörperfunktion

$s = h'(r)$

$h(r)$  muß so sein, daß es mit der Kugel immer nur **ein** Berührungspunkt gibt.

$$g = \frac{Gm_p}{(h + R_p)^2 + r^2}$$

Nach Kapitel 4.1 gilt:

$$F_z = \frac{mgs_r\delta}{\sqrt{1+s_r^2}} \quad Z_z = \frac{mv^2\delta}{r \cdot \sqrt{1+s^2}}$$

$\delta$  kommt aufgrund des Reibungsfalls noch hinzu. (Erklärung folgt später)

$F_R$  = Reibungskraft durch die Schwerkraft

$Z_R$  = Reibungskraft durch die Zentrifugalkraft

vgl. die Abbildungen in Kap. 4.1

$$F_R = mg \cos \alpha_r \cdot \mu$$

$$Z_R = Z \sin \alpha \cdot \mu \quad Z = \frac{mv^2}{r}$$

$\mu$  ist ein allgemeiner Reibungskoeffizient. Er ist erklärt durch:

$$\mu = \begin{cases} \frac{\mu'}{R} & \text{falls } \mu_H > \frac{\mu'}{R} \text{ (Rollen)} \\ \mu_G & \text{falls } \frac{\mu'}{R} > \mu_H \text{ (Gleiten)} \\ \mu_G \text{ oder } \frac{\mu'}{R} & \text{falls } \mu_H = \frac{\mu'}{R} \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \end{cases}$$

und

$$\delta := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls } \frac{\mu'}{R} < \mu_H \text{ (Rollen)} \\ 1 & \text{falls } \mu_H < \frac{\mu'}{R} \text{ (Gleiten)} \\ \frac{5}{7} \text{ oder } 1 & \text{falls } \frac{\mu'}{R} = \mu_H \neq 0 \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \\ 1 & \text{falls } 0 = \frac{\mu'}{R} = \mu_H \text{ (reibungsfrei)} \end{cases}$$

vgl dazu Assmann [1] Band 1 Kapitel 11.10 S. 265

Dabei ist:

$\mu_G$  = Gleitreibungskoeffizient

$\mu_H$  = Haftreibungskoeffizient

$\mu'$  = Rollreibungskoeffizient

$R$  = Radius der Kugel, die sich auf der Rotationskörperschale befindet. Zur Begründung von  $\delta$  und  $\mu$  vgl. Kapitel 2 am Anfang.

Nach Kapitel 4.1 ist:  $\tan \alpha_r = s_r$  und  $\tan \alpha = s$  daher:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

daraus folgt:

$$F_R = \frac{mg\mu}{\sqrt{1 + s_r^2}} \quad Z_R = \frac{mv^2\mu s}{r \cdot \sqrt{1 + s^2}}$$

Stabilitätsungleichung:  $|\cdot|$  = reeller Betrag

$$|F_z - Z_z| \leq F_R + Z_R$$

Grenzfälle:

$$Z_z - F_z = F_R + Z_R \quad (19)$$

$$F_z - Z_z = F_R + Z_R \quad (20)$$

aus (1) folgt:

$$\frac{mv_{max}^2 \cdot \delta}{r \cdot \sqrt{1 + s^2}} - \frac{mgs_r \cdot \delta}{\sqrt{1 + s_r^2}} = \frac{mg\mu}{\sqrt{1 + s_r^2}} + \frac{mv_{max}^2 \cdot \mu s}{r \cdot \sqrt{1 + s^2}}$$

vereinfacht:

$$\frac{v_{max}^2}{r \cdot \sqrt{1 + s^2}} \cdot (\delta - \mu s) = \frac{g}{\sqrt{1 + s_r^2}} \cdot (\mu + s_r \cdot \delta)$$

umgeformt:

$$v_{max}^2 = rg \cdot \sqrt{\frac{1 + s^2}{1 + s_r^2}} \cdot \frac{\mu + s_r \cdot \delta}{\delta - \mu \cdot s}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{rg \cdot \sqrt{\frac{1 + s^2}{1 + s_r^2}} \cdot \frac{\mu + s_r \cdot \delta}{\delta - \mu s}} \quad (21)$$

Auf ähnliche Weise bekommt man aus (20) einen Ausdruck für die minimale Geschwindigkeit:

$$v_{min} = \sqrt{rg \cdot \sqrt{\frac{1 + s^2}{1 + s_r^2}} \cdot \frac{s_r \delta - \mu}{\mu s + \delta}} \quad (22)$$

Bei  $r \ll R_p$  ist  $s_r \approx s$  vgl. Kapitel 4.1. Damit gehen in diesem Fall die Gleichungen (21) und (22) in die entsprechenden Formeln des homogenen Feldes (Kapitel 2.2) über.

Bei  $\mu = 0$  erhält man aus (21) und (22) die Formel für den reibungsfreien Fall (Kapitel 4.1).

$v_{max} = \infty$  wenn  $\delta - \mu s = 0$  siehe Gleichung (21) daraus folgt:

$$s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$$

$v_{min} = 0$  wenn  $s_r \cdot \delta - \mu = 0$  siehe Gleichung (22)

$$\Rightarrow s_{r\ min} = \frac{\mu}{\delta}$$

In Kapitel 4.1 wurde hergeleitet:

$$s_r = \frac{r + s \cdot (h + R_p)}{h + R_p - sr}$$

$s_r$  nimmt mit  $s$  zu, wenn  $h + R_p - s \cdot r > 0$  ist, daher gibt es auch ein  $s_{min}$ . Wir formen nach  $s$  um:

$$s_r \cdot h + s_r \cdot R_p - sr \cdot s_r = r + sh + sR_p$$

Auflösung nach  $s$ :

$$s_r \cdot h + s_r \cdot R_p - r = s \cdot (r \cdot s_r + h + R_p)$$

$$\Rightarrow s = \frac{s_r \cdot (h + R_p) - r}{s_r \cdot r + h + R_p}$$

Einsetzung für  $s_{r\ min}$ :

$$s_{min} = \frac{\frac{\mu}{\delta} \cdot (h + R_p) - r}{\frac{\mu}{\delta} \cdot r + h + R_p}$$

Die Beziehungen von  $r$  und  $r_m$  und zur Winkelgeschwindigkeit  $w$  bleiben dieselben.

In den allgemeinen Gleichungen können in  $s$  die Formeln für  $s$  bei Rotationskegel, Rotationsellipsoid, Kugel, Paraboloid, Hyperboloid eingesetzt werden. Man erhält dann die zugehörigen Gleichungen für den Makrotyp.

## 5.2. Stabile Bahnen auf Makrokugelschalen mit Höhenwinkel (Reibungsfall)

Symbole werden von Kapitel 4.2 (Makrokugel reibungsloser Fall) übernommen.

$R_p$  = Planetenradius

$m_p$  = Masse des Planeten

$R_K$  = Radius der Makrokugel

$m$  = Masse der Kugel

$\gamma$  = Höhenwinkel

$\alpha$  = Neigungswinkel zur Gravitation

$K$  = Gravitationskraft

$G$  = Gravitationskonstante

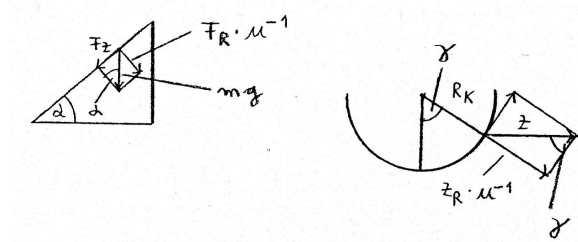
Nach Kapitel 4.2 gilt:

$$F_z = mg\delta \sin \alpha \quad Z_z = \frac{mv^2\delta}{R_K \cdot \tan \gamma}$$

$\delta$  kommt aufgrund des Reibungsfalls noch dazu.  $\delta$  ist im Kapitel 2 und im Kapitel 5.1 erklärt.

$F_R$  = Reibungskraft durch die Schwerkraft

$Z_R$  = Reibungskraft durch die Zentrifugalkraft



Aus Kapitel 4.2 bekommen wir auch: (Zu  $\mu$  siehe Kap. 2 oder Kap. 5.1)

$$F_R = mg \cos \alpha \cdot \mu \quad Z_R = Z \sin \gamma \cdot \mu$$

mit

$$Z = \frac{mv^2}{R_K \cdot \sin \gamma}$$

Stabilitätsungleichung:

$$|F_z - Z_z| \leq F_R + Z_R$$

Grenzfälle:

$$Z_z - F_z = F_R + Z_R \quad (23)$$

$$F_z - Z_z = F_R + Z_R \quad (24)$$

aus (23) folgt:

$$\frac{mv_{max}^2 \cdot \delta}{R_K \tan \gamma} - \delta \sin \alpha \cdot mg = mg \cos \alpha \cdot \mu + \frac{mv_{max}^2 \cdot \mu}{R_K}$$

vereinfacht:

$$\frac{v_{max}^2}{R_K} \cdot \left( \frac{\delta}{\tan \gamma} - \mu \right) = g \cdot (\cos \alpha \cdot \mu + \sin \alpha \cdot \delta)$$

nach  $v_{max}$  umgeformt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{gR_K \cdot (\cos \alpha \cdot \mu + \sin \alpha \cdot \delta)}{\frac{\delta}{\tan \gamma} - \mu}} \quad (25)$$

analog bekommt man aus (24) folgenden Ausdruck:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{gR_K \cdot (\sin \alpha \cdot \delta - \cos \alpha \cdot \mu)}{\mu + \frac{\delta}{\tan \gamma}}} \quad (26)$$

Im homogenen Fall wenn  $R_K \ll R_p$  ist  $\alpha \approx \gamma$ . Damit bekommen wir:

$$v_{max} \approx \sqrt{\frac{gR_K \cdot (\cos \gamma \cdot \mu + \sin \gamma \cdot \delta)}{\frac{\delta}{\tan \gamma} - \mu}}$$

mit  $\sin \gamma = \cos \gamma \cdot \tan \gamma$

$$v_{max} \approx \sqrt{\frac{gR_K \sin \gamma \cdot (\mu + \tan \gamma \cdot \delta)}{\delta - \mu \tan \gamma}}$$

Genauso kann man im homogenen Fall (26) betrachten unter der Verwendung von  $\sin \gamma = \cos \gamma \tan \gamma$ , es folgt:

$$v_{min} \approx \sqrt{\frac{gR_K \sin \gamma \cdot (\tan \gamma \cdot \delta - \mu)}{\mu \tan \gamma + \delta}}$$

Es handeln sich um die entsprechenden Formeln, die im Kapitel 2.1 hergeleitet wurden. (homogener Fall) Für  $\mu = 0$  folgt aus (25) und (26):

$$v = \sqrt{gR_K \sin \alpha \tan \gamma}$$

Das ist die Formel (3) für den reibungslosen Fall in Kapitel 4.

$v_{max} = \infty$  wenn  $\frac{\delta}{\tan \gamma} - \mu = 0$  siehe Gl. (25) also:

$$\tan \gamma_{max} = \frac{\delta}{\mu}$$

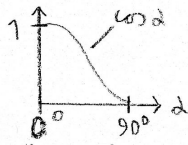
$v_{min} = 0$  wenn  $\sin \alpha \cdot \delta - \cos \alpha \cdot \mu = 0$  nach Gl. (26) also folgt mit  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ :

$$\tan \alpha_{min} = \frac{\mu}{\delta}$$

nach Kapitel 4 Gleichung (16) ist:

$$\cos \alpha = \frac{(R_K + R_p) \cdot \cos \gamma - R_K}{\sqrt{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_p + R_K) \cdot \cos \gamma}}$$

$\cos \alpha$  wird kleiner, wenn  $\gamma$  wächst.



Also wird  $\alpha$  größer, wenn  $\gamma$  wächst. Daher gibt es auch ein  $\gamma_{min}$ . Zur Abkürzung führen wir bestimmte Symbole ein:

$$\cos \alpha = \frac{A \cos \gamma - R_K}{\sqrt{B - C \cos \gamma}}$$

mit

$$A := R_p + R_K \quad B := (R_K + R_p)^2 + R_K^2 \quad C := 2R_K \cdot (R_p + R_K)$$

Wir formen jetzt nach  $\cos \gamma$  um:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha \cdot (B - C \cos \gamma) &= (A \cos \gamma - R_K)^2 \\ \cos^2 \alpha \cdot B - R_K^2 &= A^2 \cos^2 \gamma + (C \cos^2 \alpha - 2AR_K) \cdot \cos \gamma \\ \frac{B \cos^2 \alpha - R_K^2}{A^2} &= \cos^2 \gamma + \frac{\cos^2 \alpha \cdot C - 2AR_K}{A^2} \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

schließlich folgt:

$$\cos \gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{B \cos^2 \alpha - R_K^2}{A^2} + \frac{(C \cos^2 \alpha - 2AR_K)^2}{4A^4}} - \frac{C \cos^2 \alpha - 2AR_K}{2A^2}$$

Zusatzbedingung:  $\cos \gamma \geq 0 \quad (0 \leq \gamma \leq 90^\circ)$

Mit dieser Formel kann man  $\gamma_{min}$  aus  $\alpha_{min}$  bestimmen. Die Gleichungen zwischen  $r$  und  $r_m$  sowie der Winkelgeschwindigkeit  $w$  ändern sich nicht.

## Literatur

- [1] Bruno Assmann „Technische Mechanik“ Band 1 Oldenbourg Verlag 12.Auflage München 1991
- [2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980
- [3] Otto Forster „Analysis 1“ 4.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig
- [4] Otto Forster „Analysis 2“ 5.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig
- [5] Arnold Sommerfeld „Mechanik“ Band 1 Verlag Harri Deutsch 8.Auflage Frankfurt am Main 1977

## 31. Wurfbahnen von Kugeln auf der schiefen Ebene

### 1. Der reibungsfreie Fall

Wurfbahnen sind aus dem Alltag bekannte Erscheinungen. Man kann sich dabei an das Werfen bei Sportveranstaltungen erinnern, mit dem Ziel eine maximale Wurfweite zu erzielen. Oder man kann an Kanonenkugeln denken, die nach dem Abschuss eine Wurfbahn beschreiben.

Wir kennen aus der Mechanik Wurfbahnen. Wurfbahnen sind bestimmt durch den Wurfwinkel und der Anfangsgeschwindigkeit. Das gilt für eine Wurfbahn im Vakuum wie auch im Medium z.B. Luft. Man kann solche Wurfbahnen auch auf der schiefen Ebene betrachten. Wir werden dabei sehen, daß der schiefe Wurf im homogenen Feld ein Spezialfall des Wurfes auf der schiefen Ebene ist. Auch hier ist die Wurfbahn durch Wurfwinkel und Anfangsgeschwindigkeit festgelegt.

Wir behandeln zuerst den reibungslosen Fall. Dann ist es auch leichter den Reibungsfall (Kapitel 2) zu verstehen. Im reibungslosen Fall **gleitet** eine Kugel auf der schiefen Ebene.

$a$  = Neigungswinkel der schiefen Ebene

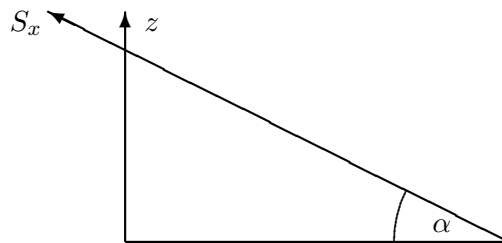
$\beta$  = Wurfwinkel auf der schiefen Ebene  $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$

$s$  = Strecke

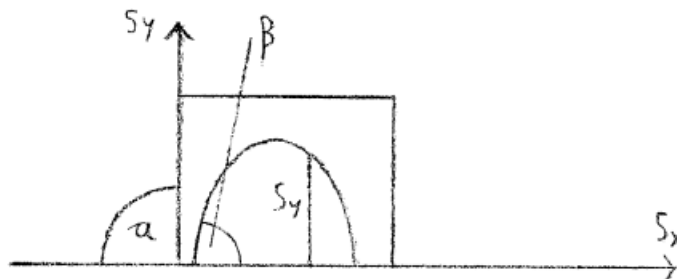
$v$  = Geschwindigkeit

$v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit

$t$  = Zeit



Auf der schiefen Ebene liegt die Fallbeschleunigung  $g \cdot \sin a$  vor.



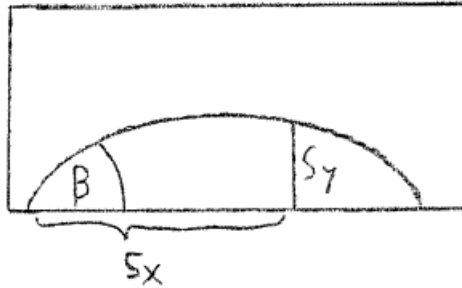
Ansatz:

$$s_y = \sin \beta \cdot v_0 t - \frac{1}{2} \cdot g \sin a \cdot t^2 \quad (1)$$



$$v_y = \frac{ds_y}{dt} = \sin \beta \cdot v_0 - g \sin a \cdot t \quad (2)$$

$$s_x = \cos \beta \cdot v_0 t \quad (3)$$



Gleichung (2) gleich Null gesetzt und nach  $t$  aufgelöst ergibt die Steigzeit  $t_s$  für  $\beta > 0$ :

$$0 = v_y = \sin \beta \cdot v_0 - g \sin a \cdot t_s$$

daraus folgt:

$$t_s = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin a}$$

$t_s$  in (1) eingesetzt ergibt die maximale Wurfhöhe für  $\beta > 0$ :

$$h_{max} = s_y(t_s) = \frac{\sin \beta \cdot v_0^2 \sin \beta}{g \sin a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{g \sin a \cdot v_0^2 \sin^2 \beta}{g^2 \cdot \sin^2 a} = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{g \sin a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{g \sin a}$$

also

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g \sin a}$$

Gleichung (1) Null gesetzt und nach  $t$  aufgelöst ergibt die Wurfzeit  $t_w$  für  $\beta > 0$ :

$$0 = s_y = \sin \beta \cdot v_0 t_w - \frac{1}{2} \cdot g \sin a \cdot t_w^2$$

Umformung:

$$t_w = 2 \cdot \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin a}$$

Das bedeutet  $t_w = 2 \cdot t_s$ .

$t_w$  in Gleichung (3) eingesetzt ergibt die Wurfweite  $w$  für  $\beta > 0$ :

$$w = s_x(t_w) = \cos \beta \cdot v_0 t_w = \frac{\cos \beta \cdot v_0 \cdot 2v_0 \sin \beta}{g \sin a} = 2 \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin a}$$

schließlich erhalten wir:

$$w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin(2\beta)}{\sin a}$$

wegen  $\sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta$

Gleichung (3) nach  $t$  aufgelöst:

$$t = \frac{s_x}{\cos \beta \cdot v_0}$$

und in (1) eingesetzt, ergibt die Wurfbahngleichung:

$$s_y = \frac{\sin \beta \cdot v_0 s_x}{v_0 \cos \beta} - \frac{g \sin a \cdot s_x^2}{2 \cos^2 \beta \cdot v_0^2}$$

mit  $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \beta$

$$s_y = s_x \cdot \tan \beta - \frac{1}{2} \cdot s_x^2 \cdot \frac{g}{v_0^2} \cdot \frac{\sin a}{\cos^2 \beta}$$

Es ergibt sich eine Parabel.

## 2. Der Reibungsfall

Wir berücksichtigen jetzt die Reibung mit. Diese Betrachtung gilt jedoch nur für kleine Relativgeschwindigkeiten.

$s$  = Strecke

$v$  = Geschwindigkeit

$b$  = Beschleunigung

$v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit

$a$  = Neigungswinkel der schiefen Ebene

$\beta$  = Wurfwinkel auf der schiefen Ebene  $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$

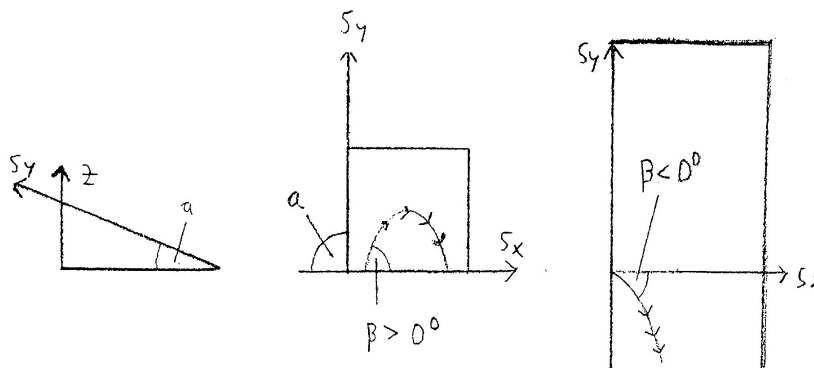
$\mu = \frac{\mu'}{R}$  ist die Rollreibung mit dem Rollreibungskoeffizienten  $\mu'$  und dem Radius der Kugel  $R$ . (vgl. Assmann [1] Kapitel 11.10 S.265)

$\mu_H$  = Haftreibungskoeffizient

$$\delta := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls } \mu' > 0 \quad (\text{Rollen}) \\ 1 & \text{falls } \mu' = 0 \quad (\text{reibungsfrei}) \end{cases}$$

für die Kugel vgl Budo [2] §57 S.302 Gl (6) - (8)

$t$  = Zeit



allgemein gilt:  $z = s_y \cdot \sin a$

Die Beschleunigung  $b$  auf der schiefen Ebene ist:

$b = \delta g \cdot \sin a$ , die Geschwindigkeit  $v$  und die zurückgelegte Strecke  $s$  ergeben sich dann als  $v = \delta g \sin a \cdot t$  und  $s = \frac{1}{2} \cdot \delta g \cdot t^2 \cdot \sin a$ .

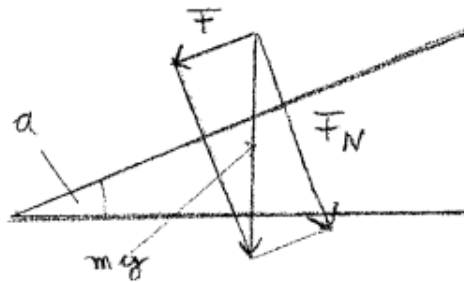
Rollt eine Kugel auf der schiefen Ebene, so ist  $\delta = \frac{5}{7}$  dieses folgt zum Beispiel aus Budo [2] §57 S.302 Gl. (8). Das Trägheitsmoment  $J$  einer Kugel ist  $J = \frac{2}{5} \cdot mR^2$ . Die allgemeine Formel für das Abrollen auf der schiefen Ebene lautet:

$$b = \frac{mg \sin a}{m + \frac{J}{R^2}} \quad (4)$$

Eine Herleitung befindet sich bei \* am Ende des Kapitels oder man kann das mit Budo [2] §57 S.302 Gl. (5)-(7) sehen. Das Trägheitsmoment der Kugel eingesetzt ergibt:

$$b = \frac{mg \sin a}{m + \frac{2}{5} \cdot m} = \frac{5}{7} \cdot g \sin a \quad (5)$$

Damit erhalten wir im Fall des Rollens  $\delta = \frac{5}{7}$ .



Für die Kräfte bekommen wir (vgl. Abb.):

$$F = mg \sin a \quad F_N = mg \cos a$$

Reibungskraft:

$$F_R = \mu \cdot F_N = mg\mu \cos a$$

Im Reibungsfall ist:

$$F = mg \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a) \quad b = g \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a) \quad (6)$$

$$v = gt \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a) \quad s = \frac{1}{2} \cdot gt^2 (\delta \sin a - \mu \cos a)$$

Ansatz:

$$v_y = \sin \beta \cdot (v_0 - \mu \cos a \cdot gt) - g \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a) \cdot t \quad (7)$$

$$s_y(t) = \int_0^t v_y(\tau) d\tau = \sin \beta \cdot (v_0 t - \mu \cos a \cdot g \cdot \frac{t^2}{2}) - \frac{g}{2} \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a) \cdot t^2 \quad (8)$$

$$b_y(t) = \frac{d}{dt} v_y(t) = -\mu \cos a \cdot g \sin \beta - g \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a)$$

Für die Horizontalkomponente erhalten wir:

$$v_x = \cos \beta \cdot (v_0 - \mu \cos a \cdot gt)$$

$$s_x(t) = \int_0^t v_x(\tau) d\tau$$

es folgt:

$$s_x = \cos \beta \cdot (v_0 t - \frac{\mu}{2} \cdot \cos a \cdot gt^2) \quad (9)$$

Gleichung (7) gleich Null gesetzt und nach  $t$  aufgelöst ergibt die Steigzeit  $t_s$  für  $\beta > 0$ .

$$0 = v_y = \sin \beta \cdot v_0 - \sin \beta \cdot \mu \cos a \cdot gt_s - g\delta \sin a \cdot t_s + g\mu \cos a \cdot t_s$$

Umformung:

$$t_s = \frac{\sin \beta \cdot v_0}{\sin \beta \cdot \mu \cos a \cdot g + g\delta \sin a - g\mu \cos a}$$

schließlich:

$$t_s = \frac{\sin \beta \cdot v_0}{\mu \cos a \cdot g \cdot (\sin \beta - 1) + g\delta \sin a}$$

Setzt man  $t_s$  für  $t$  in (8) ein, so erhält man die Steighöhe  $h_{max} := s_y(t_s)$ .

Gleichung (8) gleich Null gesetzt und nach  $t$  aufgelöst, führt zur Wurfzeit  $t_w$  für  $\beta > 0$ .

$$0 = s_y = \sin \beta \cdot v_0 t_w - \mu \cos a \cdot g \cdot \frac{t_w^2}{2} \cdot \sin \beta - \frac{g}{2} \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a) \cdot t_w^2$$

Auflösung:

$$t_w = \frac{2 \cdot \sin \beta \cdot v_0}{\mu \cos a \cdot g \sin \beta + g \cdot (\delta \sin a - \mu \cos a)} = 2 \cdot t_s$$

$t_w$  für  $t$  eingesetzt in (9) ergibt die Wurfweite  $w = s_x(t_w)$  für  $\beta > 0$ . Es ist dann  $s_y(t_w) = 0$ .

Bei  $\delta \sin a - \mu \cos a \leq 0$  tritt der freie Fall nicht in Erscheinung.

$$\Leftrightarrow \delta \sin a \leq \mu \cos a$$

$$\Leftrightarrow \tan a \leq \frac{\mu}{\delta} \quad \text{wegen} \quad \tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

In diesen Fall lautet:

$$v_y = \sin \beta \cdot (v_0 - \mu \cos a \cdot gt) \quad (10)$$

$$s_y(t) = \int_0^t v_y(\tau) d\tau = \sin \beta \cdot \left( v_0 t - \mu \cos a \cdot g \cdot \frac{t^2}{2} \right) \quad (11)$$

Gleichung (10) gleich Null gesetzt und nach  $t$  aufgelöst ergibt die Zeit  $t_E$ . Nach dieser Zeit hört die Bewegung auf.

$$0 = \sin \beta \cdot (v_0 - \mu \cos a \cdot gt_E)$$

umgeformt:

$$t_E = \frac{v_0}{\mu \cos a \cdot g}$$

$t_E$  für  $t$  in (11) eingesetzt, ergibt die Endhöhe  $h_E$ :

$$\begin{aligned} h_E = s_y(t_E) &= \sin \beta \cdot \left( v_0 \cdot \frac{v_0}{\mu \cos a \cdot g} - \frac{1}{2} \cdot \mu \cos a \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{\mu^2 \cos^2 a \cdot g^2} \right) \\ &= \frac{\sin \beta \cdot v_0^2}{\mu \cos a \cdot g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin \beta}{\mu \cos a \cdot g} \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$h_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \beta \cdot v_0^2}{\mu \cos a \cdot g}$$

Bei  $\beta \leq 0$  gibt es  $t_s$  und  $t_w$  nicht.

Erheblich schwieriger dürfte die Behandlung mit Berücksichtigung eines Mediums (Gas, Flüssigkeit) sein.

Zum Gültigkeitsbereich dieser Gleichungen sind noch einige Bemerkungen zu machen:

Die Gleitreibung muß ausgeschlossen werden nach Budo [2] §57 S.302 Gleichung (10) muß bei der Kugel gelten  $\tan a \leq \frac{7}{2} \cdot \mu_H$ . Das heißt nur bei kleinen Neigungswinkel kann die Gleitreibung ausgeschaltet werden. Das gilt außerdem nur bei kleiner Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und Unterlage. Schließlich muß sowohl die Kugel und die schiefe Ebene elastisch sein. Das ist für Stahlkugeln mit Stahlunterlage erfüllt.

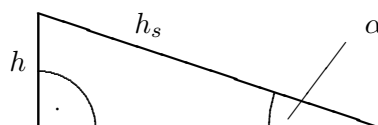
zu \*: Es geht um die Herleitung von Formel (4):

Bezeichnungen:

$$\text{kinetische Energie} = E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\text{potentielle Energie} = E_{pot} = mgh \text{ mit } h = h_s \sin a \text{ vgl. Abb.}$$

$$\text{Rotationsenergie} = E_{rot} = \frac{Jw^2}{2} \quad J = \text{Trägheitsmoment}$$



Energiesatz:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} = mgh$$

Wir setzen voraus, daß der Körper nur rollt und nicht gleitet. Dann gilt:

Winkelgeschwindigkeit =  $w = \frac{v}{R}$   $R =$  Radius des rollenden Körpers

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = mgh_s \sin a$$

Durch Umformung:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh_s \sin a}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

Da der rollende Körper mit der konstanten Beschleunigung  $b = g \sin a$  gezogen wird, liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. Für diese Bewegung gilt:  $v^2 = 2h_s \cdot b$  umgeformt zu  $b = \frac{v^2}{2h_s}$  Nun wird die Gleichung von  $v$  eingesetzt:

$$b = \frac{2mgh_s \sin a}{2h_s \cdot \left(m + \frac{J}{R^2}\right)} = \frac{mg \sin a}{m + \frac{J}{R^2}}$$

Damit haben wir dann die gewünschte Formel.

## Literatur

- [1] Bruno Assmann „Technische Mechanik“ Band 1 Oldenbourg Verlag 12.Auflage München 1991
- [2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980

## 32. Bewegung einer Kugel mit künstlicher Beschleunigung auf der schiefen Ebene

Es soll sein:

$m$  = Masse der Kugel

$R$  = Radius der Kugel

$\alpha$  = Neigungswinkel der schiefen Ebene

$b_k$  = künstliche Beschleunigung, die eine bestimmte Zeit auf die Kugel wirkt

$F_z$  = Kraft, die auf die Kugel wirkt (auf der schiefen Ebene)

$b_z = \frac{F_z}{m}$  = zugehörige Beschleunigung

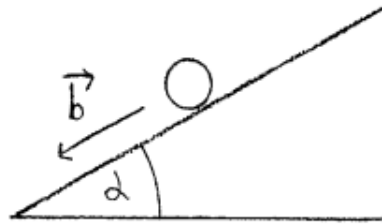
$\mu = \frac{\mu'}{R}$  ist die Rollreibung mit dem Rollreibungskoeffizienten  $\mu'$  und dem Radius der Kugel  $R$ . (vgl. Assmann [1] Kapitel 11.10 S.265 )

$\mu_H$  = Haftreibungskoeffizient

$$\delta := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls } \mu' > 0 \text{ (Rollen)} \\ 1 & \text{falls } \mu' = 0 \text{ (reibungsfrei)} \end{cases}$$

für die Kugel vgl Budo [2] §57 S.302 Gl (6) - (8)

$t$  = Zeit



Die Beschleunigung  $b$  auf der schiefen Ebene ist:

$b = \delta g \cdot \sin \alpha$ , die Geschwindigkeit  $v$  und die zurückgelegte Strecke  $s$  ergeben sich dann als  $v = \delta g \sin \alpha \cdot t$  und  $s = \frac{1}{2} \cdot \delta g \cdot t^2 \cdot \sin \alpha$ .

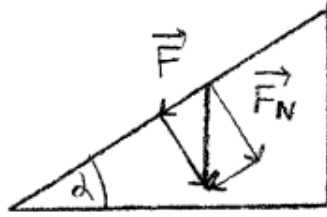
Rollt eine Kugel auf der schiefen Ebene, so ist  $\delta = \frac{5}{7}$ , dieses folgt zum Beispiel aus Budo [2] §57 S.302 Gl. (8). Das Trägheitsmoment  $J$  einer Kugel ist  $J = \frac{2}{5} \cdot mR^2$ . Die allgemeine Formel für das Abrollen auf der schiefen Ebene lautet:

$$b = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}} \quad (1)$$

Eine Herleitung findet sich bei \* am Ende des Textes, oder man kann das mit Budo [2] §57 S.302 Gl. (5)-(7) erkennen. Das Trägheitsmoment der Kugel eingesetzt ergibt:

$$b = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{2}{5} \cdot m} = \frac{5}{7} \cdot g \sin \alpha \quad (2)$$

Damit erhalten wir im Fall des Rollens  $\delta = \frac{5}{7}$ .



Für die Kräfte bekommen wir (vgl. Abb.):

$$F = mg \sin \alpha \quad F_N = mg \cos \alpha$$

Reibungskraft:

$$F_R = \mu \cdot F_N = mg\mu \cos \alpha$$

Im Reibungsfall ist:

$$F = mg \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad b = g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$v = gt \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad s = \frac{1}{2} \cdot gt^2 \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

Die Kraft  $F_z$  kann also geschrieben werden:

$$F_z = m\delta \cdot (g \sin \alpha + b_k) - mg\mu \cos \alpha$$

Die Beschleunigung  $b_z$  kann dargestellt werden durch:

$$b_z = \frac{F_z}{m} = \delta \cdot (g \sin \alpha + b_k) - g\mu \cos \alpha$$

Die künstliche Beschleunigung  $b_k$  hört zur Zeit  $t_1$  auf. Für die Geschwindigkeit erhalten wir:

$$v_z = \begin{cases} b_z \cdot t & : t \leq t_1 \\ b_z \cdot t_1 + g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot (t - t_1) & : t \geq t_1 \end{cases}$$

Für die Strecke ergibt sich:

$$s_z = \frac{1}{2} \cdot b_z t^2 \quad \text{für} \quad t \leq t_1$$

$\bar{s}_z$  = Strecke, die in der Zeit von  $t_1$  bis  $t$  zurückgelegt wird

$$\bar{s}_z(t) = \int_{t_1}^t v_z(\tau) d\tau = \int_{t_1}^t (b_z t_1 + g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot (\tau - t_1)) d\tau$$

$$= \left[ b_z t_1 \tau + g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \left( \frac{\tau^2}{2} - t_1 \tau \right) \right]_{t_1}^t$$

$$= b_z t_1 t + g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot \left( \frac{t^2}{2} - t_1 t \right) - b_z t_1^2 - g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot \left( \frac{t_1^2}{2} - t_1^2 \right)$$



$$= b_z t_1 \cdot (t - t_1) + g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t_1^2}{2} - t_1 t \right)$$

also:

$$s_z = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot b_z t^2 & : t \leq t_1 \\ \frac{1}{2} \cdot b_z t_1^2 + \bar{s}_z(t) & : t \geq t_1 \end{cases}$$

Betrachtet man die Formel für  $v_z(t)$  für  $t \geq t_1$ , so fällt auf, daß bei  $\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha < 0$  die Geschwindigkeit  $v_z(t)$  sich verringert, bis  $v_z(t)$  etwa zur einer Zeit  $t_2$  Null geworden ist.

$$0 = v_z(t_2) = b_z t_1 + g \cdot (\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot (t_2 - t_1)$$

Daraus folgt:

$$t_2 - t_1 = \frac{b_z \cdot t_1}{g \cdot (\mu \cos \alpha - \delta \sin \alpha)}$$

oder

$$t_2 = t_1 \cdot \left( 1 + \frac{b_z}{g \cdot (\mu \cos \alpha - \delta \sin \alpha)} \right)$$

Spezialfall  $\alpha = 0$ :

$$t_2 - t_1 = \frac{b_z \cdot t_1}{g \cdot \mu}$$

oder

$$t_2 = t_1 \cdot \left( 1 + \frac{b_z}{g \cdot \mu} \right)$$

An  $v_z(t)$  erkennt man, daß bei  $t \geq t_1$  im Fall  $\delta \sin \alpha - \mu \cos \alpha = 0$  gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit  $v_z = b_z \cdot t_1$  vorliegt. Das ist gleichwertig zu:

$$\delta \sin \alpha = \mu \cos \alpha$$

oder

$$\tan \alpha = \frac{\mu}{\delta}$$

wegen  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ .

Erheblich schwieriger dürfte die Behandlung mit Berücksichtigung eines Mediums (Gas, Flüssigkeit) sein.

Zum Gültigkeitsbereich dieser Gleichungen sind noch einige Bemerkungen zu machen:

Die Gleitreibung muß ausgeschlossen werden nach Budo [2] §57 S.302 Gleichung (10) muß bei der Kugel gelten  $\tan \alpha \leq \frac{7}{2} \cdot \mu_H$ . Das heißt nur bei kleinen Neigungswinkel kann die Gleitreibung ausgeschaltet werden. Das gilt außerdem nur bei kleiner Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und Unterlage. Schließlich muß sowohl die Kugel und die schiefe Ebene elastisch sein. Das ist für Stahlkugeln mit Stahlunterlage erfüllt.

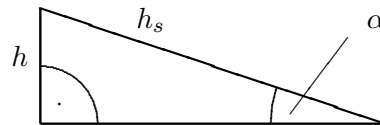
zu \*: Es geht nun zur Herleitung von Formel (1):

Bezeichnungen:

$$\text{kinetische Energie} = E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\text{potentielle Energie} = E_{pot} = mgh \text{ mit } h = h_s \sin \alpha \text{ vgl. Abb.}$$

$$\text{Rotationsenergie} = E_{rot} = \frac{Jw^2}{2} \quad J = \text{Trägheitsmoment}$$



Energiesatz:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} = mgh$$

Wir setzen voraus, daß der Körper nur rollt und nicht gleitet. Dann gilt:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = w = \frac{v}{R} \quad R = \text{Radius des rollenden Körpers}$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = mgh_s \sin \alpha$$

Durch Umformung:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh_s \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

Da der rollende Körper mit der konstanten Beschleunigung  $b = g \sin \alpha$  gezogen wird, liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. Für diese Bewegung gilt:  $v^2 = 2h_s \cdot b$  umgeformt zu  $b = \frac{v^2}{2h_s}$ . Nun wird die Gleichung von  $v$  eingesetzt:

$$b = \frac{2mgh_s \sin \alpha}{2h_s \cdot \left(m + \frac{J}{R^2}\right)} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}$$

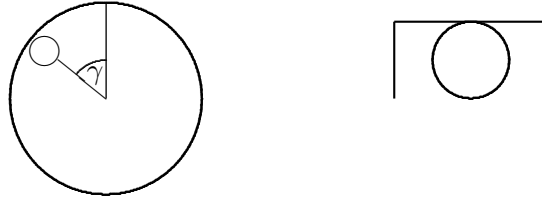
Damit kommen wir dann zur gewünschten Formel.

## Literatur

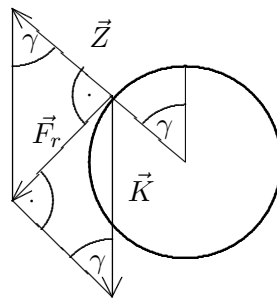
- [1] Bruno Assmann „Technische Mechanik“ Band 1 Oldenbourg Verlag 12.Auflage München 1991
- [2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980

### 33. Der vertikale Looping

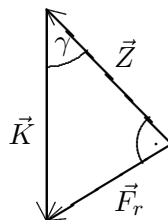
Wir betrachten einen senkrecht stehenden Looping auf der Erdoberfläche mit einer kleinen Kugel wie in der Abbildung.



Die Abbildung zeigt die Bahn des Loopings an der die kleine Kugel nicht heraus kann. Man kann sich den unteren Teil wie eine Kugelbahn vorstellen, auf der sich kleine Spielkugeln (Murmeln) bewegen. Es wird eine gewisse Energie notwendig sein, um die Kugel auf eine Position in der unteren Hälfte des Loopings zu bringen. Soll eine Kugel auf eine Position in der oberen Hälfte gebracht werden, so ist außerdem eine Mindestgeschwindigkeit an diesen Punkt erforderlich. Sonst fällt die Kugel runter.



Schaut man sich die Abbildung an, so erkennt man, daß zwei Kräfte wirksam sind. Die eine Kraft ist die Schwerkraft  $K = mg$  mit  $m$  als Masse der Kugel und  $g$  als Erdbeschleunigung. Die andere Kraft stellt die Zentrifugalkraft  $Z = \frac{mv^2}{R}$  mit  $R$  als Radius des Loopings und  $v$  als Geschwindigkeit der Kugel dar.



Nach der Abbildung muß die Resultierende  $\vec{F}_r = \vec{K} + \vec{Z}$  tangential gerichtet sein, wenn die Kugel sich mit Mindestgeschwindigkeit bewegt. Wir können an der Abbildung folgende Gleichung erkennen.

$$\frac{Z}{K} = \cos \gamma \quad \text{also} \quad \frac{v_{min}^2}{gR} = \cos \gamma$$

mit  $\gamma$  als Höhenwinkel.

Eine Umformung erbringt:

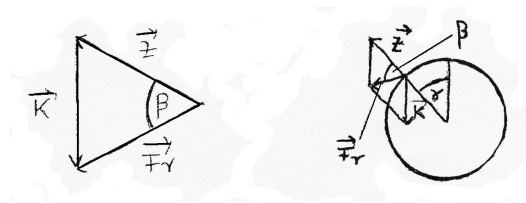
$$v_{min} = \sqrt{g \cdot R \cdot \cos \gamma}$$

Am höchsten Punkt: ( $\gamma = 0$ )

$$v_{min} = \sqrt{g \cdot R}$$

Am höchsten Punkt kann auch  $Z = K$  gesetzt werden und man kommt zum selben Resultat.

Wir zeigen jetzt noch auf eine andere Weise, wie man zur selben Formel für die Minimalgeschwindigkeit kommt.



Wir nehmen nun eine beliebige Geschwindigkeit  $v$  der Kugel an. Es ist (siehe Abb.)

$$F_r^2 = K^2 + Z^2 - 2KZ \cdot \cos \gamma$$

daraus folgt:

$$F_r = \sqrt{m^2 g^2 + \frac{m^2 v^4}{R^2} - \frac{2m^2 g v^2 \cos \gamma}{R}}$$

Ebenso aus der Abbildung kann man entnehmen (Kosinussatz):

$$K^2 = F_r^2 + Z^2 - 2F_r Z \cdot \cos \beta$$

Umformung und Einsetzung:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{F_r^2 + Z^2 - K^2}{2F_r Z} = \frac{K^2 + Z^2 - 2KZ \cos \gamma + Z^2 - K^2}{2F_r Z} \\ &= \frac{2Z^2 - 2KZ \cos \gamma}{2ZF_r} = \frac{Z - K \cos \gamma}{F_r} \end{aligned}$$

Einsetzung für  $Z$  und  $K$ :

$$\cos \beta = \frac{\frac{mv^2}{R} - mg \cos \gamma}{\sqrt{\frac{m^2 v^4}{R^2} + m^2 g^2 - \frac{2m^2 g v^2 \cos \gamma}{R}}}$$

$\vec{F}_r$  zeigt tangential wenn  $\beta = 90^\circ$  ist. Daraus folgt  $\cos \beta = 0$ , also:

$$0 = \frac{mv_{min}^2}{R} - mg \cos \gamma$$

Schließlich erhalten wir wieder:

$$v_{min} = \sqrt{g \cdot R \cdot \cos \gamma}$$

Damit ist das Resultat zweimal bestätigt.

Zuletzt führen wir den Radius  $r$  der kleinen Kugel ein. Wenn wir den Schwerpunkt der kleinen Kugel berücksichtigen, dann müssen wir  $R - r$  anstatt von  $R$  in die Gleichungen einsetzen. Wir nehmen an, dass die kleine Kugel eine (örtlich) konstante Dichte hat. Weitere Resultate zum Looping findet man bei Schröder [1].

## Literatur

- [1] Harald Schröder „Der Looping“, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2000

### 34. Abflug von einer Kugel

Es wird der reibungsfreie Fall behandelt:

$\delta$  = Startwinkel

$R$  = Radius der großen Kugel, auf der sich eine kleine Kugel bewegt

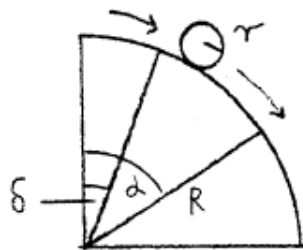
$r$  = Radius der kleinen Kugel, die sich auf der großen Kugel bewegt

$v$  = Geschwindigkeit der kleinen Kugel

$v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit der kleinen Kugel

$m$  = Masse der kleinen Kugel

$g$  = Erdbeschleunigung



Im reibungsfreien Fall gleitet die Kugel.

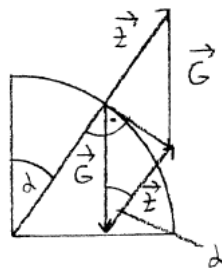
Energiesatz:

$$\frac{mv^2}{2} + mgR \cos \alpha = mgR \cos \delta + \frac{mv_0^2}{2} \quad (1)$$

$G$  = Schwerkraft       $Z$  = Zentrifugalkraft

$$G = mg \quad Z = \frac{mv^2}{R}$$

Grenzbedingung:



$$\cos \alpha = \frac{Z}{G} = \frac{v^2}{Rg}$$

Wir formen Gleichung (1) nach  $v$  um:

$$v^2 = \frac{mgR \cdot (\cos \delta - \cos \alpha) + \frac{mv_0^2}{2}}{\frac{m}{2}}$$

also:

$$v^2 = 2gR \cdot (\cos \delta - \cos \alpha) + v_0^2$$

Wir erhalten:

$$\cos \alpha = \frac{v^2}{Rg} = \frac{2gR \cdot (\cos \delta - \cos \alpha) + v_0^2}{Rg}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot (\cos \delta - \cos \alpha) + \frac{v_0^2}{Rg}$$

$$3 \cos \alpha = 2 \cos \delta + \frac{v_0^2}{Rg}$$

schließlich:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \cdot \cos \delta + \frac{v_0^2}{3Rg}$$

Bei größeren  $\alpha$  fliegt die kleine Kugel von der großen Kugel weg.

### Spezialfälle:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \cdot \cos \delta \quad \text{bei } v_0 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3Rg} \quad \text{bei } \delta = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{bei } v_0 = 0 \text{ und } \delta = 0$$

Diese Formeln gelten auch für einen Körper, der sich auf einen Zylinder abwärts bewegt, da der Zylinder denselben Querschnitt hat.

Berücksichtigt man den Schwerpunkt der kleinen Kugel, so muß  $R + r$  anstatt von  $R$  in alle Gleichungen eingesetzt werden. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Kugel konstante Dichte hat.

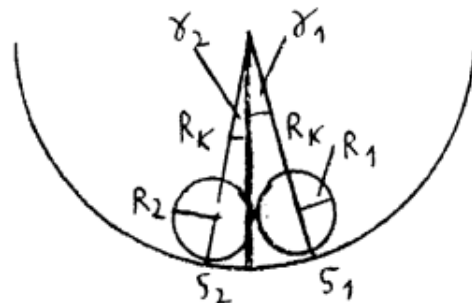
## 35. Ruhende Kugeln

### 1. Der reibungslose Fall

#### 1.1. Zwei ruhende Kugeln auf einer Kugelschale

Wir wollen uns mit dem Gleichgewicht zweier Kugeln in einer Hohlkugel beschäftigen. Dabei tauchen folgende Fragen auf: Ist das angenommene Gleichgewicht stabil, labil oder indifferent? Welche Positionen nehmen die beiden Kugeln ein? Welche Größen bestimmen dieses Gleichgewicht?

Zwei Kugeln mit Massen  $m_1, m_2$  und Radien  $R_1, R_2$  befinden sich in einer Hohlkugel mit dem inneren Radius  $R_K$  vgl. Abb.



$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_g$$

$$R_1 + R_2 \leq R_K$$

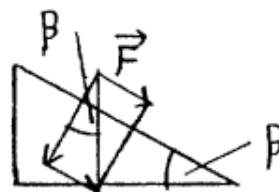
Die Reibung soll nicht berücksichtigt werden. Zuerst wird auch ein Vakuum vorausgesetzt. Das Problem ist festzustellen bei welchen Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2$  die Kugeln ihre Position einnehmen.

$$\gamma_1 = \angle FMS_1 \quad \gamma_2 = \angle FMS_2$$

Die ziehende Kraft auf einer schiefen Ebene mit den Neigungswinkel  $\beta$  ist dann:

$$F = mg \sin \beta$$

vgl. Abb.



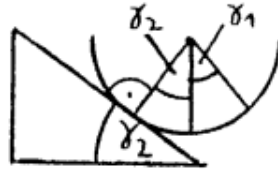
$m =$  gezogene Masse  $g =$  Erdbeschleunigung



In der Hohlkugel betragen die ziehenden Kräfte:

$$F_1 = m_1 g \sin \gamma_1 \quad F_2 = m_2 g \sin \gamma_2$$

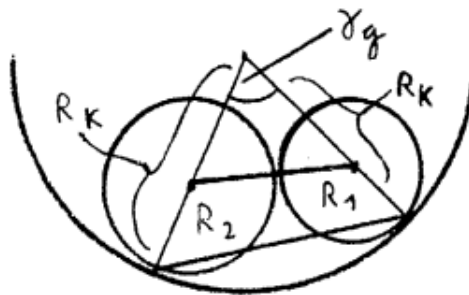
$\gamma_1, \gamma_2$  sind hier die Neigungswinkel vgl. Abb.



In der Hohlkugel herrscht Gleichgewicht, daher muß  $F_1 = F_2$  sein. Gleichsetzung ergibt:

$$m_1 \cdot \sin \gamma_1 = m_2 \cdot \sin \gamma_2$$

Wir betrachten die Abb.



Zur Bestimmung von  $\gamma_g$  brauchen wir den Kosinussatz:

$$(R_1 + R_2)^2 = (R_K - R_1)^2 + (R_K - R_2)^2 - 2 \cdot (R_K - R_1) \cdot (R_K - R_2) \cdot \cos \gamma_g$$

umgeformt:

$$\cos \gamma_g = \frac{(R_K - R_1)^2 + (R_K - R_2)^2 - (R_1 + R_2)^2}{2 \cdot (R_K - R_1) \cdot (R_K - R_2)}$$

Damit ist  $\gamma_g$  nun bekannt und es gilt nun:

$$\gamma_g = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (1)$$

$$m_1 \cdot \sin \gamma_1 = m_2 \cdot \sin \gamma_2 \quad (2)$$

(1) kann mit Hilfe des Additionstheorem  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$  eingesetzt werden.

$$m_1 \sin \gamma_1 = m_2 \sin(\gamma_g - \gamma_1) = m_2 \cdot (\sin \gamma_g \cos \gamma_1 - \sin \gamma_1 \cos \gamma_g)$$

Umwandlung  $\cos \gamma_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_1}$  und Umformung:

$$m_1 \sin \gamma_1 + m_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_g = m_2 \sin \gamma_g \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_1}$$

quadrieren:

$$\sin^2 \gamma_1 \cdot (m_1 + m_2 \cos \gamma_g)^2 = m_2^2 \sin^2 \gamma_g - m_2^2 \sin^2 \gamma_g \sin^2 \gamma_1$$

aufgelöst nach  $\sin \gamma_1$ :

$$\sin \gamma_1 = \sqrt{\frac{m_2^2 \sin^2 \gamma_g}{(m_1 + m_2 \cos \gamma_g)^2 + m_2^2 \sin^2 \gamma_g}} = \frac{m_2 \sin \gamma_g}{\sqrt{(m_1 + m_2 \cos \gamma_g)^2 + m_2^2 \sin^2 \gamma_g}}$$

und  $\gamma_2 = \gamma_g - \gamma_1$

**mit Medium:**

$\varphi_F$  = Dichte der Flüssigkeit (Gas)

$\varphi_{K_i}$  = Dichte der i.ten Kugel  $i \in \{1, 2\}$

$a_i := 1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_{K_i}}$

vgl. Budo [2] §16 S.85

Im Medium (Flüssigkeit oder Gas) können die Kräfte dargestellt werden als:

$$F_1 = a_1 g m_1 \sin \gamma_1 \quad F_2 = a_2 g m_2 \sin \gamma_2$$

Die Gleichungen (1) und (2) werden zu ( $F_1 = F_2$ ):

$$a_1 m_1 \sin \gamma_1 = a_2 m_2 \sin \gamma_2$$

$$\gamma_g = \gamma_1 + \gamma_2$$

Wir setzen  $M_i := a_i \cdot m_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  und formen damit genauso um wie im Vakuum mit  $m_i$ . Wir erhalten:

$$\sin \gamma_1 = \frac{a_2 m_2 \sin \gamma_g}{\sqrt{(a_1 m_1 + a_2 m_2 \cos \gamma_g)^2 + a_2^2 m_2^2 \sin^2 \gamma_g}}$$

und  $\gamma_2 = \gamma_g - \gamma_1$

## 1.2. 2 ruhende Kugeln auf einem allgemeinen Rotationskörper

Bisher hatten wir den reibungslosen Fall in einer Hohlkugel betrachtet. Nun ersetzen wir die Hohlkugel durch einen allgemeinen Rotationskörper und behandeln dasselbe Problem.

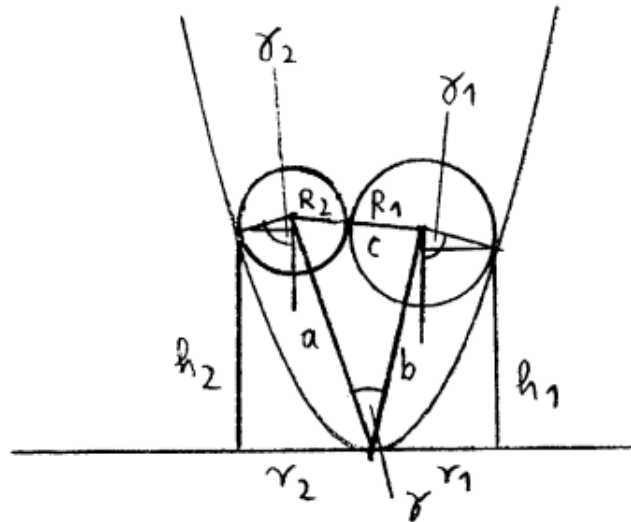
$h(r)$  = Rotationskörperfunktion

$s = h'(r)$

$R_1, R_2$  = Radien der Kugeln

$m_1, m_2$  = Massen der Kugeln

Zwei Kugeln liegen auf einer Rotationskörperschale



Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Aus der Abbildung kann man noch entnehmen:

$$a^2 = (h_2 + R_2 \cos \gamma_2)^2 + (r_2 - R_2 \sin \gamma_2)^2$$

$$b^2 = (h_1 + R_1 \cos \gamma_1)^2 + (r_1 - R_1 \sin \gamma_1)^2$$

$$c = R_1 + R_2$$

Positionen der Mittelpunkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$ :

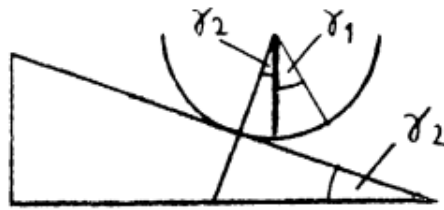
$$x_1 = r_1 - R_1 \sin \gamma_1 \quad x_2 = r_2 - R_2 \sin \gamma_2$$

$$y_1 = h_1 + R_1 \cos \gamma_1 \quad y_2 = h_2 + R_2 \cos \gamma_2$$

$(r_1, h_1)$  und  $(r_2, h_2)$  sind die Koordinaten der Berührungspunkte der Kugel zum Rotationskörper.

$$h_1 = h(r_1) \quad h_2 = h(r_2) \quad s_1 = h'(r_1) \quad s_2 = h'(r_2)$$

$\gamma_1, \gamma_2$  sind zugleich Steigungswinkel vgl. Abbildung.



es gilt:

$$s_1 = \tan \alpha_1 \quad s_2 = \tan \alpha_2$$

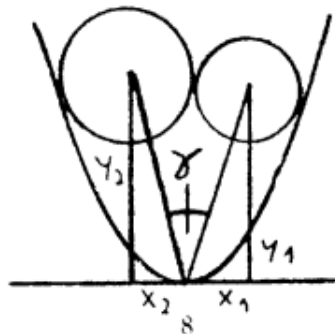
$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

daraus folgt:

$$\sin \gamma_1 = \frac{s_1}{\sqrt{1 + s_1^2}} \quad \sin \gamma_2 = \frac{s_2}{\sqrt{1 + s_2^2}}$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + s_1^2}} \quad \cos \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + s_2^2}}$$

Aus der folgenden Abbildung kann man eine Gleichung erkennen:



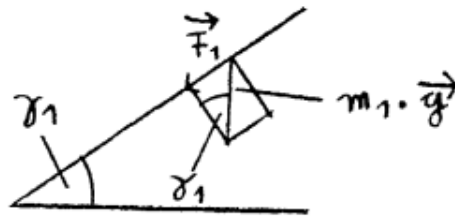
nämlich

$$\gamma = \arctan \frac{x_1}{y_1} + \arctan \frac{x_2}{y_2}$$

Fallkraftkomponenten:

$$F_1 = m_1 g \sin \gamma_1 \quad F_2 = m_2 g \sin \gamma_2$$

siehe dazu auch die Abbildung:



Es muß  $F_1 = F_2$  sein.

$$\Rightarrow m_1 g \cdot \frac{s_1}{\sqrt{1+s_1^2}} = m_2 g \cdot \frac{s_2}{\sqrt{1+s_2^2}}$$

Es ergeben sich also 2 Gleichungen:

$$\frac{m_1 s_1}{\sqrt{1+s_1^2}} = \frac{m_2 s_2}{\sqrt{1+s_2^2}} \quad (3)$$

$$\gamma = \arctan \frac{x_1}{y_1} + \arctan \frac{x_2}{y_2} \quad (4)$$

Die Gleichungen für  $\gamma, x_1, x_2, y_1, y_2$  müssen in (4) vorher eingesetzt werden. (3) und (4) ergeben dann 2 Gleichungen für die Unbekannten  $r_1, r_2$ .

Man beachte, daß die Unbekannten  $r_1, r_2$  auch in der Gleichung für  $\cos \gamma$  enthalten sind, und daß für  $\sin \gamma_1, \sin \gamma_2, \cos \gamma_1, \cos \gamma_2$  auch jeweils eingesetzt werden muß. Eine Auflösung nach  $r_1$  und  $r_2$  wird kompliziert.

In einem Medium ändern sich nur die Kräfte zu:

$$F_1 = m_1 a_1 g \cdot \frac{s_1}{\sqrt{1+s_1^2}} \quad F_2 = m_2 a_2 g \cdot \frac{s_2}{\sqrt{1+s_2^2}}$$

wobei  $a_1 = 1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_{K1}}, a_2 = 1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_{K2}}$

$\varphi_F$  = Dichte des Mediums (Flüssigkeit, Gas)

$\varphi_{K1}$  = Dichte der 1.Kugel

$\varphi_{K2}$  = Dichte der 2.Kugel

vgl. Budo [2] §16 S.85

Aus (3) wird dann:

$$\frac{m_1 a_1 s_1}{\sqrt{1+s_1^2}} = \frac{m_2 a_2 s_2}{\sqrt{1+s_2^2}}$$

(4) bleibt erhalten.

$h(r)$  muß so sein, daß die beiden Kugeln nur je **einen** Berührungspunkt haben.



Also keine Mulden, in denen eine Kugel festsetzt.

Setzt man für  $h(r)$  die Gleichungen z.B. für Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, Kegel ein, so bekommt man die entsprechenden Gleichungen für Rotationsellipsoidenschalen, Rotationsparaboloidenschalen, Rotationshyperboloidenschalen, Rotationskegelschalen.

Es wird angenommen, daß die Dichten der beiden Kugeln größer sind als die Dichte des Mediums. Liegt der umgekehrte Fall vor dann muß der Rotationskörper umgedreht werden. vgl. Abb.



Diese Umkehrung gilt auch für den Reibungsfall (Kapitel 2). Statt der Rotationskörperschale kann ein verallgemeinerter Zylindermantel mit Querschnitt des Rotationskörpers verwendet werden. vgl. Abb.



Dann gelten dieselben Gleichungen bei ruhenden Rotationskörpern gleicher Art mit beliebigen Trägheitsmoment. Das gilt auch für den später behandelten Reibungsfall.

Bei der Kugelschale ist es z.B. ein Kreiszylindermantel, bei der Parabolidenschale ein Parabolzylindermantel.

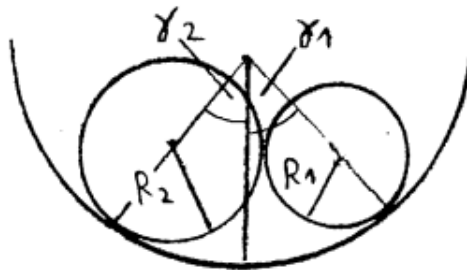
Beim reibungslosen Fall stellt sich bei den beiden Kugeln ein stabiles Gleichgewicht ein.

## 2. Der Reibungsfall

### 2.1. Ruhende Kugeln auf einer Kugelschale mit Reibung

Wir schauen uns nun den Reibungsfall an. Wir werden sehen, daß im Gegensatz zum reibungslosen Fall ein gewisser Spielraum besteht, der durch die Reibungskräfte hervorgerufen wird.

Die Notation ist dieselbe wie im Kapitel 1.1.



$m_1, m_2 =$  Kugelmassen

$R_1, R_2 =$  Kugelradien

$R_K =$  Radius der Hohlkugel

Es gilt wie beim reibungslosen Fall vgl. Kapitel 1.1:

$$\cos \gamma_g = \frac{(R_K - R_2)^2 + (R_K - R_1)^2 - (R_1 + R_2)^2}{2 \cdot (R_K - R_2) \cdot (R_K - R_1)} \quad (5)$$

$$\gamma_g = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (6)$$

Im Reibungsfall besteht aufgrund der Reibungskräfte  $F_{R1}$  und  $F_{R2}$  ein gewisser Spielraum.

$F_{R1}, F_{R2} =$  Reibungskräfte der Kugeln mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$ .

$\gamma_1, \gamma_2$  sind auch hier wie im Kapitel 1.1 Steigungswinkel für die Kugeln. Die Kräfte haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} F_1 &= \delta_1 m_1 g \sin \gamma_1 & F_2 &= \delta_2 m_2 g \sin \gamma_2 \\ F_{R1} &= m_1 g \cos \gamma_1 \cdot \mu_1 & F_{R2} &= m_2 g \cos \gamma_2 \cdot \mu_2 \end{aligned} \quad (7)$$

wobei  $i \in \{1, 2\}$

$$\delta_i := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls } \frac{\mu'_i}{R_i} < \mu_{Hi} \text{ (Rollen)} \\ 1 & \text{falls } \mu_{Hi} < \frac{\mu'_i}{R_i} \text{ (Gleiten)} \\ \frac{5}{7} \text{ oder } 1 & \text{falls } \frac{\mu'_i}{R_i} = \mu_{Hi} \neq 0 \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \\ 1 & \text{falls } 0 = \frac{\mu'_i}{R_i} = \mu_{Hi} \text{ (reibungsfrei)} \end{cases}$$

vgl dazu Assmann [1] Band 1 Kapitel 11.10 S. 265

$\mu'_i$  = Rollreibungskoeffizient der i.Kugel mit Radius  $R_i$

$\mu_{Hi}$  = Haftreibungskoeffizient der i.Kugel

$\mu_{Gi}$  = Gleitreibungskoeffizient der i.Kugel

und

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{\mu'_i}{R_i} & \text{falls } \mu_{Hi} > \frac{\mu'_i}{R_i} \text{ (Rollen)} \\ \mu_{Gi} & \text{falls } \frac{\mu'_i}{R_i} > \mu_{Hi} \text{ (Gleiten)} \\ \mu_{Gi} \text{ oder } \frac{\mu'_i}{R_i} & \text{falls } \mu_{Hi} = \frac{\mu'_i}{R_i} \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \end{cases}$$

vgl. Assmann [1] Band 1 Kapitel 11.10 S.265

Die Beschleunigung  $b$  auf der schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha$  ist:

$b = \delta g \cdot \sin \alpha$ , die Geschwindigkeit  $v$  und die zurückgelegte Strecke  $s$  ergeben sich dann als  $v = \delta g \sin \alpha \cdot t$  und  $s = \frac{1}{2} \cdot \delta g \cdot t^2 \cdot \sin \alpha$ .

Rollt eine Kugel auf der schiefen Ebene, so ist  $\delta = \frac{5}{7}$  dieses folgt zum Beispiel aus Budo [2] §57 S.302 Gl. (8). Das Trägheitsmoment  $J$  einer Kugel ist  $J = \frac{2}{5} \cdot mR^2$ . Die allgemeine Formel für das Abrollen auf der schiefen Ebene lautet:

$$b = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}$$

Eine Herleitung befindet sich bei \* am Ende des Kapitels oder man kann das mit Budo [2] §57 S.302 Gl. (5)-(7) sehen. Das Trägheitsmoment der Kugel eingesetzt ergibt:

$$b = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{2}{5} \cdot m} = \frac{5}{7} \cdot g \sin \alpha$$

Damit ergibt sich im Fall des Rollens  $\delta = \frac{5}{7}$ .

Stabilitätsungleichung:  $|\cdot|$  = Betrag in  $R$

$$|F_1 - F_2| \leq F_{R1} + F_{R2}$$

Grenzfälle:

$$F_1 - F_2 = F_{R1} + F_{R2} \quad F_2 - F_1 = F_{R1} + F_{R2} \quad (8)$$



Mit (1) kann  $\gamma_g$  bestimmt werden und dann mit (2),(3),(4) schließlich  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , die gesucht sind. Es kommen dann bestimmte Teilintervalle von  $[0, 90^\circ]$  für  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  raus.

Im Medium mit den Faktoren:

$$a_i = 1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_{Ki}} \quad \text{vgl. Budo [2] §16 S.85}$$

wobei

$\varphi_{Ki}$  = Dichte der i.Kugel mit dem Radius  $R_i$   $i \in \{1, 2\}$   
 $\varphi_F$  = Dichte des Mediums (Flüssigkeit, Gas)

verändert sich nur (7) zu:

$$F_1 = \delta_1 m_1 a_1 g \sin \gamma_1 \quad F_{R1} = m_1 a_1 g \cos \gamma_1 \cdot \mu_1$$

$$F_2 = \delta_2 m_2 a_2 g \sin \gamma_2 \quad F_{R2} = m_2 a_2 g \cos \gamma_2 \cdot \mu_2$$

(5),(6) und (8) bleiben erhalten. Die Ausrechnung geschieht genauso.

## 2.2. 2 ruhende Kugeln auf einem allgemeinen Rotationskörper mit Reibung

Wir behandeln jetzt 2 ruhende Kugeln auf einer allgemeinen Rotationskörperschale mit Berücksichtigung der Reibung. Die Symbole von Kapitel 1.2 werden übernommen.

$h(r)$  = Rotationskörperfunktion

$s = h'(r)$

$R_1, R_2$  = Radien der Kugeln

$m_1, m_2$  = Massen der Kugeln

Für die Rotationskörperfunktion  $h(r)$  gelten dieselben Voraussetzungen wie beim reibungslosen Fall in Kapitel 1.2.  $\delta_i$  und  $\mu_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  werden wie im Kapitel 2.1 definiert.

$$\delta_i := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls } \frac{\mu'_i}{R_i} < \mu_{Hi} \text{ (Rollen)} \\ 1 & \text{falls } \mu_{Hi} < \frac{\mu'_i}{R_i} \text{ (Gleiten)} \\ \frac{5}{7} \text{ oder } 1 & \text{falls } \frac{\mu'_i}{R_i} = \mu_{Hi} \neq 0 \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \\ 1 & \text{falls } 0 = \frac{\mu'_i}{R_i} = \mu_{Hi} \text{ (reibungsfrei)} \end{cases}$$

$\mu'_i$  = Rollreibungskoeffizient der i.Kugel mit Radius  $R_i$

$\mu_{Hi}$  = Haftreibungskoeffizient der i.Kugel

$\mu_{Gi}$  = Gleitreibungskoeffizient der i.Kugel

und

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{\mu'_i}{R_i} & \text{falls } \mu_{Hi} > \frac{\mu'_i}{R_i} \text{ (Rollen)} \\ \mu_{Gi} & \text{falls } \frac{\mu'_i}{R_i} > \mu_{Hi} \text{ (Gleiten)} \\ \mu_{Gi} \text{ oder } \frac{\mu'_i}{R_i} & \text{falls } \mu_{Hi} = \frac{\mu'_i}{R_i} \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \end{cases}$$

vgl. Assmann [1] Band 1 Kapitel 11.10 S.265

Es gilt für  $i \in \{1, 2\}$ :

$$F_i = m_i g \sin \gamma_i \quad F_{R2} = m_i g \cos \gamma_i \cdot \mu_i$$

Aus Kapitel 1.2 wissen wir:

$$\sin \gamma_i = \frac{s_i}{\sqrt{1 + s_i^2}} \quad \cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + s_i^2}}$$

mit

$$s_i = h'(r_i)$$

Daraus folgt:

$$F_i = \frac{m_i g s_i \cdot \delta_i}{\sqrt{1 + s_i^2}} \quad F_R = \frac{m_i g \cdot \mu_i}{\sqrt{1 + s_i^2}}$$

Stabilitätsungleichung:  $|\cdot| = \text{Betrag in } R$

$$|F_1 - F_2| \leq F_{R1} + F_{R2}$$

Grenzfälle:

$$F_1 - F_2 = F_{R1} + F_{R2}$$

$$F_2 - F_1 = F_{R1} + F_{R2}$$

Diese beiden Gleichungen müssen statt der Gleichung (3) von Kapitel 1 verwendet werden. Alle anderen Gleichungen bleiben dieselben wie beim reibungslosen Fall im Kapitel 1.2. Gesucht sind bei diesen Gleichungen die Unbekannten  $r_1, r_2$ . Die Stabilitätsungleichung bewirkt, daß bestimmte Intervalle für  $r_1, r_2$  rauskommen.

In einem Medium (Flüssigkeit, Gas) kommen bei allen Kräften noch die Faktoren  $a_1 = 1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_{K1}}$  und  $a_2 = 1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_{K2}}$  dazu, vgl Budo [2] §16 S.85. Dabei ist  $\varphi_F$  die Dichte des Mediums und  $\varphi_{K1}, \varphi_{K2}$  sind die Dichten der beiden Kugeln. Die Kräfte lauten dann:

$$F_i = \frac{m_i g s_i a_i \cdot \delta_i}{\sqrt{1 + s_i^2}}$$

$$F_{Ri} = \frac{m_i g a_i \cdot \mu_i}{\sqrt{1 + s_i^2}}$$

Alle anderen Gleichungen bleiben unverändert.

## G. Mechanik

Die entsprechenden Gleichungen für Rotationskegelschnitte (Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid, Kegel) erhält man, wenn man für  $h(r)$  die Gleichungen für Ellipse, Parabel, Hyperbel, Kegel einsetzt.

Die beiden Kugeln befinden sich in einem stabilen Gleichgewicht innerhalb eines bestimmten Bereiches. Werden die Kugel aus diesem Bereich bewegt, so streben sie in die ursprüngliche Lage zurück. Innerhalb dieses Bereiches können beide Kugeln dann aber beliebig verschoben werden. Das bedeutet auch indifferentes Gleichgewicht innerhalb dieses Bereiches.

zu \*:

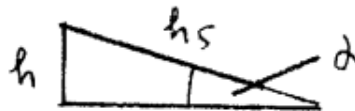
Es geht um die Herleitung von der Beschleunigungsformel am Anfang des Kapitels:

Bezeichnungen:

kinetische Energie =  $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$

potentielle Energie =  $E_{pot} = mgh$  mit  $h = h_s \sin \alpha$  siehe Abb.

Rotationsenergie =  $E_{rot} = \frac{Jw^2}{2}$   $J = \text{Trägheitsmoment}$



Energiesatz:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} = mgh$$

Wir setzen voraus, daß der Körper nur rollt und nicht gleitet. Dann gilt:

Winkelgeschwindigkeit =  $w = \frac{v}{R}$   $R = \text{Radius des rollenden Körpers}$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = mgh_s \sin \alpha$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh_s \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

## G. Mechanik

Da der rollende Körper mit der konstanten Beschleunigung  $b = g \sin \alpha$  gezogen wird, liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. Für diese Bewegung gilt:  $v^2 = 2h_s \cdot b$  umgeformt zu  $b = \frac{v^2}{2h_s}$ . Nun wird die Gleichung zu  $v$  eingesetzt:

$$b = \frac{2mgh_s \sin \alpha}{2h_s \cdot \left(m + \frac{J}{R^2}\right)} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}$$

Damit haben wir dann die gewünschte Formel.

### Literatur

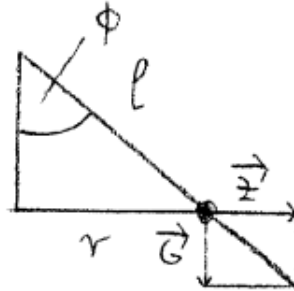
- [1] Bruno Assmann „Technische Mechanik“ Band 1 Oldenbourg Verlag 12.Auflage München 1991
- [2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980

© 2000 **Harald Schröer**

## 36. Der schwingende Körper und die rotierende Scheibe

### 1. Der schwingende Körper

Wir betrachten einen schwingenden Körper wie in der Abbildung:



$G = mg$  = Schwerkraft mit der Erdbeschleunigung  $g$

$m$  = Masse des schwingenden Körpers

$Z = \frac{mv^2}{r}$  = Zentrifugalkraft mit der Geschwindigkeit  $v$  und dem Radius  $r$

Ein stationärer Zustand kann nur erreicht werden, wenn die Resultierende aus  $G$  und  $Z$  in dieselbe Richtung zeigt wie das Pendel.  $l$  ist die Pendellänge und  $\phi$  der zugehörige Winkel. Resultierende Kraft:

$$F = \sqrt{G^2 + Z^2} = m \cdot \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}$$

Die Bedingung des stationären Zustands bedeutet:

$$\tan \phi = \frac{Z}{G} = \frac{v^2}{gr}$$

Es gilt  $r = l \sin \phi$  damit erhalten wir:

$$\tan \phi = \frac{v^2}{gl \sin \phi}$$

umgeformt:

$$v = \sqrt{gl \sin \phi \tan \phi}$$

**Umkehrung:**

$$v^2 = g \cdot l \cdot \sin \phi \cdot \tan \phi$$

mit

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 \quad \sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} \quad \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$$

folgt:

$$v^2 = gl \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \phi} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} = gl \cdot \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos \phi}$$

ausmultipliziert:

$$v^2 \cos \phi = gl - gl \cos^2 \phi$$

schließlich erhalten wir eine quadratische Gleichung:

$$\cos^2 \phi + \frac{v^2}{gl} \cdot \cos \phi - 1 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\cos \phi = +\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{2gl}\right)^2} - \frac{v^2}{2gl}$$

Hier ist nur die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen sinnvoll, sonst wird  $\cos \phi < 0$  und im Bereich  $[0, 90^\circ]$  gibt es dafür keine Lösung.

Die Winkelgeschwindigkeit bekommen wir mit  $r = l \sin \phi$ :

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{gl \sin \phi \tan \phi}{l^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \phi}} \quad \text{mit} \quad \sin \phi = \cos \phi \cdot \tan \phi$$

Es gilt für die Umlaufdauer:

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l \cos \phi}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l \cos \phi}{g}}$$

Für  $\phi \ll 90^\circ$  folgt mit  $\cos \phi \approx 1$  die Näherung:

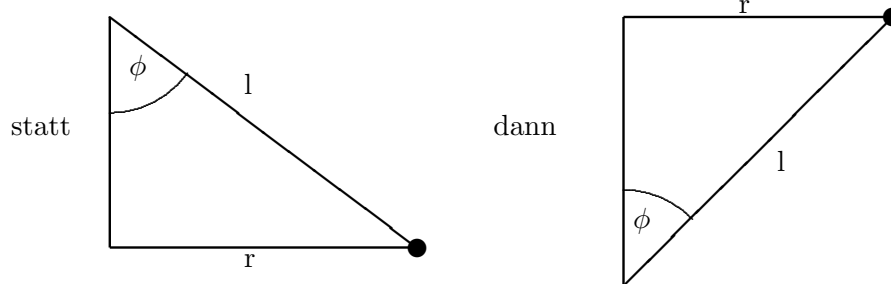
$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Der Fall im Medium kann genauso behandelt werden, wenn statt  $g$ ,  $\frac{g \cdot (\varphi_K - \varphi_F)}{\varphi_K} = g \cdot \left(1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_K}\right)$  (vgl z.B. Budo [1] §16 S.85) in die Gleichungen eingesetzt wird. Dabei ist  $\varphi_F$  die Dichte des Mediums (Flüssigkeit oder Gas) und  $\varphi_K$  die Dichte des Körpers. Das gilt auch für das folgende Kapitel.

### Begründung:

Bei diesen Fall treten nur Gravitation und Zentrifugalkraft auf. Die Zentrifugalkraft ist unabhängig vom Medium, im Falle der Kreisbewegung hängt die Zentrifugalkraft nur vom Radius und der Geschwindigkeit ab, wie man aus der Herleitung der Zentrifugalkraft sehen kann, nicht aber vom Medium. Die Gravitationsbeschleunigung verändert sich von  $g$  zu  $g \cdot \frac{\varphi_K - \varphi_F}{\varphi_K}$ . Nur bei der Gravitation tritt eine Veränderung auf, weswegen in diesem Fall  $g \cdot \left(1 - \frac{\varphi_F}{\varphi_K}\right)$  für  $g$  einfach eingesetzt werden kann.

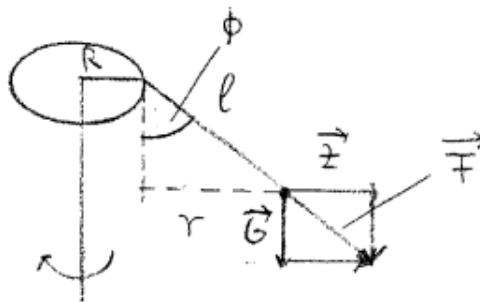
Bei  $\varphi_F > \varphi_K$  muß die Apparatur umgedreht werden.



Dann gelten wieder dieselben Gleichungen.

## 2. Die rotierende Scheibe mit schwingenden Körper

Wir schauen uns folgende Abbildung an: An einer rotierenden Scheibe hängt ein (schwingender) Körper.



$G$  = Schwerkraft mit der Erdbeschleunigung  $g$

$m$  = Masse des schwingenden Körpers

$Z$  = Zentrifugalkraft

$r$  = Radius

$w$  = Winkelgeschwindigkeit

Wir haben folgende Gleichungen (Symbole werden übernommen).

$$\tan \phi = \frac{Z}{G} \quad G = mg \quad Z = mrw^2 = m \cdot (R + l \sin \phi) \cdot w^2$$

Aus der Tangens-Gleichung erhalten wir:

$$\tan \phi = \frac{(R + l \sin \phi) \cdot w^2}{g}$$

Umgeformt zur Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{\frac{g \tan \phi}{R + l \sin \phi}}$$

Für die Geschwindigkeit besteht die Beziehung:

$$v = w \cdot r = w \cdot (R + l \sin \phi)$$

$$\text{Abweichungswinkel} = \phi = \angle(\vec{G}, \vec{G} + \vec{Z}) = \angle(\vec{G}, \vec{F}) \quad \vec{F} = \vec{G} + \vec{Z}$$

$\vec{F}$  ist die resultierende Kraft, für diese gilt:

$$F = \sqrt{G^2 + Z^2} = m \cdot \sqrt{g^2 + (R + l \sin \phi)^2 \cdot w^4}$$

## **Literatur**

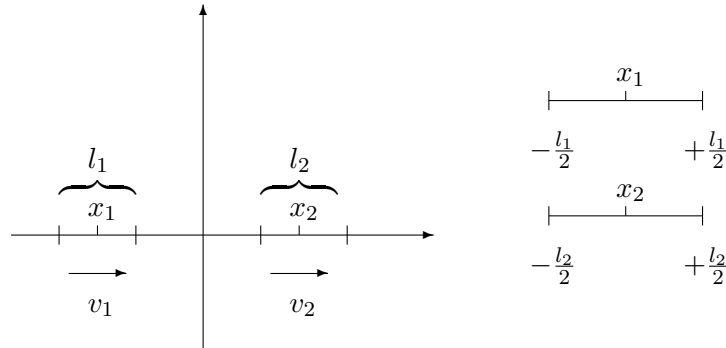
- [1] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980

© 2001 **Harald Schröder**



### 37. Der allgemeine Überholvorgang

Wir schauen uns folgende Abbildungen an:



Zwei Züge mit den Längen  $l_1$  und  $l_2$  bewegen sich im Koordinatensystem auf der x-Achse mit den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$ . Die Geschwindigkeiten sollen Funktionen der Zeit  $t$  sein.  $l_1$  und  $l_2$  brauchen dabei nicht unbedingt die wirkliche Länge zu sein. Die Kombination mit Abständen ist möglich, indem z.B. für  $l_1 = l_{r1} + 2d_1$  und  $l_2 = l_{r2} + 2d_2$  (beiderseitig gleicher Abstand) oder  $l_1 = l_{r1} + d_{11} + d_{12}$  und  $l_2 = l_{r2} + d_{21} + d_{22}$  (verschiedene Abstände) mit  $l_r$  als wirkliche Zuglänge eingesetzt werden.

Als erstes sollen die Beobachtungszeiten, die Zeiten in der ein Beobachter in einem Zug mit dazu senkrechten Blick den anderen Zug sehen kann, berechnet werden. Dazu wird für  $l_1, l_2$  eine Koordinate  $l$  eingeführt, deren Nullpunkt in der Mitte des Zuges ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{für } l_1 : & \quad -\frac{l_1}{2} \leq l \leq \frac{l_1}{2} \\ \text{für } l_2 : & \quad -\frac{l_2}{2} \leq l \leq \frac{l_2}{2} \end{aligned}$$

Zur Zeit  $t = 0$  sollen die Mittelpunkte der Züge auf den Startpunkten  $x_1$  und  $x_2$  sein.

#### Beobachtungszeit für $l_1$ :

Zum Zeitpunkt  $t_1$  müssen folgende Koordinaten gleich sein:

$$x_1 + l + \int_0^{t_1} v_1(t) dt = x_2 - \frac{l_2}{2} + \int_0^{t_1} v_2(t) dt \tag{1}$$

zu  $t_2$ :

$$x_1 + l + \int_0^{t_2} v_1(t) dt = x_2 + \frac{l_2}{2} + \int_0^{t_2} v_2(t) dt \tag{2}$$

Für die Beobachtungszeit erhalten wir  $t_b = |t_2 - t_1|$ .  $|\cdot|$  ist der Betrag. Dabei sind durchaus auch keine oder mehrere Lösungen für  $t_1$  und  $t_2$  möglich. Die Lösungen können sowohl

positiv oder negativ sein. Dann muß man sich jeweils die Position beider Züge genau ansehen, um zu entscheiden, wann die Beobachtungszeit anfängt bzw. aufhört.

**Beobachtungszeit für  $l_2$ :**

für  $t_1$ :

$$x_2 + l + \int_0^{t_1} v_2(t) dt = x_1 - \frac{l_1}{2} + \int_0^{t_1} v_1(t) dt \quad (3)$$

für  $t_2$ :

$$x_2 + l + \int_0^{t_2} v_2(t) dt = x_1 + \frac{l_1}{2} + \int_0^{t_2} v_1(t) dt \quad (4)$$

Die Beobachtungszeit ist dann wieder  $t_b = |t_2 - t_1|$ . Auch hier kann es eine, keine oder mehrere Lösungen geben. Bei komplexen Geschwindigkeitsfunktionen müssen die Positionen der Züge betrachtet werden.

**Die Überholungszeit:**

Nun geht es um die Zeit, die für das vollständige Überholen gebraucht wird. Die Berechnung der Grenzzeiten wird durch folgende Bedingungen sichergestellt.

für  $t_2$ :

$$x_1 - \frac{l_1}{2} + \int_0^{t_2} v_1(t) dt = x_2 + \frac{l_2}{2} + \int_0^{t_2} v_2(t) dt \quad (5)$$

für  $t_1$ :

$$x_1 + \frac{l_1}{2} + \int_0^{t_1} v_1(t) dt = x_2 - \frac{l_2}{2} + \int_0^{t_1} v_2(t) dt \quad (6)$$

Die Überholungszeit ergibt sich in der Gestalt  $t_w = |t_2 - t_1|$ . Für  $t_1$  und  $t_2$  kann es eine, keine oder mehrere Lösungen geben. Besonders im Fall mehrerer Lösungen müssen die jeweiligen Positionen der Züge berücksichtigt werden.

Der Überholungsweg ist nichts anderes als die Verschiebung der Positionen der Mittelpunkte  $x_m$  der Züge zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ .

bei  $t_2$ :

$$x_{m1} = x_1 + \int_0^{t_2} v_1(t) dt \quad x_{m2} = x_2 + \int_0^{t_2} v_2(t) dt$$

bei  $t_1$ :

$$x_{m1} = x_1 + \int_0^{t_1} v_1(t) dt \quad x_{m2} = x_2 + \int_0^{t_1} v_2(t) dt$$

Für die Überholungswege bekommen wir dann:

$$s_1 = \left| \int_0^{t_2} v_1(t) dt - \int_0^{t_1} v_1(t) dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} v_1(t) dt \right| \quad (7)$$

$$s_2 = \left| \int_0^{t_2} v_2(t) dt - \int_0^{t_1} v_2(t) dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} v_2(t) dt \right| \quad (8)$$

Nun sehen wir uns den speziellen Fall für zeitlich konstante Geschwindigkeiten genauer an.

**Beobachtungszeit für  $l_1$ :**

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich nach der Integration umgeformt für  $t_1, t_2$ :

$$t_1 = \frac{x_2 - x_1 - \frac{l_2}{2} - l}{v_1 - v_2} \quad t_2 = \frac{x_2 - x_1 + \frac{l_2}{2} - l}{v_1 - v_2}$$

und daraus:

$$t_b = \frac{l_2}{|v_1 - v_2|}$$

**Beobachtungszeit für  $l_2$ :**

Integration und Umformung von den Gleichungen (3) und (4) nach  $t_1$  und  $t_2$ :

$$t_2 = \frac{x_2 - x_1 + l - \frac{l_1}{2}}{v_1 - v_2} \quad t_1 = \frac{x_2 - x_1 + l + \frac{l_1}{2}}{v_1 - v_2}$$

wir bekommen:

$$t_b = \left| \frac{-l_1}{v_1 - v_2} \right| = \frac{l_1}{|v_1 - v_2|}$$

Nun berechnen wir die Überholungszeit. Integration und Umformung von den Gleichungen (5) und (6):

$$t_2 = \frac{x_1 - x_2 - \frac{l_1}{2} - \frac{l_2}{2}}{v_2 - v_1} \quad (9)$$

$$t_1 = \frac{x_1 - x_2 + \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}}{v_2 - v_1} \quad (10)$$

Für die Überholungszeit  $t_w$  bilden wir wieder die Differenz:

$$t_w = \left| \frac{-(l_1 + l_2)}{v_2 - v_1} \right| = \frac{l_1 + l_2}{|v_2 - v_1|}$$

Integration von (7) und (8) und Einsetzung von (9) und (10) führt zu den Überholungs-  
wegen:

$$s_1 = \left| -\frac{v_1 \cdot (l_1 + l_2)}{v_2 - v_1} \right| = (l_1 + l_2) \cdot \left| \frac{v_1}{v_2 - v_1} \right|$$

*G. Mechanik*

$$s_2 = \left| -\frac{v_2 \cdot (l_1 + l_2)}{v_2 - v_1} \right| = (l_1 + l_2) \cdot \left| \frac{v_2}{v_2 - v_1} \right|$$

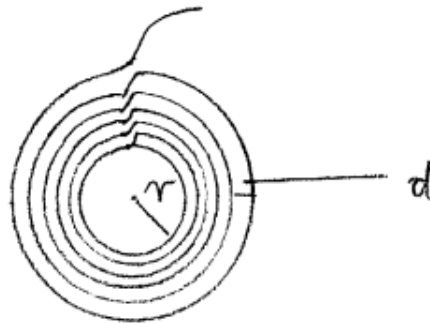
Die allgemeinen Gleichungen gelten, solange  $v_1, v_2 \ll c$  (Lichtgeschwindigkeit). Ab  $v_1 + v_2 \approx \frac{c}{10}$  muß relativistisch gerechnet werden.

© 2001 **Harald Schröder**

## 38. Die Rolle

### 1. Eine Rolle:

Wir betrachten ein Modell einer Rolle wie in der folgenden Abbildung:



Wir führen ein:

$d$ := Dicke der Schnur

$n$ := Zahl der Umdrehungen

$U$ := Länge der Schnur

Wir setzen zunächst voraus, daß die Schnur gerade so lang ist, daß

$$U = 2\pi \cdot (r + d) + 2\pi \cdot (r + 2d) + \dots + 2\pi \cdot (r + nd)$$

Mit Hilfe der Potenzsumme bekommen wir:

$$U = 2\pi \cdot \left( nr + \frac{n \cdot (n + 1) \cdot d}{2} \right) \quad (1)$$

oder:

$$U = \pi n \cdot (2r + d \cdot (n + 1)) \quad (2)$$

Wir lösen nun die Gleichung (1) nach  $n$  auf:

$$\frac{U}{2\pi} = \frac{2rn + dn^2 + nd}{2}$$

Umgeformt:

$$\frac{dn^2}{2} + \left( \frac{d}{2} + r \right) \cdot n = \frac{U}{2\pi}$$

Auf die Normalform gebracht:

$$n^2 + \left( 1 + \frac{2r}{d} \right) \cdot n = \frac{U}{d\pi}$$

Das ist eine quadratische Gleichung für  $n$ . Wir wenden die bekannte Lösungsformel an:

$$n = +\sqrt{\frac{U}{d\pi} + \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{d}\right)^2} - \frac{1}{2} - \frac{r}{d}$$

Nun formen wir die Gleichung (2) nach  $d$  um:

$$d = \frac{\frac{U}{\pi n} - 2r}{n + 1} = \frac{U - 2\pi r n}{\pi n \cdot (n + 1)}$$

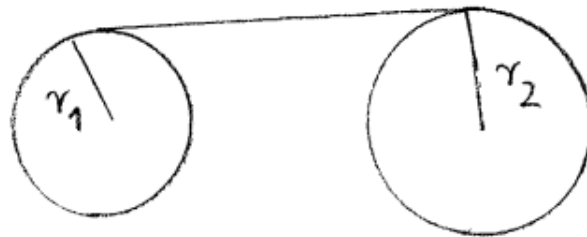
Schließlich lösen wir noch die Gleichung (2) nach  $r$  auf:

$$2r = \frac{U}{\pi n} - d \cdot (n + 1)$$

$$r = \frac{U - \pi d n \cdot (n + 1)}{2\pi n}$$

## 2. Zwei Rollen:

Nun betrachten wir die Überspülung einer Schnur von einer Rolle zu einer anderen Rolle. Man kann dabei z.B. an einen Filmprojektor denken.



$r_1, r_2$  = Radien der Rollen ohne Schnur

$d$  = Dicke der Schnur (des Filmstreifens)

$n_1, n_2$  = Zahl der Umdrehungen der Rollen  $n_1, n_2 \in \mathbb{R}^+$

$t$  = Zeit

Nach Gleichung (2) haben wir für die erste Rolle:

$$U_1 = \pi n \cdot (2r_1 + d \cdot (n + 1)) \quad (3)$$

Für die Drehung der ersten Rolle gilt der Zusammenhang  $n_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi}$ . Dabei ist  $\varphi_1$  der zurückgelegte Winkel bei der ersten Rolle in Bogenmaß. Gibt man die Winkelbeschleunigung  $\alpha_1$  der ersten Rolle vor, so ist:

$$\omega_1(t) = \int \alpha_1(t) dt + c_1$$

G. Mechanik

$\omega_1 =$  Winkelgeschwindigkeit der ersten Rolle  
 $c_i =$  Integrationskonstanten

$$\varphi_1(t) = \int \omega_1(t) dt + c_2$$

Im Spezialfall gleichmäßiger Rotation gilt  $\varphi_1 = \omega_1 \cdot t + c_2$ . Wir bestimmen nun den Durchmesser  $D_1$  der ersten Rolle mit Schnur zu:

$$D_1 = 2nd + 2r_1$$

Nun hat die Schnur oder der Filmstreifen eine bestimmte Länge  $U_g$ . Diese Länge ist bekannt. Daher bekommen wir  $U_2 = U_g - U_1$ . Mit der Gleichung (3) und  $n_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi}$  erhalten wir:

$$U_2 = U_g - \pi \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} \cdot \left( 2r_1 + d \cdot \left( \frac{\varphi_1}{2\pi} + 1 \right) \right)$$

Andererseits haben wir für  $U_2$  wegen Gleichung (2) die Darstellung:

$$U_2 = \pi n_2 \cdot (2r_2 + d \cdot (n_2 + 1))$$

Wir lösen diese Gleichung nun nach  $n_2$  auf. Das geht genauso wie die Auflösung von  $U$  nach  $n$  im ersten Teil:

$$n_2 = + \sqrt{\frac{U_2}{d\pi} + \left( \frac{1}{2} + \frac{r_2}{d} \right)^2} - \frac{1}{2} - \frac{r_2}{d}$$

Dann bekommen wir:

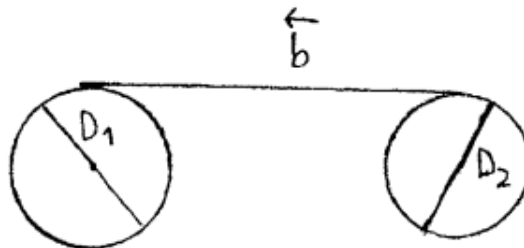
$$D_2 = 2n_2d + 2r_2$$

$D_2$  ist der Durchmesser der zweiten Rolle mit Schnur.

Die Schnur wird mit mit **einer** Beschleunigung  $b$  von der ersten Rolle gezogen.

$$b = \frac{D_1(t) \cdot \alpha_1(t)}{2} = \frac{D_2(t) \cdot \alpha_2(t)}{2}$$

Dazu kann man die folgende Abbildung betrachten:



Es folgt für die Winkelbeschleunigung der zweiten Rolle:

$$\alpha_2 = \frac{D_1 \cdot \alpha_1}{D_2}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit der zweiten Rolle gilt:  
( $c_i$  = Integrationskonstante)

$$\omega_2(t) = \int \alpha_2(t) dt + c_3$$

Für den zurückgelegten Winkel der zweiten Rolle erhalten wir:

$$\varphi_2(t) = \int \omega_2(t) dt + c_4$$

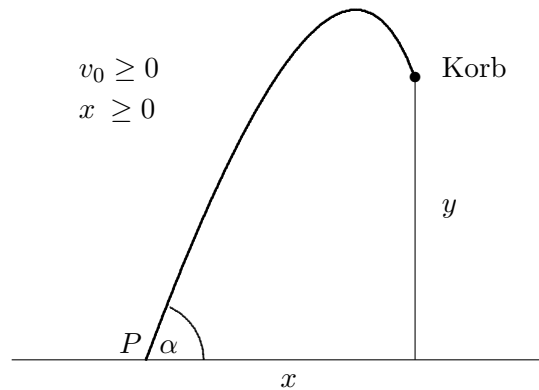
Die Erweiterung von  $n_1, n_2$  auf die Menge der positiven reellen Zahlen ist hier zweckmäßig. Sonst könnte es Schwierigkeiten mit den Integralen geben. Es ist klar, daß diese Gleichungen das Verhalten der beiden Rollen nur näherungsweise darstellen. Die Gleichungen gelten um so genauer, desto kleiner die Dicke  $d$  der Schnur ist.



### 39. Das Basketballproblem

Beim Basketball stellt sich das Problem einen Korb in einer gewissen Entfernung und in einer gewissen Höhe zu treffen. Die Größen, die man beim schiefen Wurf verändern kann, sind die Anfangsgeschwindigkeit und der Wurfwinkel. Wir berücksichtigen zunächst den Luftwiderstand nicht.

Der Korb hat vom Abwurfort  $P$  den Abstand  $x$  und die Höhe  $y$ . Im Punkt  $P$  soll der Ursprung ( $x = 0, y = 0$ ) des Koordinatensystems sein.



$a =$  Wurfwinkel  $0^\circ \leq a \leq 90^\circ$

$v_0 =$  Anfangsgeschwindigkeit

$g =$  Erdbeschleunigung

Wir benötigen nun die bekannte Wurfbahngleichung für den schiefen Wurf:

$$y = x \cdot \tan a - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 a}$$

Wir formen nun nach  $v_0$  um:

$$\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 a} = x \tan a - y$$

$$v_0 = \frac{x}{\cos a} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (x \tan a - y)}} \quad (1)$$

Damit haben wir  $v_0(a)$  also die Anfangsgeschwindigkeit als Funktion des Wurfwinkels.

Nun geht es darum den Wurfwinkel als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit zu ermitteln. Dazu setzen wir in die Wurfbahngleichung  $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$  ein und erhalten:

$$y = x \tan a - \frac{gx^2 \cdot (1 + \tan^2 a)}{2v_0^2}$$

Schrittweise umgeformt:

$$\frac{2v_0^2 y}{gx^2} = \frac{2v_0^2 \tan a}{gx} - 1 - \tan^2 a$$

Dann bekommen wir folgende quadratische Gleichung in  $\tan a$ :

$$\tan^2 a - \frac{2v_0^2 \tan a}{gx} = -\frac{2yv_0^2}{gx^2} - 1$$

Nun wenden wir die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen an:

$$\tan a_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \frac{2yv_0^2}{gx^2} - 1} + \frac{v_0^2}{gx} \quad (2)$$

Es gibt also zwei mögliche Lösungen für  $a(v_0)$ . Damit haben wir den Wurfwinkel in Abhängigkeit von der Anfangsgeschwindigkeit. Die Gleichungen (2) und (1) erlauben uns nun entweder zur gegebenen Anfangsgeschwindigkeit den passenden Wurfwinkel oder zu einem gegebenem Wurfwinkel die passende Anfangsgeschwindigkeit zu finden.

Nun behandeln wir dasselbe Problem in einem Medium (Gas) mit konstanter Dichte. Für Wurfbahnen gelten nach Budo [1] §16 S.85 Gleichung (22):

$$m\dot{v}_x = -F(v) \cdot \frac{v_x}{v}$$

$$m\dot{v}_y = -mg - F(v) \cdot \frac{v_y}{v}$$

mit:

$v$  = Geschwindigkeitsbetrag

$$v(t) = |(v_x(t), v_y(t))| := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

$t$  = Zeit

$m$  = Masse des Balls

$F(v)$  = Bremskraft im Medium

Der Punkt über  $v$  bedeutet Ableitung nach der Zeit.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Fall  $F(v) = kv$ .  $k$  ist eine bestimmte Konstante. Diese Annahme ist bei kleinen Geschwindigkeiten und kleinen Körpern erfüllt. Die beiden Differentialgleichungen vereinfachen sich dann zu:

$$m\dot{v}_x = -kv_x$$

$$m\dot{v}_y = -mg - kv_y$$

Setzen wir  $\dot{x} = v_x$  und  $\dot{y} = v_y$ , so sind nach Heuser [2] Kapitel 5 S.78:

$$x(t) = \frac{mv_0 \cos a}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \quad (3)$$

$$y(t) = \frac{m}{k} \cdot \left( v_0 \sin a + \frac{mg}{k} \right) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{mgt}{k} \quad (4)$$

die Lösungen der beiden Differentialgleichungen.

Nun geht es wieder darum, die Abhängigkeit zwischen Wurfwinkel  $a$  und Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  zu ermitteln. Wir formen Gleichung (3) um:

$$\begin{aligned} \frac{xk}{mv_0 \cos a} &= 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \\ \Rightarrow e^{-\frac{kt}{m}} &= 1 - \frac{xk}{mv_0 \cos a} \end{aligned}$$

schließlich:

$$t = -\frac{m}{k} \cdot \ln \left( 1 - \frac{xk}{mv_0 \cos a} \right)$$

Wir setzen nun die Ausdrücke von  $t$  und  $1 - e^{-\frac{kt}{m}}$  in die Gleichung (4) ein:

$$y = \frac{m}{k} \left( v_0 \sin a + \frac{mg}{k} \right) \cdot \frac{xk}{mv_0 \cos a} + \frac{m^2 g}{k^2} \cdot \ln \left( 1 - \frac{xk}{mv_0 \cos a} \right)$$

Mit  $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$  erhalten wir:

$$y = x \tan a + \frac{mgx}{kv_0 \cos a} + \frac{gm^2}{k^2} \cdot \ln \left( 1 - \frac{xk}{mv_0 \cos a} \right)$$

Die Auflösung nach  $v_0$  oder  $a$  ist hier nicht mehr möglich. Hier müssen dann numerische Verfahren eingesetzt werden z.B. Newton Verfahren. Diese Verfahren liefern dann Näherungslösungen.

Bei sehr genauen Rechnungen muß statt  $g$  die Beschleunigung  $g \cdot \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_K} \right)$  eingesetzt werden vgl. Budo [1] §16 S.85. Dabei ist:

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Dichte des Mediums (Gas)} \\ \varphi_K &= \text{Dichte des Körpers (Ball)} \end{aligned}$$

Bei größeren Geschwindigkeiten wird oft  $F(v) = Cv^2$  gesetzt.  $C$  ist dann eine bestimmte Konstante. Dieser Fall wird behandelt bei Timmermann [5], Parker [6] und Kooy [7]. Bei Budo [1] §16 S.85,86, bei Kamke [3] S.624 Nr.9-17 und bei Lohr [4] S.197-205 ist angedeutet, was in diesem Fall gemacht werden kann.

## Literatur

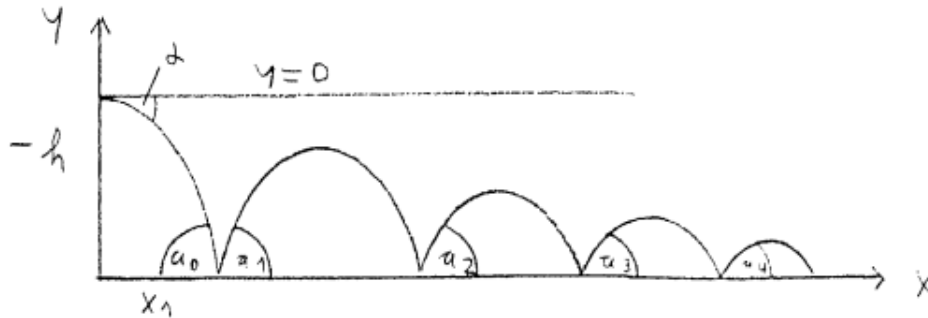
- [1] A. Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980
- [2] Harro Heuser „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ 2.Auflage B.G. Teubner Stuttgart 1991

- [3] E.Kamke „Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen“ Band I, 10. Auflage B.G. Teubner Stuttgart 1983
- [4] E.Lohr „Mechanik der Festkörper“ Walter de Gruyter Verlag Berlin 1952
- [5] P.Timmermann, J. van der Weele „On the rise and fall of a ball with linear or quadratic drag“ Am. J. Phys. 67 (6), June 1999 p.538-546
- [6] G.W.Parker „Projectile motion with air resistance quadratic in the speed“ Am. J. Phys. 45, p.606-610 (1977)
- [7] J.M.J.Kooy and J.W.H.Uytenbogaart, „Ballistics of the Future“ (Technical University H.Stam, Haarlem, 1946), p.118-131

© 2001 **Harald Schröer**

## 40. Aufeinanderfolgende Wurfbahnen

Fällt ein Körper zu Boden, dann wird er reflektiert und beschreibt eine Wurfbahn. Eine erneute Reflektion erfolgt und eine etwas kleinere Wurfbahn. Wir schauen uns folgende Zeichnung an:



Bemerkenswert ist, daß die Winkel  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  alle gleich sind. Der Körper startet von einer Höhe  $h$  über den Boden.  $x_1$  ist die x-Koordinate beim ersten Bodenkontakt. Wir setzen in die bekannte Wurfbahngleichung für den schiefen Wurf ein:

$$-h = x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2v_A^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Dabei sind:

$\alpha$  = Wurfwinkel

$g$  = Erdbeschleunigung

$v_A$  = Anfangsgeschwindigkeit

Wir formen nun nach  $x_1$  um:

$$x_1^2 - \frac{2v_A^2 \cdot \tan \alpha \cos^2 \alpha}{g} \cdot x_1 = \frac{2hv_A^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

Das ist eine quadratische Gleichung in Normalform. Mit der bekannten Lösungsformel erhalten wir:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{2hv_A^2 \cos^2 \alpha}{g} + \frac{v_A^4 \tan^2 \alpha \cos^4 \alpha}{g^2}} + \frac{v_A^2 \tan \alpha \cos^2 \alpha}{g}$$

Nun verwenden wir  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ :

$$x_1 = +\sqrt{\frac{2hv_A^2 \cos^2 \alpha}{g} + \frac{v_A^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2}} + \frac{v_A^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

und mit  $\frac{\sin 2\alpha}{2} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ :

$$x_1 = +\sqrt{\frac{2hv_A^2 \cos^2 \alpha}{g} + \frac{v_A^4 \sin^2(2\alpha)}{4g^2}} + \frac{v_A^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (1)$$

$x_1$  ist damit bekannt. Um  $a_0$  zu ermitteln, wird die Wurfbahngleichung abgeleitet:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_A^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{gx}{v_A^2 \cos^2 \alpha}$$

$x_1$  eingesetzt:

$$y'(x_1) = \tan \alpha - \frac{gx_1}{v_A^2 \cos^2 \alpha}$$

Es ist  $y'(x_1) < 0$  daher  $-y'(x_1) = \tan a_0$ .

Nun ermitteln wir die erste Aufprallgeschwindigkeit  $v_0$  mit Hilfe des Energiesatzes:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_A^2}{2} + m_1 gh \quad h > 0$$

$m_1$  ist die Masse des Körpers.

$$\Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + 2gh$$

Nun brauchen wir die Zeit  $t_A$  bis zum ersten Aufprall. Wir wenden dazu die zeitliche Wurfbahngleichung an:

$$-h = v_A t_A \sin \alpha - \frac{gt_A^2}{2}$$

Es folgt:

$$t_A^2 - \frac{2v_A \sin \alpha \cdot t_A}{g} = \frac{2h}{g}$$

Also eine quadratische Gleichung für  $t_A$ , für die wir die bekannte Lösungsformel anwenden:

$$t_A = +\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_A^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} + \frac{v_A \sin \alpha}{g} \quad (2)$$

Um die Geschwindigkeit  $v_1$  nach dem ersten Stoß auszurechnen benötigen wir die Geschwindigkeitsformel für den teilelastischen Stoß. Der zweite Körper ist der Boden und hat vor dem Stoß die Geschwindigkeit Null. Dann erhalten wir nach Kuchling [1] Kapitel 7.3.5 S.121 Formel M 7.40:

$$v_1 = v_0 \cdot \left| \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \right| = v_0 \cdot a$$

$m_1$  = Masse des Körpers

$|\cdot|$  = Betrag

$m_2$  = Masse des Bodens

$k$  = Stoßzahl  $k \in [0, 1]$

Die Stoßzahl kann mit einer Methode in Kuchling [1] Kapitel 7.3.5 S.122 bestimmt werden.

Bei  $k = 1$  liegt ein elastischer Stoß vor. Bei  $k = 0$  haben wir einen unelastischen Stoß. In diesem Fall wird der Körper vom Boden verschluckt. Es gibt dann keine Reflektion und

keine weiteren Wurfbahnen. Deswegen soll von jetzt an  $k > 0$  sein. Die Geschwindigkeit wird dann um einen konstanten Faktor

$$a := \left| \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \right| \quad (3)$$

verkleinert. Beim 2.Stoß verkleinert sich die Anfangsgeschwindigkeit der Wurfbahn wiederum um den Faktor  $a$ . ( $v_2 = a \cdot v_1 = a^2 \cdot v_0$ )

Für die Anfangsgeschwindigkeit  $v_n$  nach dem  $n$ . Stoß bzw. für die  $n$ . Wurfbahn erhalten wir:

$$v_n = a \cdot v_{n-1} = a^n \cdot v_0$$

Damit können wir nun die  $n$ .Wurfbahn betrachten. Der Wurfwinkel  $a_0$  bleibt immer derselbe.

Wurfbahnzeitgleichung:

$$\bar{y} = v_n \cdot t \sin a_0 - \frac{gt^2}{2}$$

Wurfbahngleichung:

$$\bar{y} = x \cdot \tan a_0 - \frac{gx^2}{2v_n^2 \cos^2 a_0}$$

Steigzeit:

$$t_{sn} = \frac{v_n \cdot \sin a_0}{g}$$

Wurfzeit:

$$t_{wn} = \frac{2v_n \cdot \sin a_0}{g} = \frac{2v_0 \cdot \sin a_0}{g} \cdot a^n$$

Steighöhe:

$$h_{sn} = \frac{v_n^2 \cdot \sin^2 a_0}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 a_0}{2g} \cdot a^{2n}$$

Beim senkrechten Wurf ist  $\sin a_0 = 1$ , dann bekommen wir für die Steighöhe mit Gleichung (3):

$$h_{sn} = \frac{v^2}{2g} \cdot \left| \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \right|^{2n}$$

Beim vollen elastischen Stoß ( $k = 1$ ) ist die Steighöhe:

$$h_s = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 a_0}{2g} \cdot \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right|^{2n}$$

Die Wurfweite ergibt sich schließlich:

$$s_{wn} = \frac{v_n^2 \cdot \sin 2a_0}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2a_0}{g} \cdot a^{2n} \quad (4)$$

Wir berechnen nun die Dauer  $t_G$  des gesamten Vorgangs:

$$t_G = t_A + \sum_{i=1}^{\infty} t_{wi}$$

## G. Mechanik

$$= t_A + \frac{2v_0 \sin a_0}{g} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a^i$$

Das ist eine geometrische Reihe, für  $k \in (0, 1]$  erhalten wir:

$$t_G = t_A + \frac{2v_0 \sin a_0}{g} \cdot \frac{a}{1-a}$$

$a$  und  $t_A$  können nach den Gleichungen (3) und (2) ausgerechnet werden.

Es erfolgt die Bestimmung der gesamten Strecke:

$$\begin{aligned} s_{wG} &= x_1 + \sum_{i=1}^{\infty} s_{wi} \\ &= x_1 + \frac{v_0^2 \sin 2a_0}{g} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i} \end{aligned}$$

Hier benutzen wir wieder für  $k \in (0, 1]$  die geometrische Reihe:

$$s_{wG} = x_1 + \frac{v_0^2 \sin 2a_0}{g} \cdot \frac{a^2}{1-a^2}$$

Zur Ermittlung von  $x_1$  und  $a$  dienen die Gleichungen (1) und (3). Mit Hilfe der geometrischen Summen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a^i &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - 1 \\ \sum_{i=1}^n a^{2i} &= \frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2} - 1 \end{aligned}$$

können schließlich die Summen

$$\sum_{i=1}^n t_{wi} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n s_{wi}$$

ermittelt werden.

## Literatur

- [1] Horst Kuchling „Taschenbuch der Physik“ 1979 Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main

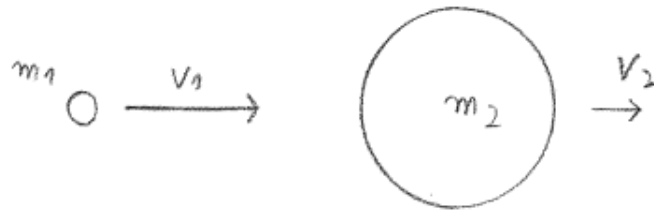
© 2001 Harald Schröder



## 41. Besondere Formen des elastischen Stoßes und das ballistische Pendel

### 1. Besondere Formen des elastischen Stoßes

Wir wollen beim elastischen Stoß einige interessante Fälle untersuchen. Wir kennen die Formeln für den elastischen Stoß, wobei  $v$  die Geschwindigkeit vor dem Stoß und  $u$  die Geschwindigkeit nach dem Stoß sein soll.



Zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  stoßen zusammen. Allgemein gilt für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + v_1 \cdot (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + v_2 \cdot (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Nun soll gelten  $m_1 \ll m_2$  und  $v_1 \gg v_2$  wie in der Abbildung:

$$u_1 \approx \frac{2m_2v_2 - m_2v_1}{m_2} = 2v_2 - v_1 \approx -v_1$$

Das letzte Ergebnis spiegelt z.B. die Reflektion eines Teilchens an einer Wand wieder. Für  $u_2$  bekommen wir unter denselben Voraussetzungen:

$$u_2 \approx \frac{2m_1v_1 + m_2v_2}{m_2} = \frac{2m_1v_1}{m_2} + v_2$$

Ist zudem  $v_2 = 0$  so folgt:

$$u_2 \approx \frac{2m_1v_1}{m_2}$$

Nun untersuchen wir den Fall  $m_1 \gg m_2$  und  $|v_2| \gg v_1$  mit  $v_2 < 0$  (der zweite Körper fliegt entgegen). Dann erhalten wir:

$$u_1 \approx \frac{2m_2v_2 + m_1v_1}{m_1} = 2v_2 \cdot \frac{m_2}{m_1} + v_1$$

Bei  $v_1 = 0$  vereinfacht sich der Term auf:

$$u_1 \approx 2 \cdot v_2 \cdot \frac{m_2}{m_1}$$

Der Term für  $u_2$  sieht folgendermaßen aus:

$$u_2 \approx \frac{2m_1v_1 - m_1v_2}{m_1} = 2v_1 - v_2$$

Bei  $v_1 = 0$  folgt  $u_2 \approx -v_2$ .

Man kann in beiden Fällen sagen, daß der kleine Körper mit praktisch gleicher Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung reflektiert wird. Beim großen Körper sind Massenverhältnis, Geschwindigkeit des kleinen Körpers und seine eigene Geschwindigkeit maßgebend.

Nun betrachten wir den Fall  $m_1 \gg m_2$  und  $v_1 \gg v_2$ :

$$u_1 \approx \frac{v_1 \cdot (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \approx v_1$$

$$u_2 \approx \frac{2m_1v_1 - m_1v_2}{m_1} = 2v_1 - v_2 \approx 2v_1$$

Nun schauen wir uns noch den Fall  $m_1 \ll m_2$  und  $v_1 \ll v_2$  an:

$$u_1 \approx \frac{2m_2v_2 - m_2v_1}{m_2} = 2v_2 - v_1 \approx 2v_2$$

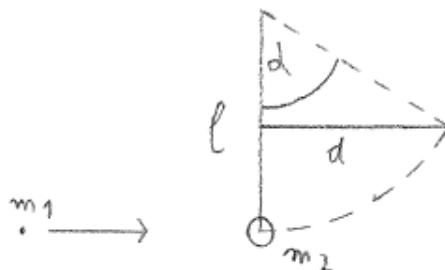
$$u_2 \approx \frac{v_2 \cdot (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \approx v_2$$

Bei den letzten beiden Fällen haben wir folgendes Resultat:

Der große Körper verändert seine Geschwindigkeit nicht oder nur geringfügig. Der kleine Körper erhält als Geschwindigkeit das Doppelte der Geschwindigkeit des großen Körpers vor dem Stoß.

## 2. Das ballistische Pendel

Wir betrachten das folgende Pendel:



## G. Mechanik

Aus einem Gewehr oder einer Pistole wird eine Kugel mit der Masse  $m_1$  abgefeuert. Diese stößt mit der Masse  $m_2$  am Pendel unelastisch zusammen. Das Pendel schlägt dann um den Winkel  $\alpha$  aus. Das Ziel ist es die Geschwindigkeit der Masse  $m_1$  festzustellen.  $l$  ist die Pendellänge. Die Kugel  $m_1$  wird mit der Geschwindigkeit  $v_1$  abgeschossen. Sie stößt mit der ruhenden Masse  $m_2$  unelastisch zusammen. Es gilt hier dann  $v_2 = 0$ . Die beiden Massen haben nach den Stoß die Geschwindigkeit:

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

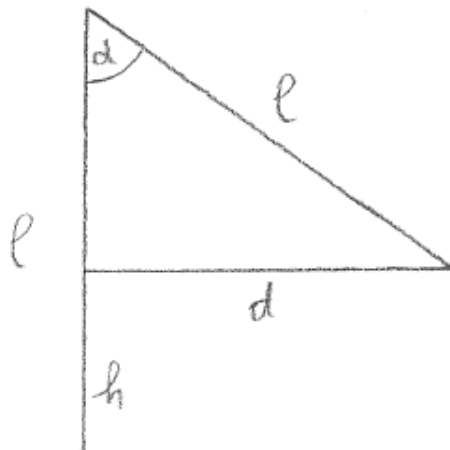
Der Zusammenhang der Geschwindigkeit  $u$  und der erreichten Höhe läßt sich mit dem Energieerhaltungssatz feststellen. Mit  $M = m_1 + m_2$  haben wir:

$$\frac{Mu^2}{2} = Mgh$$

Daraus folgt:

$$u = \sqrt{2gh}$$

$g$  = Erdbeschleunigung



Nach der Abbildung ist  $h = l \cdot (1 - \cos \alpha)$ . Daraus folgt:

$$u = \sqrt{2gl \cdot (1 - \cos \alpha)}$$

Gleichung (1) umgeformt:

$$v_1 = \frac{u \cdot (m_1 + m_2)}{m_1} \quad (2)$$

Wir setzen  $u$  ein:

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{2gl \cdot (1 - \cos \alpha)}}{m_1} \quad (3)$$

oder

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{2gh}}{m_1}$$

Damit haben wir einen Ausdruck für die Geschwindigkeit  $v_1$ .  $\alpha$  oder  $h$  muß dafür gemessen werden. Sollte die Auslenkung  $d$  gemessen werden, so kann mit  $d = l \cdot \sin \alpha$  der Winkel  $\alpha$  bestimmt werden.

Wir lösen Gleichung (3) nun nach  $\cos \alpha$  auf:

$$\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = 2gl \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{m_1^2 v_1^2}{2gl \cdot (m_1 + m_2)^2}$$

Damit ist nun möglich auch umgekehrt aus der Geschwindigkeit  $v_1$  den Winkel  $\alpha$  und damit auch die Auslenkung  $d$  zu bestimmen.

Wir schauen uns nun den gewöhnlichen Fall  $m_2 \gg m_1$  an. Nun soll  $\alpha$  in Bogenmaß sein. Dann haben wir mit der Taylorreihe vom Kosinus:

$$1 - \cos \alpha = \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!} - + \dots$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Ist  $\alpha \ll \frac{\pi}{2}$ , so bekommen wir:

$$1 - \cos \alpha \approx \frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{d^2}{2l^2}$$

In Gleichung (3) bei  $1 - \cos \alpha$  eingesetzt:

$$v_1 \approx d \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

umgeformt nach  $d$ :

$$d \approx \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

In diesen Fall lassen sich die beiden letzten Terme noch durch

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} \approx \frac{m_2}{m_1}$$

vereinfachen.

## 42. Interferenz bei zwei Wellenerregern

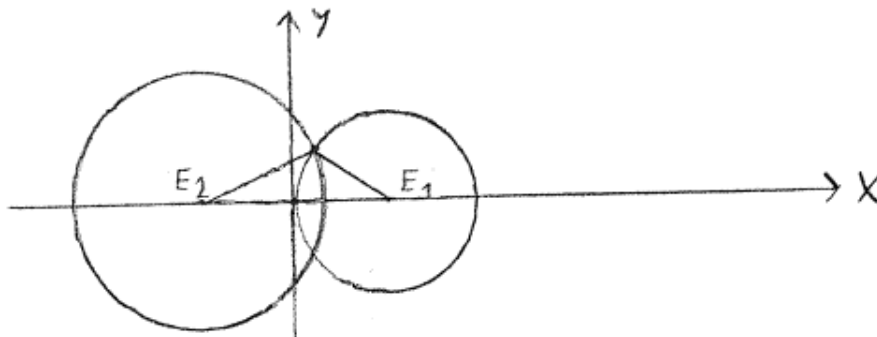
Interferenz ist eine bekannte Erscheinung bei allen Wellen. Zum Beispiel bei Schallwellen, Wasserwellen und Lichtwellen. Optische Interferenzen gibt es bei den Newton-Ringen, beim Spalt, Doppelspalt und an dünnen Schichten. Wir behandeln hier die Transversalwellen, die die elektromagnetischen Wellen und auch Wasserwellen enthalten. Die Schallwellen sind Longitudinalwellen und werden hier nicht betrachtet.

Wir untersuchen den Interferenzbereich zwischen zwei Wellenerregern mit Transversalwellen.

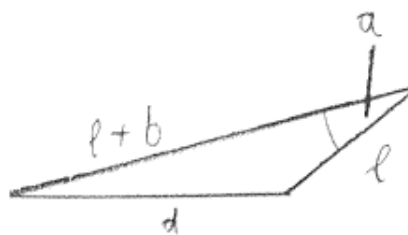
$d$  = Abstand der beiden Wellenerreger

$b$  = Gangunterschied, Länge des Unterschieds

$\lambda$  = Wellenlänge der ausgesandten Wellen



Wir gehen von der einfachsten Welle, der sinusförmigen Welle aus. Bei Interferenzlinien muß  $b = \frac{2n-1}{2} \cdot \lambda$   $n \in N$  sein.



Es soll zuerst der Winkel  $a$  mit Hilfe des Kosinussatzes berechnet werden. Es gilt:

$$d^2 = (l+b)^2 + l^2 - 2 \cdot (l+b) \cdot l \cos a$$

Aufgelöst:

$$\cos a = \frac{(l+b)^2 + l^2 - d^2}{2 \cdot (l+b) \cdot l} = \frac{2l^2 + 2bl + b^2 - d^2}{2l^2 + 2bl} = 1 + \frac{b^2 - d^2}{2l^2 + 2bl}$$

Es ist  $a \in [0^\circ, 180^\circ]$  daraus folgt  $\cos a \leq 1$ . Also muß

$$1 + \frac{b^2 - d^2}{2l^2 + 2bl} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2 - d^2}{2l^2 + 2bl} \leq 0$$

sein. Es gilt  $l, b \geq 0$  also  $2l^2 + 2bl \geq 0$  damit  $b^2 - d^2 \leq 0$  oder  $b \leq d$ .

Das ist die Bedingung für die Entstehung von Interferenzlinien oder allgemeiner Phasenverschiebungslinien. Für die Interferenz erhalten wir:

$b = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots, \frac{2n_{max}-1}{2} \cdot \lambda \leq d$  also:

$$\frac{2n_{max}-1}{2} \cdot \lambda \leq d \quad \Leftrightarrow \quad 2n_{max}-1 \leq \frac{2d}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad 2n_{max} \leq \frac{2d}{\lambda} + 1$$

$$n_{max} \leq \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{2} \quad n_{max} \in N_0$$

ist die Bedingung für die Zahl der Interferenzlinien.

Nun soll die Interferenzgleichung hergeleitet werden, dabei soll wieder allgemein  $b \geq 0$  eingesetzt werden. Es handelt sich um zwei Kreise, deshalb wird die Kreisgleichung verwendet:

$$(l+b)^2 = y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$l^2 = y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Gleichung (2) von Gleichung (1) subtrahiert ergibt:

$$2lb + b^2 = 2xd \quad \Leftrightarrow \quad l = \frac{2xd - b^2}{2b}$$

Einsetzung von  $l$  bei (2) und Umformung nach  $y$ :

$$y^2 = \left(\frac{2xd - b^2}{2b}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

vereinfacht:

$$y^2 = \left(\frac{xd}{b} - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \quad (3)$$

Mit dieser Koordinatengleichung können Kurven mit bestimmten Gangunterschied  $b$  bestimmt werden. Setzen wir für den Interferenzfall  $b = \frac{2n-1}{2} \cdot \lambda$   $n \in N$  ein, so bekommen wir die Interferenzkoordinatengleichung:

$$y^2 = \left(\frac{2xd}{(2n-1) \cdot \lambda} - \frac{2n-1}{4} \cdot \lambda\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \quad 1 \leq n \leq n_{max}$$

Ein anderer Fall ist die maximale Verstärkung, es gilt dann  $b = n \cdot \lambda$   $n \in N_0$ .

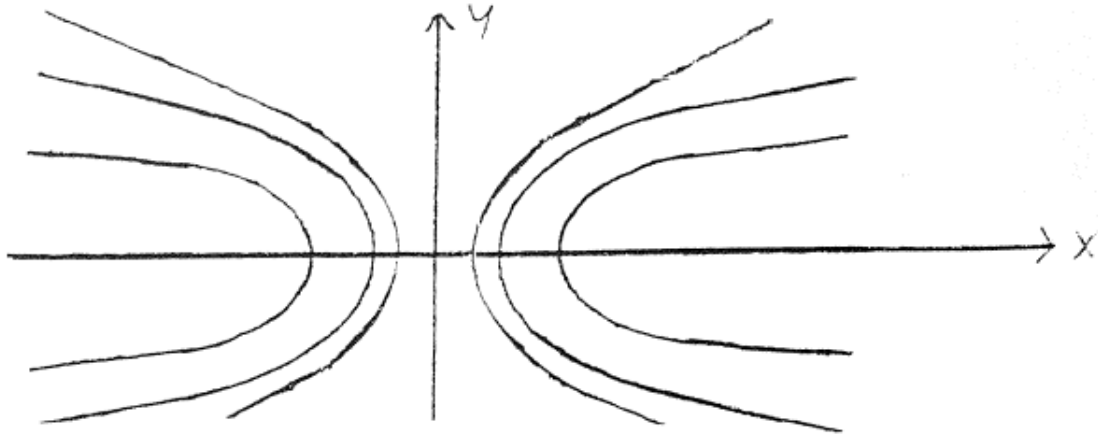
Näherungen von (3):

$$y^2 \approx \left(\frac{xd}{b}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \quad x, d \gg b$$

oder bei Interferenz:

$$y^2 \approx \left( \frac{2xd}{(2n-1) \cdot \lambda} \right)^2 - \left( x - \frac{d}{2} \right)^2 \quad x, d \gg \lambda$$

Es können noch weitere Spezialfälle berechnet werden.



Das Bild zeigt Interferenzkurven.

Die Ableitung von (3) lautet nach Kettenregel:

$$y' = \frac{\left( \frac{xd}{b} - \frac{b}{2} \right) \cdot \frac{d}{b} - \left( x - \frac{d}{2} \right)}{\sqrt{\left( \frac{xd}{b} - \frac{b}{2} \right)^2 - \left( x - \frac{d}{2} \right)^2}}$$

für  $x \gg d, b$ :

$$y' \approx \frac{x \cdot \left( \frac{d^2}{b^2} - 1 \right)}{x \cdot \sqrt{\frac{d^2}{b^2} - 1}} = \sqrt{\frac{d^2}{b^2} - 1}$$

Für den Winkel  $\alpha$  haben wir:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{\left( \frac{xd}{b} - \frac{b}{2} \right)^2 - \left( x - \frac{d}{2} \right)^2}}{x}$$

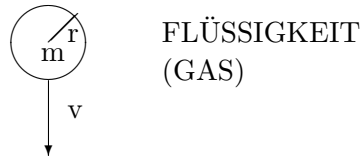
Bei  $x \gg d, b$  folgt daraus:

$$\tan \alpha \approx \frac{x \cdot \sqrt{\frac{d^2}{b^2} - 1}}{x} = \sqrt{\frac{d^2}{b^2} - 1} \quad (4)$$

Das bedeutet Grenzübergang zur Tangente und Asymptote.

### 43. Der Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit (Gas)

Wir betrachten hier den Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit(Gas). Zuerst wird eine Differentialgleichung des Falls in einer zähen Flüssigkeit (Gas) entwickelt. Dann wird diese Differentialgleichung mit der Separation der Variablen gelöst. Die Lösung ist die Geschwindigkeitsfunktion. Durch Integration wird die Tiefe bzw. Höhe ermittelt.



Bezeichnungen der Größen:

$m$ = Masse der Kugel

$r$ = Radius der Kugel

$v$ = Geschwindigkeit der Kugel

$b$ = Beschleunigung der Kugel

$s$ = zurückgelegte Strecke (Fallhöhe) von der Kugel

$\varphi_K$ = Dichte der Kugel

$\varphi$ = Dichte der Flüssigkeit (Gas)

$\eta$ = dynamische Viskosität (Zähigkeit) der Flüssigkeit (Gas)

$c_w$ = Widerstandsbeiwert

$t$ = Zeit

$g$ = Erdbeschleunigung

$\lambda$ = mittlere freie Weglänge bei Gasen

$$a := 1 - \frac{\varphi}{\varphi_K}$$

$F(v)$ = Widerstandskraft im Medium

**a) bei Flüssigkeiten:**

$$F(v) = \alpha_1 v^2 + \beta_1 v \quad (1)$$

$\alpha_1$  und  $\beta_1$  sind Funktionen von  $r, \varphi_K, \varphi, \eta$  und  $c_w$ . Nach Budo [1] §92 p.525 (92.28), §94 p.535 (94.6), Kuchling [3] Kapitel 10.3.1. p.165 (M 10.20) und Timmermann [5] gilt diese Formel für  $\frac{\varphi r v}{\eta} < 1$ .

**b) bei Gasen:**

$$F(v) = \alpha_1 v^2 + \beta_1 v \quad (2)$$

Dabei sind  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  Funktionen von  $r, \varphi_K, \varphi, \eta, c_w$  und  $\lambda$ . Das gilt für  $\frac{\lambda}{r} < 1$  nach Budo [1] §92 p.525 zwischen (92.28) und (92.29), nach Kuchling [3] Kapitel 10.3.1. p.165 (M 10.20) und Timmermann [5].



**Gleichung der Bewegung:**

Nach Budo [1] §16 p.83 (16.3) und p.85 (16.21) gilt:

$$m\dot{v} = mag - F(v) \quad v(0) = 0$$

also ein Anfangswertproblem

Dieses Anfangswertproblem kann mit der Separation der Variablen behandelt werden.

$$F(v) = \alpha_1 v^2 + \beta_1 v \quad \alpha_1, \beta_1 > 0$$

$$m\dot{v} = mag - \alpha_1 v^2 - \beta_1 v$$

$$\dot{v} = A - Bv - Cv^2 \quad v(0) = 0$$

mit

$$A := ag \quad B := \frac{\beta_1}{m} \quad C := \frac{\alpha_1}{m} \quad B, C > 0$$

Ist  $a = 1 - \frac{\varphi}{\varphi_K} > 0$  so ist  $A > 0$   
(Bewegung nach unten)

Ist  $a < 0$  so folgt  $A < 0$   
(Bewegung nach oben)

**Grenzwgeschwindigkeit:**

$$0 = \dot{v} = A - Bv - Cv^2$$

$$0 = Cv^2 + Bv - A$$

$$0 = v^2 + \frac{B}{C}v - \frac{A}{C}$$

$$v_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{A}{C} + \left(\frac{B}{2C}\right)^2} - \frac{B}{2C}$$

$$= -\frac{B}{2C} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4C^2} + \frac{4AC}{4C^2}}$$

$$= \frac{1}{2C} \cdot \left(-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}\right)$$

$$v_1 = \frac{1}{2C} \cdot \left(-B + \sqrt{B^2 + 4AC}\right) > 0$$

bei  $A > 0$

Ist  $A < 0$ , so ist  $v_1 < 0$ .

$$v_2 = \frac{1}{2C} \left( -B - \sqrt{B^2 + 4AC} \right) < 0$$

Polynomzerlegung:

$$A - Bv - Cv^2 = -C(v - v_1)(v - v_2)$$

**Partialbruchzerlegung:**

$$\frac{1}{A - Bv - Cv^2} = \frac{\alpha}{v - v_1} + \frac{\beta}{v - v_2}$$

$$1 = -C\alpha(v - v_2) - C\beta(v - v_1)$$

$$v = v_1 \Rightarrow 1 = -C\alpha(v_1 - v_2) \quad \alpha = \frac{-1}{C(v_1 - v_2)}$$

$$v = v_2 \Rightarrow 1 = -C\beta(v_2 - v_1) \quad \beta = \frac{1}{C(v_1 - v_2)}$$

also folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{v}} &= \frac{1}{A - Bv - Cv^2} = \frac{-1}{C(v_1 - v_2)(v - v_1)} + \frac{1}{C(v_1 - v_2)(v - v_2)} \\ &= \frac{-1}{C(v_1 - v_2)} \left( \frac{1}{v - v_1} - \frac{1}{v - v_2} \right) \end{aligned}$$

**Integration:** (Separation der Variablen)

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{dv}{A - Bv - Cv^2} = \int \frac{-1}{C(v_1 - v_2)} \cdot \left( \frac{1}{v - v_1} - \frac{1}{v - v_2} \right) dv \\ &= \frac{-1}{C(v_1 - v_2)} \cdot (\ln |v - v_1| - \ln |v - v_2|) = t + d_1 \end{aligned}$$

$d_1, d_2, d$  sind Integrationskonstanten.

$$\ln |v - v_2| - \ln |v - v_1| = C(v_1 - v_2)(t + d_1)$$

$$\ln \left| \frac{v - v_2}{v - v_1} \right| = C(v_1 - v_2) \cdot t + d_2$$

$$\frac{v - v_2}{v - v_1} = de^{C(v_1 - v_2) \cdot t} \tag{3}$$

$$v - v_2 = vde^{C(v_1 - v_2) \cdot t} - v_1de^{C(v_1 - v_2) \cdot t}$$

$$v \cdot (1 - de^{C(v_1 - v_2) \cdot t}) = v_2 - v_1de^{C(v_1 - v_2) \cdot t}$$

$$v = \frac{v_2 - v_1de^{C(v_1 - v_2) \cdot t}}{1 - de^{C(v_1 - v_2) \cdot t}}$$

aus  $v(t = 0) = 0$  und (3) folgt  $\frac{v_2}{v_1} = d$

$$v = \frac{v_2 - v_1 \frac{v_2}{v_1} e^{C(v_1 - v_2) \cdot t}}{1 - \frac{v_2}{v_1} e^{C(v_1 - v_2) \cdot t}}$$

G. Mechanik

$$v_2 < 0$$

$$v = \frac{v_2 \cdot (1 - e^{C(v_1 - v_2) \cdot t})}{1 + \frac{|v_2|}{v_1} e^{C(v_1 - v_2) \cdot t}}$$

$$v = \frac{v_2 (e^{-C(v_1 - v_2) \cdot t} - 1)}{e^{-C(v_1 - v_2) \cdot t} + \frac{|v_2|}{v_1}}$$

Endgeschwindigkeit:  $v_2 < 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{v_2(0 - 1)}{0 + \frac{|v_2|}{v_1}} = \frac{-v_2}{|v_2|} \cdot v_1 = v_1$$

$$v_1 = \frac{1}{2C} (-B + \sqrt{B^2 + 4AC})$$

$$v = \frac{E(e^{Ft} - 1)}{e^{Ft} + G}$$

mit

$$F := -C(v_1 - v_2) \quad E := v_2 \quad G := \frac{|v_2|}{v_1}$$

$$b(t) = \dot{v}(t) = E \cdot \frac{F e^{Ft} (e^{Ft} + G) - (e^{Ft} - 1) F e^{Ft}}{(e^{Ft} + G)^2}$$

$$= E \cdot \frac{F e^{Ft} (G + 1)}{(e^{Ft} + G)^2}$$

$$= v_2 \frac{-C(v_1 - v_2) e^{-C(v_1 - v_2) \cdot t} \cdot \left( \frac{|v_2|}{v_1} + 1 \right)}{\left( e^{-C(v_1 - v_2) \cdot t} + \frac{|v_2|}{v_1} \right)^2}$$

$$1) \quad \varphi_K > \varphi \quad \Rightarrow \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad A > 0$$

$$v_2 < 0 \quad v_1 > 0 \quad C > 0$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -C(v_1 - v_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 \cdot (-C) \cdot (v_1 - v_2) > 0$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) > 0$$

$\Rightarrow v(t)$  ist streng monoton steigend.

$$2) \quad \varphi_K < \varphi \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad \Rightarrow \quad A < 0$$

$$v_2 < 0 \quad v_1 < 0$$

$$a) \quad |v_2| > |v_1|$$

$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{v_1} + 1 < 0 \quad \text{und} \quad v_1 - v_2 > 0$$

$$\Rightarrow -C v_2 (v_1 - v_2) \cdot \left( \frac{|v_2|}{v_1} + 1 \right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}(t) < 0$$

$\Rightarrow v(t)$  ist streng monoton fallend.

$$b) \quad |v_2| < |v_1|$$

Dieser Fall kommt nach den Formeln für  $v_1$  und  $v_2$  nicht vor.

Wegen  $v(0) = 0$  ist  $v(t)$  im Fall 1 ( $a > 0$ ) immer positiv (Fall nach unten) und im Fall 2 ( $a < 0$ ) immer negativ. (Bewegung nach oben)

**Integration:**

$$s(t) = \int v(t) dt = \int \frac{E(e^{Ft} - 1)}{e^{Ft} + G} dt$$

siehe Gröbner [2] Band 1 Nr. 311 p.107 2)

$$e^{Ft} = y \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{F} \ln y$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{Fy} \quad y(t) = e^{Ft} \quad y(0) = 1$$

$$s(t) = \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{E(y-1) dy}{(y+G)Fy} = \frac{E}{F} \cdot \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{(y-1) dy}{y^2 + Gy}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 + Gy} &= \frac{\delta}{y} + \frac{\varepsilon}{y+G} \\ 1 &= \delta(y+G) + \varepsilon y = y(\delta + \varepsilon) + \delta G \\ 1 &= \delta G \quad \delta + \varepsilon = 0 \\ \Rightarrow \delta &= \frac{1}{G} \quad \varepsilon = -\frac{1}{G} \end{aligned}$$

also:

$$\frac{1}{y^2 + Gy} = \frac{1}{Gy} - \frac{1}{G(y+G)}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Gy} - \frac{1}{G(y+G)} &= \frac{y+G-y}{Gy(y+G)} = \frac{G}{Gy(y+G)} \\ &= \frac{1}{y(y+G)} = \frac{1}{y^2 + Gy} \end{aligned}$$

also:

$$\frac{F}{E} \cdot s(t) = \int_{y(0)}^{y(t)} \left( \frac{y-1}{Gy} - \frac{y-1}{G(y+G)} \right) dy$$

nach Gröbner [2] Nr. 12 p.7 4c):

$$= \left[ \frac{y}{G} - \frac{\ln|y|}{G} - \frac{y-1}{G} - \frac{-1 \cdot G^2 + (-1) \cdot G}{G^2} \cdot \ln|G(y+G)| \right]_{y(0)}^{y(t)}$$

$$= \left[ \frac{y - \ln|y|}{G} - \frac{y-1}{G} + \frac{G+1}{G} \cdot \ln|G(y+G)| \right]_{y(0)}^{y(t)}$$

Kontrolle durch Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{E}{F} \cdot \left( \frac{y}{G} - \frac{\ln|y|}{G} - \frac{y-1}{G} + \frac{G+1}{G} \ln|G(y+G)| \right) \\ = \frac{E}{F} \cdot \left( \frac{1}{G} - \frac{1}{Gy} - \frac{1}{G} + \frac{G+1}{G} \cdot \frac{G}{G(y+G)} \right) \\ = \frac{E}{F} \cdot \left( \frac{1}{G} - \frac{1}{Gy} - \frac{1}{G} + \frac{G+1}{G(y+G)} \right) \\ = \frac{E}{F} \cdot \left( \frac{y-1}{Gy} + \frac{-y-G+G+1}{G(y+G)} \right) \\ = \frac{E}{F} \cdot \left( \frac{y-1}{Gy} + \frac{1-y}{G(y+G)} \right) = \frac{E}{F} \cdot \left( \frac{y-1}{Gy} - \frac{y-1}{G(y+G)} \right) \end{aligned}$$

Damit ist die Stammfunktion bestätigt.

$$y(t) = e^{Ft} \quad y(0) = 1$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{F}{E} \cdot s(t) &= \frac{e^{Ft} - Ft}{G} - \frac{e^{Ft} - 1}{G} + \frac{G+1}{G} \cdot \ln|G(e^{Ft} + G)| \\ &\quad - \frac{1}{G} - \frac{G+1}{G} \cdot \ln|G(1+G)| \\ &= \frac{e^{Ft} - Ft}{G} - \frac{e^{Ft} - 1}{G} - \frac{1}{G} + \frac{G+1}{G} \ln \left| \frac{e^{Ft} + G}{1+G} \right| \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$s(t) = \frac{E}{F} \left( \frac{e^{Ft} - Ft}{G} - \frac{e^{Ft} - 1}{G} - \frac{1}{G} + \frac{G+1}{G} \cdot \ln \left| \frac{e^{Ft} + G}{1+G} \right| \right)$$

$$s(t) = \frac{E}{GF} \left( e^{Ft} - Ft - e^{Ft} + 1 - 1 + (G+1) \cdot \ln \left| \frac{e^{Ft} + G}{1+G} \right| \right)$$

$$s(t) = \frac{E}{FG} \left( (G+1) \cdot \ln \left| \frac{e^{Ft} + G}{1+G} \right| - Ft \right)$$

$$F = -C(v_1 - v_2) \quad G = \frac{|v_2|}{v_1} \quad E = v_2$$

$$s(t) = \frac{v_2 \cdot v_1}{-C(v_1 - v_2) \cdot |v_2|} \cdot \left( \left( \frac{|v_2|}{v_1} + 1 \right) \cdot \ln \left| \frac{e^{-C(v_1 - v_2) \cdot t} + \frac{|v_2|}{v_1}}{1 + \frac{|v_2|}{v_1}} \right| + C(v_1 - v_2) \cdot t \right)$$

$$v_2 < 0$$

$$= \frac{v_1}{C(v_1 - v_2)} \cdot \left( \left( \frac{|v_2|}{v_1} + 1 \right) \cdot \ln \left| \frac{e^{-C(v_1 - v_2) \cdot t} + \frac{|v_2|}{v_1}}{1 + \frac{|v_2|}{v_1}} \right| + C(v_1 - v_2) \cdot t \right)$$

es ist  $s(t = 0) = 0$

Die zurückgelegte Strecke darf nicht zu groß sein, weil sonst der Druck bei Gasen und die Dichte bei Flüssigkeiten nicht mehr konstant ist. Der freie Fall in Luft mit Druckänderung im homogenen Schwerfeld wird in der Arbeit von Shea [4] behandelt.

### **Literatur**

- [1] A.Budo „Theoretische Mechanik“ 10.edition 1980 Deutscher Verlag der Wissenschaften
- [2] Wolfgang Gröbner, Nikolaus Hofreiter „Integraltafel“ 1.Teil 5.edition 1975 Springer Verlag Wien
- [3] Horst Kuchling „Taschenbuch der Physik“ 1979 Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main
- [4] P. Mohazzabi, J.H.Shea „High-altitude free fall“ Am.J. Phys. 64 (10) p.1242-1246 (1996)
- [5] P.Timmermann, J. van der Weele „On the rise and fall of a ball with linear or quadratic drag“ Am.J.Phys. 67 (6), June 1999 p.538-546

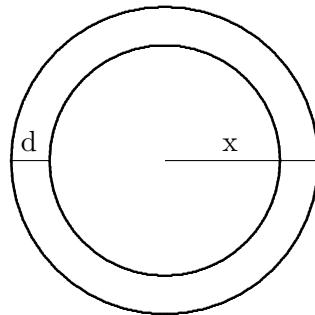
© 2000 **Harald Schröer**

## 44. Schwebende Hohlkugel in einer Flüssigkeit

**Abstract:** Gesucht wird nach einer Beziehung zwischen Radius und Wandstärke einer Hohlkugel, die in einer Flüssigkeit schwebt.

**Key words:** Radius - Wandstärke - Hohlkugel - Flüssigkeit - Gas - Medium

Wir betrachten folgende Hohlkugel in einer Flüssigkeit:



Die Wandstärke (Dicke)  $d$  der Hohlkugel ist vorgegeben. Welchen Radius  $x$  muß die Hohlkugel haben, damit sie in der Flüssigkeit schwebt?

In [2] wird ein Beispiel berechnet. Dabei wird das Archimedische Prinzip angewandt. Wir werden hier diese Rechnung verallgemeinern. Es sind:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi x^3 = \text{Volumen der Kugel}$$

$$V'' = \frac{4}{3} \cdot \pi (x - d)^3 = \text{Volumen der inneren Kugel}$$

$$V' = V - V'' = \text{Volumen der Hohlkugel}$$

Nun kommen wir zu den Gewichten. Das Innere der Kugel soll Gas mit der Dichte  $\varphi_G$  enthalten. Die Hohlkugel selbst hat die Dichte  $\varphi_K$ . Die Gewichte lauten dann:

$$G' = g \cdot \varphi_K \cdot V' \quad g = \text{Erdbeschleunigung}$$

$$G'' = g \cdot \varphi_G \cdot V''$$

Das Gesamtgewicht der Kugel ergibt sich als  $G = G' + G''$ .  $\varphi_F$  soll die Dichte der Flüssigkeit sein. Wir wenden nun das Archimedische Prinzip auf die schwebende Kugel an:

$$g \cdot V \cdot \varphi_F = G = G' + G'' = (V' \cdot \varphi_K + V'' \cdot \varphi_G) \cdot g$$

Mit den Volumenformeln

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3$$

$$V'' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (x - d)^3$$

## G. Mechanik

$$V' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (x^3 - (x-d)^3)$$

bekommen wir:

$$\varphi_F \cdot x^3 = \varphi_K \cdot (x^3 - (x-d)^3) + \varphi_G \cdot (x-d)^3$$

Wir lösen nun nach  $d$  auf:

$$\begin{aligned}(\varphi_F - \varphi_K) \cdot x^3 &= (\varphi_G - \varphi_K) \cdot (x-d)^3 \\(x-d)^3 &= \frac{\varphi_K - \varphi_F}{\varphi_K - \varphi_G} \cdot x^3\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}x-d &= x \cdot \sqrt[3]{\frac{\varphi_K - \varphi_F}{\varphi_K - \varphi_G}} \\d &= x \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\varphi_K - \varphi_F}{\varphi_K - \varphi_G}}\right)\end{aligned}\tag{1}$$

Die Auflösung ist nach  $d$  und  $x$  möglich.

### Ein Beispiel:

Eine Hohlkugel schwebt im Wasser. In der Kugel ist Luft mit der Dichte  $0.0012928 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$  enthalten. Die Hohlkugel besteht aus Aluminium mit der Dichte  $2.702 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ . Die Dichte von Wasser beträgt  $0.9982 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$  bei 20 Grad Celsius. Wie groß ist der Radius der Hohlkugel, wenn die Wandstärke  $d=0.015\text{m}$  ist?

Dichte  $\varphi_K$  von Aluminium =  $2.702 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Dichte  $\varphi_F$  von Wasser =  $0.9982 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$  bei 20 Grad Celsius

Dichte  $\varphi_G$  von Luft =  $0.0012928 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Gesucht ist der Radius  $x$  der Hohlkugel.

Wir verwenden die Gleichung (1):

$$d = x \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\varphi_K - \varphi_F}{\varphi_K - \varphi_G}}\right)$$

Umformung:

$$x = \frac{d}{1 - \sqrt[3]{\frac{\varphi_K - \varphi_F}{\varphi_K - \varphi_G}}}$$

Wir bekommen  $x = 0.105\text{m}$ .

Weitere solche Beispiele findet man bei Schröder [1].



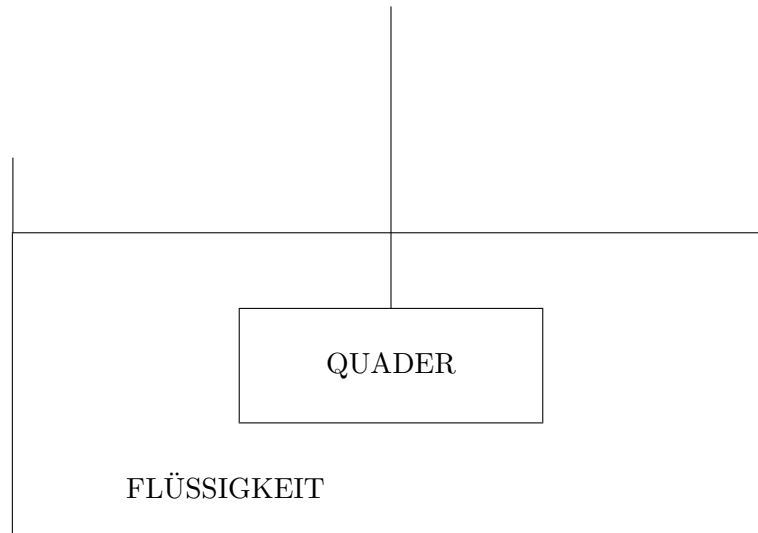
**Literatur**

- [1] Harald Schröder „The floating ball and the suspended hollow ball“, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin 2002
- [2] [http://www.uni-flensburg.de/mathe/zero/veranst/anwmod/kap1/Links/anw\\_kap1\\_Ink\\_3.html](http://www.uni-flensburg.de/mathe/zero/veranst/anwmod/kap1/Links/anw_kap1_Ink_3.html)

© 2009 **Harald Schröder**

## 45. Beschleunigung in Flüssigkeiten und Gasen

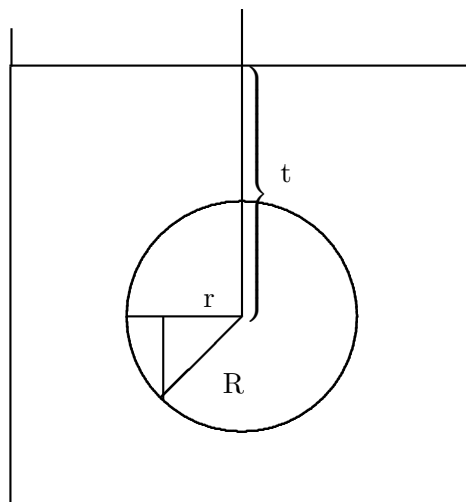
Wir tauchen einen Quader in eine Flüssigkeit ein. Der Quader soll die Masse  $m$  und das Volumen  $V$  haben.



$\gamma$  und  $\varphi$  sind die Wichte und die Dichte des Körpers. Die Wichte und die Dichte der Flüssigkeit werden mit  $\gamma_F$  bzw.  $\varphi_F$  bezeichnet. Die Kraft die auf dem Quader in der Flüssigkeit wirkt ist:

$$F = V \cdot (\gamma - \gamma_F)$$

Wir betrachten nun eine Kugel in derselben Flüssigkeit. Es stellt sich nun die Frage, ob für die Kugel derselbe Sachverhalt gilt?



Die Kugel hat den Radius  $R$ . Die Auftriebskraft können wir durch Integration über den Druck in der Flüssigkeit bekommen:

$$F_{\uparrow} = 2\pi\gamma_F \cdot \int_0^R r \cdot (t + \sqrt{R^2 - r^2}) dr$$

$$= 2\pi\gamma_F \cdot \int_0^R tr dr + 2\pi\gamma_F \cdot \int_0^R r \cdot \sqrt{R^2 - r^2} dr$$

ist die Auftriebskraft in der Tiefe  $t$ .

$$\int r \cdot \sqrt{R^2 - r^2} dr = -\frac{1}{3} \cdot (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

folgt durch einfaches Differenzieren mit der Kettenregel. Also erhalten wir:

$$F_{\uparrow} = 2\pi\gamma_F \cdot \left[ \frac{tr^2}{2} \right]_0^R + 2\pi\gamma_F \cdot \left[ -\frac{1}{3} \cdot (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = 2\pi\gamma_F \cdot \left( \frac{tR^2}{2} + \frac{R^3}{3} \right)$$

schließlich:

$$F_{\uparrow} = \pi R^2 t \cdot \gamma_F + \frac{2}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \gamma_F$$

Die Kraft, die nach unten wirkt, kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$F_{\downarrow} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \gamma + \pi R^2 t \cdot \gamma_F - \frac{2}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \gamma_F$$

Als Differenz von beiden Kräften ergibt sich:

$$F_{\downarrow} - F_{\uparrow} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \gamma - \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \gamma_F = V \cdot (\gamma - \gamma_F)$$

Wir erhalten dasselbe Resultat bei einer Kugel. Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Ergebnis für alle Körper in einer Flüssigkeit gilt? Diese Frage kann mit ja beantwortet werden. Ein Beweis dazu befindet sich in Forster [1] §15 (15.5) S.157,158.

Wir betrachten nun einen beliebigen Körper in einer Flüssigkeit. Für die Beschleunigung in einer Flüssigkeit müssen wir den folgenden Ausdruck bilden:

$$b = \frac{V \cdot (\gamma - \gamma_F)}{m}$$

Beachten wir die Beziehungen  $\gamma = g \cdot \varphi$  und  $\gamma_F = g \cdot \varphi_F$ , wobei  $g$  die Erdbeschleunigung ist:

$$b = \frac{V \cdot g \cdot (\varphi - \varphi_F)}{m}$$

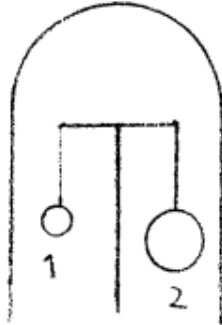
Mit  $\frac{m}{V} = \varphi$  kommen wir zu:

$$b = g \cdot \left( 1 - \frac{\varphi_F}{\varphi} \right)$$

Damit haben wir einen Term, der nur von den Dichten und der Erdbeschleunigung abhängt. Diese Überlegungen können auch auf Gase übertragen werden, wenn man die

Dichte des Gases in  $\varphi_F$  einsetzt.

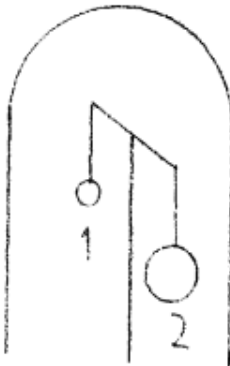
Nun betrachten wir zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  unter einer Glocke. Der Körper 2 soll größer als der Körper 1 sein. Zunächst wird die Luft dringelassen.



Die Massen sind so gewählt, daß sie mit derselben Gewichtskraft  $F$  angezogen werden. Die Waage ist im Gleichgewicht. Dann gilt folgende Gleichung:

$$m_1 g \cdot \left(1 - \frac{\varphi_G}{\varphi_1}\right) = F = m_2 g \cdot \left(1 - \frac{\varphi_G}{\varphi_2}\right) \quad (1)$$

$\varphi_G$  ist die Dichte der Luft (Gas).  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sollen die Dichten der Massen  $m_1$  und  $m_2$  sein.



Nun wird die Luft abgesaugt. Dann ist die Waage nicht mehr in Gleichgewicht. Für die Gewichtskräfte im Vakuum  $F_1$  und  $F_2$  erhalten wir:

$$F_1 = m_1 g = \frac{F}{1 - \frac{\varphi_G}{\varphi_1}} \quad F_2 = m_2 g = \frac{F}{1 - \frac{\varphi_G}{\varphi_2}}$$

Der größere Körper mit der Masse  $m_2$  wird wegen (1) eine kleinere Dichte haben. Also haben wir  $\varphi_2 < \varphi_1$ . Daraus folgt aber  $F_2 > F_1$ . Die Waage neigt sich zugunsten des größeren Körpers.

Bilden wir  $m_1 = \frac{F_1}{g}$  und  $m_2 = \frac{F_2}{g}$  so folgt auch  $m_2 > m_1$ . Für die Volumina bekommen wir die folgenden Gleichungen:

$$V_1 = \frac{m_1}{\varphi_1} = \frac{F}{g \cdot (\varphi_1 - \varphi_G)}$$

$$V_2 = \frac{m_2}{\varphi_2} = \frac{F}{g \cdot (\varphi_2 - \varphi_G)}$$

Mit  $\varphi_2 < \varphi_1$  bekommen wir  $V_2 > V_1$ . Befinden sich zwei Massen an der Waage in Luft im Gleichgewicht, dann folgt zwingend: Aus einer kleineren Dichte folgt ein größeres Volumen und umgekehrt. Man kann sowohl das größere Volumen wie auch die kleinere Dichte des Körpers 2 als Ursache für den Versuchsausgang sehen. Gewöhnlich wird argumentiert, daß der Körper mit dem größeren Volumen eine größeren Auftriebskraft  $F_A$  in der Luft erfährt als der andere Körper. Tatsächlich folgt dieses Resultat auch aus der Gleichung  $F_A = V \cdot \varphi_G \cdot g$ , wobei  $\varphi_G \cdot g$  die Wichte des Gases ist (Archimedisches Prinzip). Die Ursache ist jedoch das größere Volumen bzw. die kleinere Dichte.

Diese Überlegungen gelten auch für Flüssigkeiten, sofern die Dichte der Flüssigkeit kleiner als die Dichten der beiden Körper ist. Die Dichte der Flüssigkeit ist dann in  $\varphi_G$  einzusetzen.

## Literatur

- [1] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983 Vieweg Verlag Braunschweig

## 46. Schwimmende Quader

Wir lassen einen Quader in einer Flüssigkeit schwimmen. Die Höhe des Quaders  $h$  soll nicht größer sein als  $\frac{1}{10}$  der Breite bzw. der Länge des Quaders. Die Dichte  $\varphi$  des Quaders muß kleiner sein, als die Dichte  $\varphi_F$  der Flüssigkeit. Wir setzen noch voraus, daß  $\frac{\varphi}{\varphi_F} \in (0, 0.2) \cup (0.8, 1)$ .



$h_r$  ist die Höhe unter der Oberfläche der Flüssigkeit. Diese Höhe wollen wir zuerst bestimmen. Die Gewichtskraft des Quaders in der Flüssigkeit beträgt, wenn  $A$  die Grundfläche des Quaders ist:

$$F_{\downarrow} = A \cdot h \cdot \gamma$$

Dabei ist  $\gamma$  die Wichte des Quaders. Mit  $p$  als Druck in der Flüssigkeit erhalten wir für die Auftriebskraft:

$$F_{\uparrow} = p \cdot A = \gamma_F \cdot h_r \cdot A$$

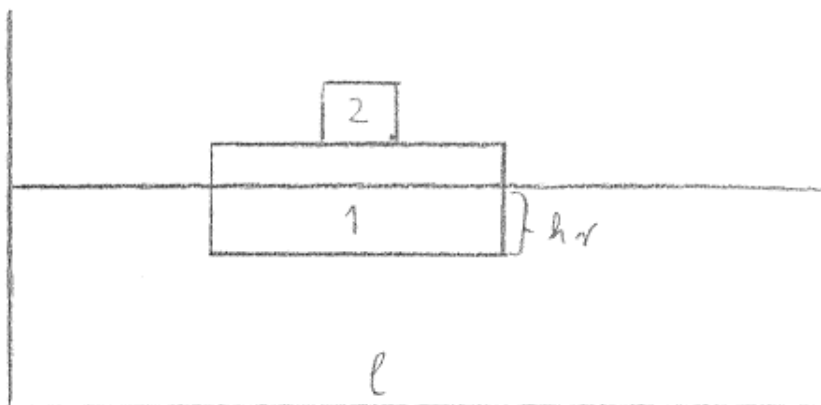
$\gamma_F$  ist die Wichte der Flüssigkeit. Beim Schwimmen müssen die Gewichtskraft und die Auftriebskraft gleich sein:

$$\gamma \cdot h \cdot A = \gamma_F \cdot h_r \cdot A$$

Bringen wir noch die Beziehungen  $\gamma = \varphi \cdot g$  und  $\gamma_F = \varphi_F \cdot g$  mit der Erdbeschleunigung  $g$  ins Spiel, so bekommen wir schließlich:

$$\frac{h_r}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_F} = \frac{\varphi}{\varphi_F} \quad (1)$$

Nun betrachten wir die beiden Quader 1 und 2 wie in der Abbildung:



Der Quader 1 schwimmt in der Flüssigkeit. Es gilt dann  $\varphi_1 < \varphi_F$ .

$a_i, b_i, h_i =$  Länge, Breite, Höhe des  $i$ . Quaders  $i \in 1, 2$   
 $l, b =$  Länge, Breite des Flüssigkeitskastens

Voraussetzung ist dabei:

$$l, b \gg a_1, b_1 \gg a_2, b_2, h_2 \quad h_1 \leq \frac{1}{10} \cdot \text{Minimum}\{a_1, b_1\}$$

Der zweite Quader sitzt genau in der Mitte auf dem ersten Quader. Dabei sollen die Kanten von beiden Quadern parallel sein, vgl. Abbildung.



Dann kippen die beiden Quader nicht um. Mit den Dichten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der beiden Quader können wir nun die dabei wirkenden Kräfte betrachten. Beim Schwimmen sind scheinbare Gewichtskraft und Auftriebskraft gleich:

$$g \cdot (\varphi_1 a_1 b_1 h_1 + \varphi_2 a_2 b_2 h_2) = F_{\downarrow} = F_{\uparrow} = g \varphi_F a_1 b_1 h_r$$

Wir formen um zu:

$$h_r = \frac{\varphi_1 a_1 b_1 h_1 + \varphi_2 a_2 b_2 h_2}{\varphi_F a_1 b_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_F} \cdot h_1 + \frac{\varphi_2 a_2 b_2}{\varphi_F a_1 b_1} \cdot h_2 \quad (2)$$

Damit haben wir einen Ausdruck für  $h_r$ . Im Zähler des zweiten Terms steht die Masse des Quaders 2. Offenbar muß der Körper 2 kein Quader sein. Allerdings muß der Körper 2 sich in der Mitte befinden und die Voraussetzungen über die Abmessungen müssen erfüllt sein. Nun schauen wir uns das verdrängte Volumen  $V_s$  der Flüssigkeit an:

$$V_s = a_1 b_1 h_r \quad \text{für} \quad h_r \leq h_1$$

$$V_s = (h_r - h_1) \cdot a_2 b_2 + a_1 b_1 h_1 \quad \text{für} \quad h_r \geq h_1$$

Setzen wir das  $h_r$  aus Gleichung (2) ein, so bekommen wir:

$$V_s = \frac{\varphi_1 a_1 b_1 h_1}{\varphi_F} + \frac{\varphi_2}{\varphi_F} \cdot a_2 b_2 h_2 \quad \text{für} \quad h_r \leq h_1$$

$$V_s = \left( \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_F} - 1 \right) \cdot h_1 + \frac{\varphi_2 a_2 b_2 h_2}{\varphi_F a_1 b_1} \right) \cdot a_2 b_2 + a_1 b_1 h_1$$

für  $h_r \geq h_1$

## G. Mechanik

Im allgemeinen wird der erste Fall auftreten. Der zweite Fall kommt nur selten vor. Diese Formeln sind nur gültig, wenn der Körper 2 ein Quader ist.

Mit  $V_s$  kann auf die Änderung der Flüssigkeitshöhe im Kasten geschlossen werden. Wir haben dann:

$$\Delta r = \frac{V_s}{l \cdot b}$$

Diese Überlegungen gelten für  $\frac{\varphi_1}{\varphi_F} \in (0, 0.2) \cup (0.8, 1)$ . Außerdem darf  $\varphi_2$  nicht extrem groß sein.

© 2001 **Harald Schröder**



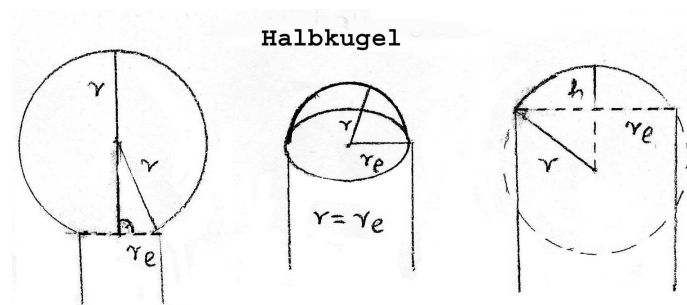
## 47. Seifenblasen

**Abstract:** Zunächst wird eine Seifenblase mit Öffnung betrachtet. Anschließend wird ein System zweier Seifenblasen beschrieben. Schließlich wird ein verbundenes System von  $n$  Seifenblasen behandelt.

**Key words:** Seifenblase - Druck - Flüssigkeit - Gas - Medium - Kugel

### 1. Die einfache Seifenblase

Wir betrachten eine Seifenblase, die mit einem Hahn verbunden ist.



Dabei sind  $\sigma$  die Oberflächenspannung und  $r$  der Radius der Seifenblase.  $r_e$  soll der Radius der kreisförmigen Öffnung des Hahns sein. Wir wollen zunächst den Druck  $p$  von einer Seifenblase bestimmen. Die Seifenblase wird dabei näherungsweise die Form einer Kugelkappe haben.  $F$  ist dabei die auf die Seifenblase wirkende Kraft.

Die Oberfläche einer Kugelkappe kann beschrieben werden durch:

$$A = m \cdot \pi r^2 \quad 0 < m \leq 4$$

Es gilt, wenn  $\Delta r \ll r$ :

$$F = p \cdot A$$

Für die aufgewendete Arbeit haben wir:

$$\Delta W = F \cdot \Delta r$$

Es folgt:

$$\Delta W = F \cdot \Delta r = p \cdot A \cdot \Delta r = p \cdot m\pi r^2 \cdot \Delta r$$

Dieselbe Arbeit muß bei der Vergrößerung der Oberfläche aufgewendet werden:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \sigma \cdot \Delta A = \sigma m\pi \cdot [(r + \Delta r)^2 - r^2] \\ &= \sigma m\pi(2r\Delta r + \Delta r^2) \end{aligned}$$

Läßt man  $\Delta r$  gegen Null gehen, so wird:

$$\Delta W = 2m\sigma\pi r\Delta r$$

Durch Gleichsetzung erhält man:

$$pm\pi r^2 \cdot \Delta r = 2m\sigma\pi r \cdot \Delta r$$

Daraus folgt für den Druck in einer Blase:

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

Eine Seifenblase besteht jedoch aus zwei Grenzschichten. Daher ist der resultierende Gesamtdruck:

$$p = \frac{2\sigma}{r} + \frac{2\sigma}{r + \Delta r}$$

Bei  $\Delta r \ll r$  wird daraus:

$$p \approx \frac{4\sigma}{r}$$

Diese Druckformel wird im weiterem verwendet. Zu dieser Herleitung vgl. auch Höfling [1] Kapitel 2.12.5, S.286.

Wir wollen uns nun kurz das Verhalten einer zusammenziehenden Seifenblase anschauen, bei geöffneten Hahn. Für die Oberfläche einer Kugelkappe gilt:

$$O = 2\pi r h = 2\pi r \cdot (r \pm \sqrt{r^2 - r_e^2}) \quad (1)$$

Für das positive Vorzeichen bei der Wurzel ist ersichtlich, dass mit abnehmenden  $r$  auch die Oberfläche kleiner wird. Es wird nun gezeigt, dass beim negativem Wurzel-Vorzeichen mit zunehmenden Radius  $r$  die Oberfläche kleiner wird, vgl. die Abbildungen am Anfang. Für die Ableitung der Oberfläche berechnen wir nach Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} O'(r) &= 2\pi \left( r - \sqrt{r^2 - r_e^2} + r \cdot \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_e^2}} \right) \right) \\ &= 2\pi \cdot \left( 2r - \frac{2r^2 - r_e^2}{\sqrt{r^2 - r_e^2}} \right) \end{aligned}$$

Es gilt für  $r_e > 0$  :

$$0 < r_e^4$$

Daraus folgt:

$$4r^4 - 4r^2 r_e^2 < 4r^4 - 4r^2 r_e^2 + r_e^4$$

Durch Ausklammern:

$$4r^2 \cdot (r^2 - r_e^2) < 4r^4 - 4r^2 r_e^2 + r_e^4$$

Nun wird die Wurzel gezogen:

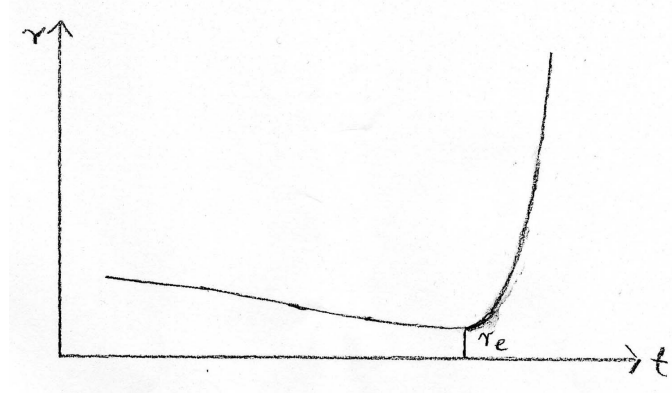
$$2r \cdot \sqrt{r^2 - r_e^2} < 2r^2 - r_e^2$$

Das führt zu:

$$2r < \frac{2r^2 - r_e^2}{\sqrt{r^2 - r_e^2}}$$

Damit ist bewiesen, dass  $O'(r) < 0$  ist, somit folgt aus dem Monotoniesatz, dass die Oberfläche mit zunehmenden  $r$  und negativem Wurzel-Vorzeichen abnimmt.

Betrachtet man das zeitliche Zusammenziehen einer Seifenblase, so ergibt sich nach Jackson [2] folgende Skizze:



Bei Jackson [2] wird die Zeit  $t(r)$  berechnet, dazu wird eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen gelöst. Dabei wird auch ein Kugelteilmmodell verwendet. Insgesamt folgt daraus, dass  $O(r(t))$  mit  $t$  monoton fällt.

Was passiert mit der Oberfläche, wenn  $r$  gegen Unendlich geht?

Wir haben dann:

$$O(r) = 2\pi r(r - \sqrt{r^2 - r_e^2})$$

Aus der Definition der Ableitung folgt für  $h \ll a$ :

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-h} \approx \frac{h}{2\sqrt{a}}$$

Also für  $r_e \ll r$ :

$$r - \sqrt{r^2 - r_e^2} \approx \frac{r_e^2}{2\sqrt{r^2}} = \frac{r_e^2}{2r}$$

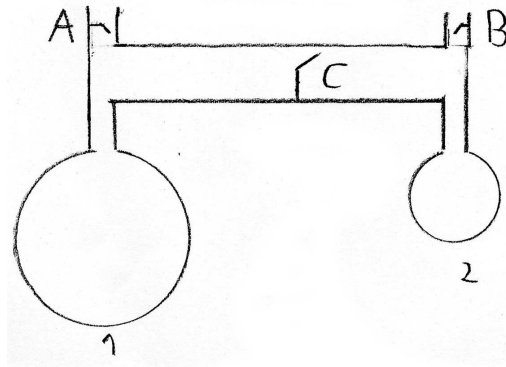
Also bekommen wir dann:

$$O(r) \approx 2\pi r \cdot \frac{r_e^2}{2r} = \pi \cdot r_e^2$$

Daher die Oberfläche reduziert sich auf die Kreisfläche der Öffnung.

## 2. Ein System von 2 Seifenblasen

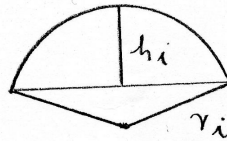
Wir betrachten nun 2 Seifenblasen wie in der Abbildung mit den Hähnen  $A, B$  und  $C$ .



Zunächst ist der Hahn  $C$  geschlossen. Die beiden Seifenblasen werden erzeugt. Die Hähne  $A$  und  $B$  sind geöffnet. Dann werden  $A$  und  $B$  geschlossen und der Hahn  $C$  geöffnet, vgl. auch Höfling [1] ebd.

Gegeben sind:

$\sigma_i, p_i, r_i, r_{ei}, h_i$  = Oberflächenspannung, Druck, Radius, Radius der Öffnung und Höhe der  $i$ . Seifenblase,  $i$  ist entweder 1 oder 2.



Voraussetzung:

$$\frac{\sigma_1}{r_1} < \frac{\sigma_2}{r_2} \quad r_i > r_{ei}$$

Dann zieht sich Seifenblase 2 zusammen, und Seifenblase 1 dehnt sich aus. Für die Kraft auf eine Seifenblase ergibt sich:

$$F(h) = O(h) \cdot p(r(h)) = 2\pi r h \cdot \frac{4\sigma}{r} = 8\pi\sigma h$$

Nun wenden wir den Energiesatz bezüglich der potentiellen Energie an. Da uns nur der Endzustand interessiert, ist die kinetische Energie gleich Null. Die von der Schwerkraft erzeugte potentielle Energie ( $m \cdot g \cdot \Delta h$ ) kann vernachlässigt werden, aufgrund der geringen Masse von Gas und Flüssigkeit. Wir erhalten daher:

$$W_R + 8\pi\sigma_1 \cdot \int_{h_1}^{h_3} h \, dh = 8\pi\sigma_2 \cdot \int_0^{h_2} h \, dh$$

$W_R$  ist die Reibungsarbeit, während  $h_3$  die neue Höhe der Seifenblase 1 darstellt. Nach der Integration:

$$W_R + 4\pi\sigma_1 \cdot (h_3^2 - h_1^2) = 4\pi\sigma_2 h_2^2$$

Nach  $h_3$  wird gesucht, wir lösen auf:

$$h_3^2 - h_1^2 = \frac{4\pi\sigma_2 h_2^2 - W_R}{4\pi\sigma_1}$$

Schließlich:

$$h_3 = \sqrt{\frac{\sigma_2 h_2^2}{\sigma_1} - \frac{W_R}{4\pi\sigma_1} + h_1^2}$$

Den Radius erhält man aus Gleichung (1):

$$h_i = r_i \pm \sqrt{r_i^2 - r_{ei}^2}$$

Quadriert:

$$(h_i - r_i)^2 = r_i^2 - r_{ei}^2$$

Es folgt:

$$-2h_i r_i + h_i^2 = -r_{ei}^2$$

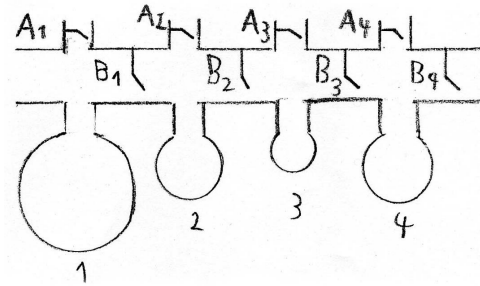
Schließlich bekommen wir:

$$r_i = \frac{h_i^2 + r_{ei}^2}{2h_i} = \frac{h_i}{2} + \frac{r_{ei}^2}{2h_i}$$

In diesem Modell wird eine vorhandene Viskosität in die Reibungsarbeit  $W_R$  einbezogen. Ein Spezialfall ist  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ .

### 3. Ein System mit $n$ Seifenblasen

Die Notationen werden sinngemäß übernommen mit  $i \in 1, \dots, n+1$ . Nun betrachten wir ein System wie in der Abbildung:



Die Hähne  $B_1$  bis  $B_n$  sind zunächst geschlossen. Die Hähne  $A_1$  bis  $A_n$  sind geöffnet. Die  $n$  Seifenblasen werden erzeugt. Anschließend werden  $A_1$  bis  $A_n$  geschlossen und die Hähne  $B_1$  bis  $B_n$  geöffnet.

Voraussetzung:

$$\frac{\sigma_1}{r_1} < \frac{\sigma_i}{r_i} \quad \text{für} \quad i \in 2, \dots, n$$

Dann dehnt sich Seifenblase 1 aus. Die anderen Seifenblasen ziehen sich zusammen. Wir verallgemeinern die Betrachtung von vorher. Gesucht ist die neue Höhe  $h_{n+1}$  der Seifenblase 1. Wir wenden nun den Energiesatz wie vorher an:

$$W_R + 8\pi\sigma_1 \cdot \int_{h_1}^{h_{n+1}} h \, dh = 8\pi \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i \cdot \int_0^{h_i} h \, dh$$

Integration:

$$W_R + 4\pi\sigma_1 \cdot (h_{n+1}^2 - h_1^2) = 4\pi \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i h_i^2$$

Auflösung:

$$h_{n+1}^2 - h_1^2 = \frac{4\pi \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i h_i^2 - W_R}{4\pi\sigma_1}$$

Schließlich bekommt man:

$$h_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{\sigma_1} \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i h_i^2 - \frac{W_R}{4\pi\sigma_1} + h_1^2}$$

Den Radius erhält man wie vorher aus:

$$r_i = \frac{h_i^2 + r_{ei}^2}{2h_i} = \frac{h_i}{2} + \frac{r_{ei}^2}{2h_i} \quad \text{für} \quad i \in 1, \dots, n+1$$

Ein Spezialfall stellt  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$  dar. Zu beachten ist, dass  $n$  begrenzt ist, aufgrund der Lebensdauer von Seifenblasen.

Nun soll noch weiterführende Literatur zu Seifenblasen genannt werden. Mit Seifenblasen bei tiefen Temperaturen hat sich Grosse [3] befaßt. Die möglichen mathematischen Formen einer Seifenblase wurden von Ferus [4] behandelt. Oszillationen von Seifenblasen sind z.B. bei Kornek [5] dargestellt.

## Literatur

- [1] Höfling „Physik“, Band 2, Teil 1 Dümmler Verlag, Bonn 1981
- [2] Jackson DP, Sleyman S „Analysis of a deflating soap bubble“ American Journal of Physics, College Park, Md., 2010, Volume 78, Issue 10, p.990-994
- [3] Grosse Av „Effect of temperature on life of soap bubbles and their solidification at low temperature“ Science, Washington, DC, Volume 153, Issue 3738, p.895-898, 1966
- [4] Dirk Ferus „Von den Seifenblasen“ p.303-312 aus „Alles Mathematik von Pythagoras zum CD-Player“ Martin Aigner(Hrsg.), 3.Auflage, Wiesbaden, Vieweg+Teubner, 2008
- [5] U Kornek, F Müller, K Harth und weitere „Oscillations of soap bubbles“ New Journal of Physics, 12 (2010) 073031, 25pp.

## 48. Aufstieg einer Gasblase in einer Flüssigkeit

Jeder hat schon mal gesehen wie Luftblasen im Wasser aufsteigen. Einen aufmerksamen Beobachter wird es auch aufgefallen sein, daß die Luftblasen beim Aufstieg größer werden. Es stellen sich folgende Fragen. Warum steigt die Luftblase nach oben und nicht nach unten? Warum nimmt der Durchmesser der Luftblase zu? Wie schnell bewegt sich eine Luftblase? Wie lange dauert es bis die Luftblase die Oberfläche erreicht?

Wir wollen uns nun mit der Bewegung einer Gasblase in einer Flüssigkeit genauer beschäftigen.

Wir führen folgende Größen ein:

$r$  = Radius der Gasblase

$o$  = Oberflächenspannung der Flüssigkeit

$p$  = Druck

$g$  = Schwerebeschleunigung (Erdbeschleunigung)

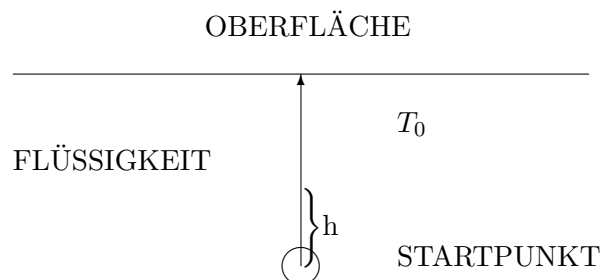
$\varphi_F$  = Dichte der Flüssigkeit

$\varphi_G$  = Dichte des Gases

$T_0$  = Tiefe der Gasblase in der Flüssigkeit zum Beginn

$h$  = zurückgelegter Weg der Gasblase

siehe auch Abbildung:



$h$  wird von unten nach oben gezählt.

Der Druck in einer Gasblase ist nach Kuchling [4] Kapitel 11.1.2 S.169,170:

$$p = \frac{2o}{r}$$

Der Schweredruck in einer Flüssigkeit kann z.B. nach Kuchling [4] Kapitel 8.1.2 S.146 beschrieben werden durch:

$$p = g \cdot (T_0 - h) \cdot \varphi_F$$

Es muß Druckgleichheit vorliegen, also:

$$\frac{2o}{r} = g \cdot (T_0 - h) \cdot \varphi_F$$

## G. Mechanik

Daraus folgt:

$$r = \frac{2o}{g \cdot (T_0 - h) \cdot \varphi_F}$$

Hier erkennt man, daß der Radius der Gasblase mit der Tiefe  $T_0 - h$  abnimmt. Das bedeutet, daß beim Aufstieg die Gasblase größer wird.

Die Masse  $m$  der Gasblase muß bekannt sein, dann ist

$$\varphi_G = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi r^3}$$

Wir erhalten, wenn wir für  $r$  einsetzen:

$$\varphi_G = \frac{3mg^3 \cdot (T_0 - h)^3 \cdot \varphi_F^3}{4\pi \cdot 8o^3} = \frac{3mg^3 \cdot (T_0 - h)^3 \cdot \varphi_F^3}{32 \cdot \pi o^3}$$

Bereits hier kann die Frage beantwortet werden, warum eine Gasblase in einer Flüssigkeit aufsteigt. Die Dichte des Gases ist im allgemeinen viel kleiner als die Dichte der Flüssigkeit.

Wir wenden den Energiesatz  $E_{ges} = E_{pot} + E_{kin}$  an. Dabei ist:

$E_{ges}$  = Gesamtenergie

$E_{pot}$  = potentielle Energie

$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$  = kinetische Energie

Wir haben nun die potentielle Energiedifferenz  $E_{ges} - E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ . Also folgt:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{mv^2}{2} \quad \text{oder} \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

Die Fallbeschleunigung  $b$  in einer Flüssigkeit erhalten wir nach Budo [1] §16 S.85 mit:

$$b = \left( \frac{\varphi_F}{\varphi_G} - 1 \right) \cdot g$$

Nun können wir die Differentialgleichung der Bewegung formulieren. Diese lautet:

$$\dot{v} = \left( \frac{\varphi_F}{\varphi_G} - 1 \right) \cdot g = \frac{\varphi_F}{\varphi_G} \cdot g - g$$

Der Punkt über  $v$  bedeutet Ableitung nach der Zeit.

Setzen wir nun die Ausdrücke für  $h$  und  $\varphi_G$  ein, so bekommen wir:

$$\dot{v} = \frac{32 \cdot \pi o^3}{3 \cdot mg^2 \cdot \left( T_0 - \frac{v^2}{2g} \right)^3 \cdot \varphi_F^2} - g = F(v) \quad (1)$$

und  $v(0) = 0$  als Anfangswertangabe. Diese Differentialgleichung bzw. das Anfangswertproblem muß nun gelöst werden.



**Separation der Variablen:**

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} = F(v)$$

Integration: (siehe z.B. Forster [2] §11 Satz 1 S.111-113)

$$\int_0^t dt - c_1 = \int_0^v \frac{dv}{F(v)} = \int_0^v \frac{dv}{\frac{k}{\left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3} - g} = \int_0^v \frac{\left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3 dv}{k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3}$$

$$\text{mit } k = \frac{32 \cdot \pi o^3}{3 \cdot mg^2 \varphi_F^2}$$

Wir führen eine Division von Polynomen durch:

$$\frac{\left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3}{k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3} = -\frac{1}{g} + \frac{k}{g \cdot \left(k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3\right)}$$

also ergibt die Integration:

$$\int_0^v \frac{\left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3 dv}{k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3} = -\frac{v}{g} + \int_0^v \frac{k dv}{g \cdot \left(k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3\right)}$$

Wir müssen die Nullstellen des Nenners des letzten Integrals ausrechnen. Wenn wir die Nullstellen kennen, können wir eine exakte Integration durchführen. Aufgrund dieser Nullstellen, die einfache oder mehrfache Nullstellen sein können, ist eine Näherungsrechnung mit numerischen Methoden z.B. Simpsonsche Regel nicht sinnvoll. Wir müssen vielmehr den Nenner geeignet zerlegen und dann versuchen die Nullstellen bezüglich  $v$  zu bestimmen. Wir wenden dazu eine spezielle Zerlegung an, die in vielen mathematischen Formelsammlungen z.B. Sieber [5] S.3 zu finden ist.

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Fassen wir  $a^2 + ab + b^2 = 0$  als quadratische Gleichung nach  $a$  auf, so erhalten wir  $a$  als:

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{-b^2 + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2} = \pm i \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2} \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$$

Damit kann eine weitere Zerlegung erfolgen:

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a - \frac{i\sqrt{3}b}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{i\sqrt{3}b}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a - \frac{i\sqrt{3}b}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{i\sqrt{3}b}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

Diese Zerlegung kann nun in folgender Weise beim Nenner des Integrals angewendet werden:

$$\begin{aligned}
 k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3 &= \left(\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{g} \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)\right) \\
 &\cdot \left(\sqrt[3]{k} - \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{g}}{2} \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right) + \frac{\sqrt[3]{g}}{2} \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)\right) \\
 &\cdot \left(\sqrt[3]{k} + \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{g}}{2} \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right) + \frac{\sqrt[3]{g}}{2} \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Daraus kann man folgende Nullstellen ermitteln:

$$\begin{aligned}
 v_{N1,2} &= \pm \sqrt{2g \cdot \left(T_0 - \sqrt[3]{\frac{k}{g}}\right)} \\
 v_{N3,4} &= \pm \sqrt{\frac{k^{\frac{1}{3}} - \frac{i\sqrt{3}g^{\frac{1}{3}}T_0}{2} + \frac{g^{\frac{1}{3}}T_0}{2}}{\frac{g^{-\frac{2}{3}}}{4} - \frac{i\sqrt{3}g^{-\frac{2}{3}}}{4}}} \\
 v_{N5,6} &= \pm \sqrt{\frac{k^{\frac{1}{3}} + \frac{i\sqrt{3}g^{\frac{1}{3}}T_0}{2} + \frac{g^{\frac{1}{3}}T_0}{2}}{\frac{i\sqrt{3}g^{-\frac{2}{3}}}{4} + \frac{g^{-\frac{2}{3}}}{4}}}
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen können sowohl einfache wie auch mehrfache Nullstellen sein.

Das Integral

$$\int_0^v \frac{k \, dv}{g \cdot \left(k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3\right)}$$

kann nach Gröbner [3] Kapitel 11 Nr.14 oder Nr.15 S.5,6 bestimmt werden.

Bei Nr.14 wird zuerst eine Partialbruchzerlegung durchgeführt und anschließend integriert - einmal rein komplex und einmal unter Vermeidung komplexer Größen.

Bei Nr.15 wird ein Integralansatz gewählt, bei den die Koeffizienten noch bestimmt werden müssen. Auch hier besteht die Möglichkeit einer komplexen Rechnung und einer rein reellen Rechnung.

Die 6 Nullstellen  $v_{N1}, \dots, v_{N6}$  können in Abhängigkeit von  $k, T_0$  und  $g$  sowohl einfache als auch mehrfache Nullstellen sein. Deswegen ist es nicht so sinnvoll die Methoden von Nr.14 bzw. Nr.15 allgemein durchzuführen, sondern am konkreten Fall mit konkreten Werten für  $g, T_0, k$  zu arbeiten. Dann kann man eindeutig entscheiden, ob die Nullstellen einfach oder mehrfach sind.

Zu beachten ist evt. auch die Berechnung komplexer Logarithmen in Gröbner [3] Kapitel

11 Nr.9a S.2.

Wenn das Integral berechnet ist, wird die additive Integrationskonstante  $c_1$  so gewählt, daß  $v(t = 0) = 0$ .

Wir haben also:

$$t(v) = -\frac{v}{g} + \int_0^v \frac{k dv}{g \cdot \left(k - g \cdot \left(T_0 - \frac{v^2}{2g}\right)^3\right)} + c_1$$

Die Funktion  $v(t)$  kann nur noch näherungsweise numerisch bestimmt werden.

Ein großen Problem ist die Bestimmung von  $h(t)$  bzw.  $b(t)$  aufgrund der Beziehungen:

$$h(t) = \int v(t) dt \quad b(t) = \dot{v}$$

Die Funktion  $v(t)$  ist gar nicht genau bekannt oder nur näherungsweise bestimmbar. Falls  $h(t)$  und  $b(t)$  auch bestimmt werden sollen, dann sollte ein numerisches Verfahren gewählt werden, das  $v(t), b(t), h(t)$  gleichzeitig näherungsweise bestimmt. Hier muß auf die numerische Mathematik verwiesen werden.

Die momentane Tiefe ergibt sich dann aus:

$$T = T_0 - h(t)$$

Damit ist in Prinzip die Bewegung vollständig bestimmt. Die Bestimmung der zeitlichen Bewegung ist - wie wir gesehen haben- ein kompliziertes Problem.

Wir haben nun ein mathematisches Modell ohne Viskosität behandelt. Außerdem haben wir vorausgesetzt, dass die Gasblasen Kugelform haben. Mit Berücksichtigung der Viskosität kann der Sachverhalt ganz anders sein, vgl. Tuteja [6] oder Miyagi [7].

## Literatur

- [1] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980
- [2] Otto Forster „Analysis 2“ 5.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig
- [3] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5.Auflage 1975 Springer Verlag Wien
- [4] Horst Kuchling „Taschenbuch der Physik“ 1979 Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main
- [5] Helmut Sieber und Leopold Huber „Mathematische Formeln Erweiterte Ausgabe E“ Klett Stuttgart 1984

- [6] B. Chakraborty, G.Tuteja „Motion of an expanding, spherical gas bubble in a viscous liquid under gravity“ *Physics of Fluids A* 5 (8), August 1993 p.1879-1882
- [7] O. Miyagi „The motion of an air bubble rising in water“ *Philos. Magazine* (6) 50, p.112-140 (1925)

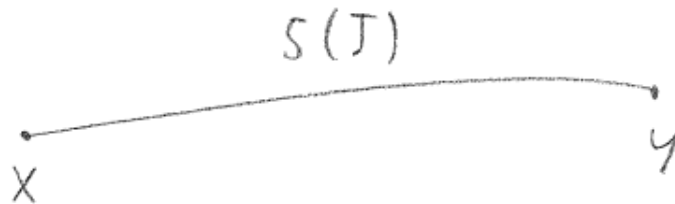
© 2000 **Harald Schröder**

# Kapitel H.

## Elektrizität

### 49. Der minimale Widerstand

Wir betrachten zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $n = 2, 3$ . Soll ein elektrischer Strom von  $x$  nach  $y$  fließen, so wird der Weg des geringsten Widerstandes gewählt. Dazu gibt es eine Widerstandsfunktion  $q(\bar{x}) \in \mathbb{R}$  mit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Ein Beispiel ist der Blitz in der Erdatmosphäre.



$s(\tau) \in \mathbb{R}^n$  soll ein Verbindungsweg sein mit  $s(a) = x$  und  $s(b) = y$ .  $x$  und  $y$  und  $q(\bar{x})$  sind vorgegeben. Der Gesamtwiderstand  $R$  kann dann geschrieben werden in der Form:

$$R(s, x, y) = \int_{s[x,y]} q(s) ds = \int_a^b q(s(\tau)) \cdot \left| \frac{d}{d\tau} s(\tau) \right| d\tau$$

Es handelt sich hier um ein Kurvenintegral 1. Art, vgl. Bronstein [2] Kapitel 3.1.8.2 S.319 und Bartsch [1] Kapitel 10.8 S.421.

Es soll nun der Weg  $s$  gefunden werden, bei dem  $R$  minimal wird. Wir setzen:

$$F(s, s', \tau) := q(s(\tau)) \cdot \left| \frac{d}{d\tau} s(\tau) \right|$$

Dazu dienen die Eulerschen Differentialgleichungen der Variationsrechnung vgl. Forster [3] §9 S.92:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial s'_i}(s, s', \tau) - \frac{\partial F}{\partial s_i}(s, s', \tau) = 0 \quad (1)$$

## H. Elektrizität

für  $i = 1, \dots, n$ , also  $n$  Gleichungen  $n = 2, 3$   
und  $s(a) = x \quad s(b) = y$

Es ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit 2 Anfangswerten.

Wir setzen voraus, daß  $s$  und  $F$  zweimal stetig differenzierbar sind.

Nun setzen wir  $F$  in das Differentialgleichungssystem ein:  $\text{grad} := \text{Gradient}$

$$\frac{d}{d\tau} [\text{grad}_{s'} |s'| \cdot q(s)] - (\text{grad}_s q(s)) \cdot |s'| = 0$$

Es ist:

$$\frac{d}{d\tau} q(s) = \langle \text{grad}_s q(s), s' \rangle$$

mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \text{Skalarprodukt im } R^n$

nach der Kettenregel in Forster [3] §6 S.50. Wir wenden nun auf das System die Produktregel an:

$$\frac{d}{d\tau} [\text{grad}_{s'} |s'|] \cdot q(s) + \text{grad}_{s'} |s'| \cdot \langle \text{grad}_s q(s), s' \rangle - (\text{grad}_s q(s)) \cdot |s'| = 0$$

Wir beachten nun:

$$\text{grad}_{s'} |s'| = \frac{s'}{|s'|} \quad \text{nach Forster [3] (5.4) S.37}$$

Nach der Produktregel ergibt sich:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{s'}{|s'|} = \frac{s''}{|s'|} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s'}{|s'|^3} \cdot \frac{d}{d\tau} (|s'|^2)$$

mit:

$$\frac{d}{d\tau} (|s'|^2) = 2 \cdot \langle s', s'' \rangle$$

Wir erhalten für das System:

$$\left[ \frac{s''}{|s'|} - \frac{s'}{|s'|^3} \cdot \langle s', s'' \rangle \right] \cdot q(s) + \frac{s'}{|s'|} \cdot \langle \text{grad}_s q(s), s' \rangle - (\text{grad}_s q(s)) \cdot |s'| = 0 \quad (2)$$

Die Auflösung nach  $s''$  ist möglich. Damit liegt ein explizites Differentialgleichungssystem 2. Ordnung vor. Man kann nun dieses System in  $2n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung umwandeln, z.B. nach Forster [3] §10 S.99. Auch dieses System ist explizit. Eine exakte Lösung dieses Systems 1. Ordnung ist nur mit Reihenentwicklung z.B. nach Kamke [4] Teil A §2 (6.3) S.38 evt. möglich.

In Abhängigkeit der Form von  $q(s)$  können evt. auch andere Methoden verwendet werden.

Aus den System (2) und den Anfangsbedingungen kann man eine Lösung oder mehrere

Lösungen oder sogar eine Lösungsschar gewinnen. In extremen Fällen ist auch keine Lösung möglich. Bei mehreren Lösungen sucht man die mit dem kleinsten  $R(s, x, y)$ , bei einer Lösungsschar muß  $R(s, x, y)$  minimiert werden. Gibt es bei den Scharparametern keine Nebenbedingungen, so geht die Minimierung mit Nullsetzung des Gradienten und der Hesse-Matrix. Sind Nebenbedingungen nur in der Form von Gleichungen vorhanden, so kann das Verfahren mit den Lagrange-Multiplikatoren verwendet werden. Gibt es Ungleichungen bei diesen Nebenbedingungen, so muß nach Methoden der nichtlinearen Optimierung vorgegangen werden.

## Literatur

- [1] „Taschenbuch mathematischer Formeln“ Hans-Jochen Bartsch Verlag Harri Deutsch 7. bis 9. Auflage Frankfurt am Main 1986
- [2] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage
- [3] Otto Forster „Analysis 2“ 5.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig
- [4] Erich Kamke „Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen“ Band 1 10.Auflage Teubner Verlag Stuttgart 1983

© 2002 Harald Schröder

# Kapitel I.

## Optik

### Inhalt

50. Kegelschnittspiegel . . . . .	233
51. Brechung an einer Glaskugel, die Brechung des Lichtes an einer planparallelen Platte und die scheinbare Verschiebung durch eine Flüssigkeit . . . . .	238
52. Ähnliche Abbildungen von Dreiecken im Auge . . . . .	242



## 50. Kegelschnittspiegel

### 1. Kegelschnittspiegel allgemein

Wir werden hier nach dem Grund suchen, warum bei allen Kegelschnittspiegeln die Abbildungsgleichungen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{\bar{b}} \qquad \frac{G}{B} = \frac{g}{\bar{b}}$$

gültig sind. Dabei sind:

$f$  = Brennweite des Spiegels

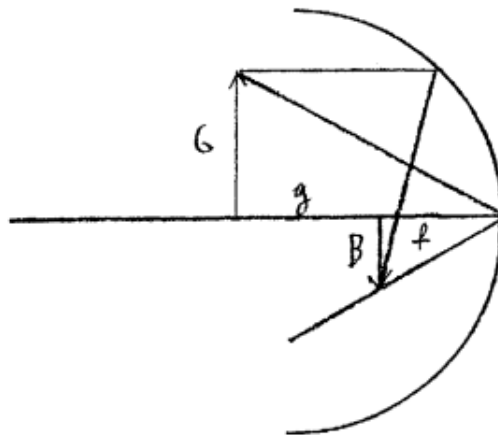
$g$  = Gegenstandsweite

$\bar{b}$  = Bildweite

$G$  = Gegenstandsgröße

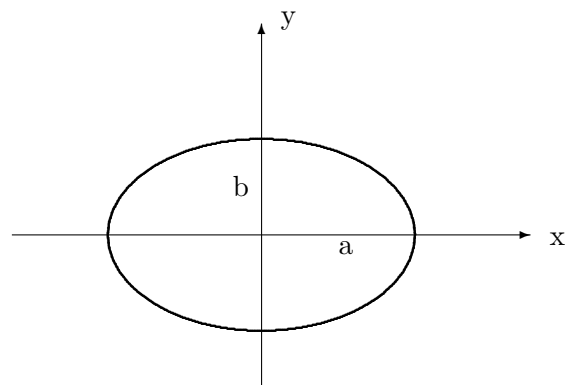
$B$  = Bildgröße

Vgl. dazu auch folgende Abbildung:



Wir wissen, daß bei kugelförmigen Spiegeln diese Abbildungsgleichungen gültig sind.

Wir schauen uns nun die Ellipse an:



## I. Optik

$a, b$  = große und kleine Halbachse

Es gilt die Mittelpunktsleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Daraus folgt:

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wir differenzieren:

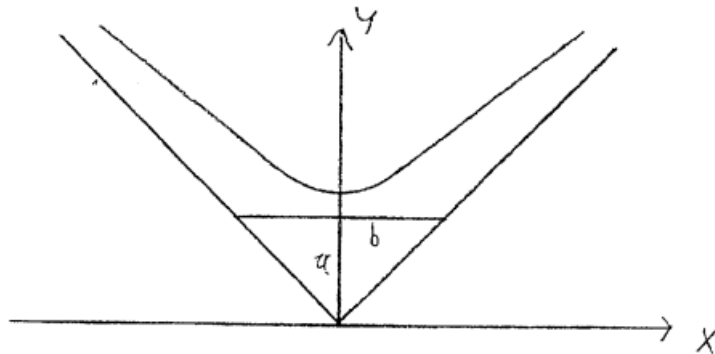
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\pm \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Bei  $a \gg x$  erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} \approx \pm \frac{b}{a^2} \cdot x$$

Interessant ist hier die Proportionalität zu  $x$ , die auch für den Spezialfall Kreis ( $a = b = r$ ) besteht.

Nun gehen wir zur Hyperbel:



$a, b$  = Halbachsen der Hyperbel

Wir haben hier die Mittelpunktsleichung:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Wir bekommen daraus:

$$y = a \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + x^2}$$

Wir bilden die Ableitung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

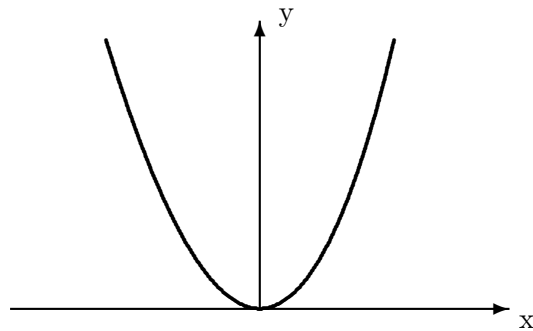
## I. Optik

Für  $b \gg x$  folgern wir:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{a}{b^2} \cdot x$$

Auch hier besteht eine Proportionalität zu  $x$ .

Als letztes betrachten wir die Parabel:



Die Parabelgleichung ist  $y = mx^2$  mit  $m \in \mathbb{R}$ . Also bekommen wir:

$$\frac{dy}{dx} = 2mx$$

Auch hier haben wir eine Proportionalität zu  $x$ .

Bei allen Kegelschnitten haben wir bei kleinen Ausschnitten die Proportionalität der Ableitung zu  $x$ . Das bedeutet, daß die Abbildungsgleichungen für alle Kegelschnittspiegel gelten, sofern  $G, B \ll a, b, r$  ist. Diese Abbildungsgleichungen gelten also bei Kugelspiegeln, Parabolspiegeln und Spiegeln mit der Form von Rotationsellipsoiden bzw. Rotationshyperboloiden.

## 2. Abweichung vom Brennstrahl

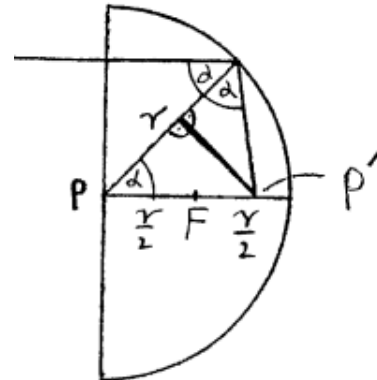
Wir betrachten einen sphärischen Hohlspiegel mit dem Radius  $r$  wie in der folgenden Abbildung:

Aus der Optik ist bekannt, daß ein achsenparalleler Strahl nach der Reflektion näherungsweise durch den Brennpunkt geht. Es geht nun darum diese sehr kleine Abweichung zu

I. Optik

F = BRENNPUNKT

$$X = \overline{PP'}$$



bestimmen. Dieser Abstand zum Brennpunkt soll durch den Winkel  $\alpha$  angegeben werden. Aufgrund des Reflektionsgesetzes und der Gleichheit von Wechselwinkel wird ein gleichschenkliges Dreieck gebildet. Damit haben wir:

$$x = \frac{r}{2 \cdot \cos \alpha}$$

Die gesuchte Abweichung ist dann:

$$D = x - \frac{r}{2} = \frac{r}{2 \cdot \cos \alpha} - \frac{r}{2}$$

oder:

$$D = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

$D$  ist der Abstand zwischen dem Brennpunkt und dem Schnittpunkt des Strahls auf der optischen Achse.

$x$  kann maximal gleich  $r$  sein. Setzen wir in die erste Gleichung ein, so erhalten wir:

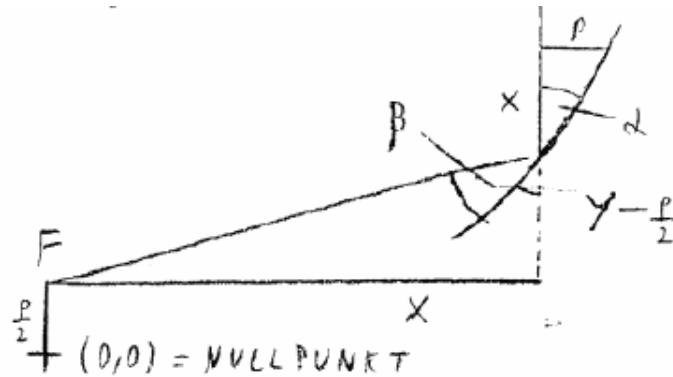
$$r = \frac{r}{2 \cdot \cos \alpha_{max}}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{2} = \cos \alpha_{max} \quad \alpha_{max} = 60^\circ$$

### 3. Beweis, daß achsenparallele Strahlen beim Parabolspiegel in den Brennpunkt reflektiert werden.

Wir betrachten folgende Abbildung:



Wir zeigen, daß sich achsenparallele Strahlen nach der Reflektion im Brennpunkt  $F$  schneiden.  $\beta$  ist nach dem Reflektionsgesetz gleich  $\alpha$ . Also kommen wir auf folgende Gleichung:

$$\tan 2\alpha = \frac{x}{y - \frac{p}{2}}$$

Wir ziehen die Scheitelgleichung  $x^2 = 2py$  heran. Wir setzen sie in die vorige Gleichung bei  $y$  ein:

$$\tan 2\alpha = \frac{x}{\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2}} = \frac{2px}{x^2 - p^2}$$

Nach der Scheitelgleichung ist  $y = \frac{x^2}{2p}$  und  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}$ .

Aus der Zeichnung und dem Steigungswinkel erkennt man  $\tan \alpha = \frac{p}{x}$ . Nun benutzen wir das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Einsetzung:

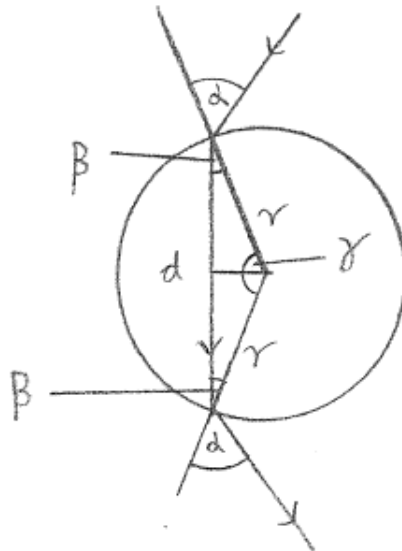
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{p}{x}}{1 - \frac{p^2}{x^2}} = \frac{2px}{x^2 - p^2}$$

Die beiden Darstellungen für  $\tan 2\alpha$  stimmen also überein. Damit schneidet die Achsenparallele nach der Reflektion am Parabolspiegel den Brennpunkt  $F$ .

## 51. Brechung an einer Glaskugel, die Brechung des Lichtes an einer planparallelen Platte und die scheinbare Verschiebung durch eine Flüssigkeit

### 1. Brechung an einer Glaskugel

Wir untersuchen hier den Durchgang von Lichtstrahlen durch eine Glaskugel. Die Umgebung soll ein Vakuum sein. Siehe dazu die Abbildung.



$r$  = Radius der Glaskugel  
 $\alpha$  = Einfallswinkel  
 $n$  = Brechzahl der Glaskugel

Aus der Zeichnung entnehmen wir:

$$d = 2r \cdot \cos \beta = 2r \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

Für das Brechungsgesetz schreiben wir:

$$\frac{\sin \alpha}{n} = \sin \beta$$

Wir setzen das Brechungsgesetz ein:

$$d = 2r \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$$

oder:

$$d = \frac{2r}{n} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad n > 1 \geq \sin \alpha$$

## I. Optik

Aus der Zeichnung erkennen wir  $\frac{\gamma}{2} + \beta = 90^\circ$  mit Hilfe der beiden rechtwinkligen Dreiecke. Daraus erhalten wir durch das Brechungsgesetz:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin (90^\circ - \frac{\gamma}{2})}$$

oder:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \alpha}{n}$$

Für die Durchgangszeit des Lichtes durch die Glaskugel bekommen wir:

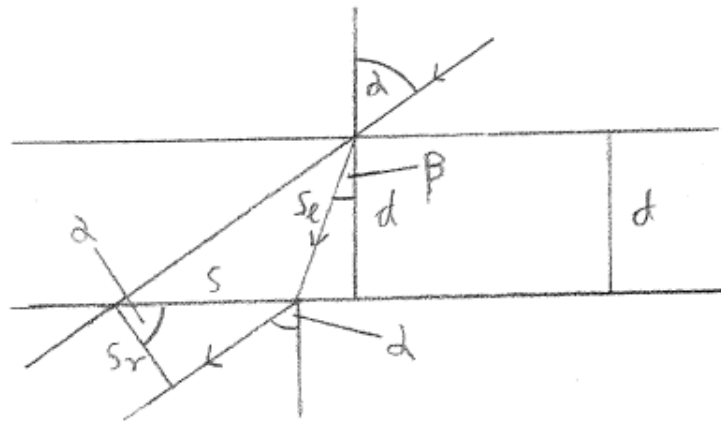
$$t = \frac{d \cdot n}{c}$$

Wird das Vakuum durch ein gasförmiges Medium ersetzt, dann muß  $\frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Gas}}}$  anstatt von  $n$  eingesetzt werden. Diese beiden Brechzahlen müssen auf das Vakuum bezogen sein.

Die hier hergeleiteten Gleichungen können auch für Flüssigkeitstropfen verwendet werden, falls diese Tropfen Kugelgestalt haben.

## 2. Brechung des Lichtes an einer planparallelen Platte

Wir schauen uns den Gang des Lichtstrahls durch eine Glasplatte an, wie in der Abbildung gezeigt wird. Außerhalb der Glasplatte soll sich Vakuum befinden.



$n$  = Brechzahl der Platte  
 $d$  = Dicke der Platte  
 $\alpha$  = Einfallswinkel  
 $\beta$  = Brechungswinkel

Es gilt das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

## I. Optik

Gesucht ist die Parallelverschiebung  $s_r$  des Lichtstrahls. Nach der Abbildung schließen wir:

$$s = d \cdot (\tan \alpha - \tan \beta)$$

oder:

$$s = d \cdot \left( \tan \alpha - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)$$

Zu der gesuchten Größe  $s_r$  besteht der folgende Zusammenhang:

$$s_r = s \cdot \cos \alpha$$

Verwendet man  $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha$  und  $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ , so erhalten wir:

$$s_r = d \cdot \left( \sin \alpha - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \right)$$

Nun setzen wir das Brechungsgesetz bei  $\sin \beta$  ein:

$$s_r = d \cdot \left( \sin \alpha - \frac{\cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{n}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \right)$$

Schließlich bekommen wir:

$$s_r = d \cdot \sin \alpha \cdot \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$

Die Brechzahl ist immer größer als 1. Deswegen gilt  $n > \sin \alpha$ . Die Durchgangslänge  $s_l$  können wir mit

$$s_l = \frac{d}{\cos \beta} = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}$$

bestimmen. Für die Durchgangszeit berechnen wir:

$$t = \frac{s_l \cdot n}{c}$$

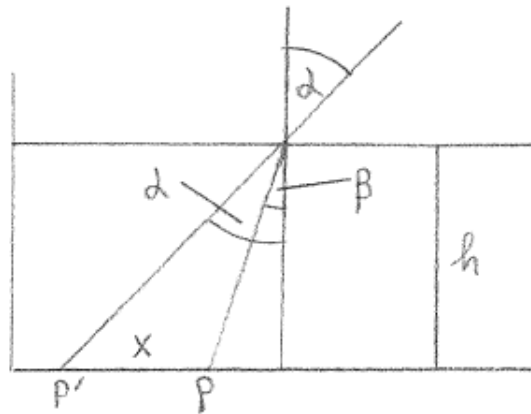
Wird das umgebene Vakuum durch ein Gas mit der Brechzahl  $n_G$  ersetzt, so ist anstatt von  $n$  der Quotient  $\frac{n_P}{n_G}$  einzusetzen.  $n_P$  ist hier dann die Brechzahl der Platte, die auf das Vakuum bezogen sein muß.

### 3. Scheinbare Verschiebung durch eine Flüssigkeit

Wir betrachten folgende Zeichnung:



## I. Optik



Ein Behälter enthält eine Flüssigkeit mit der Höhe  $h$ . Auf dem Boden befindet sich eine kleine Perle  $P$ . Schaut man unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Oberfläche der Flüssigkeit, so erscheint die Perle von  $P$  nach  $P'$  verschoben. Wir haben das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad \text{oder} \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$$

$n$  = Brechzahl der Flüssigkeit

$x$  = scheinbare Verschiebung

Für die scheinbare Verschiebung entnehmen wir aus der Abbildung:

$$x = h \cdot (\tan \alpha - \tan \beta)$$

Mit

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \quad \text{wegen} \quad \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

erhalten wir:

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha}{n \cdot \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \alpha}{n^2}}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Durch  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$  kommen wir zur folgenden Darstellung der scheinbaren Verschiebung:

$$x = h \cdot \sin \alpha \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \quad (1)$$

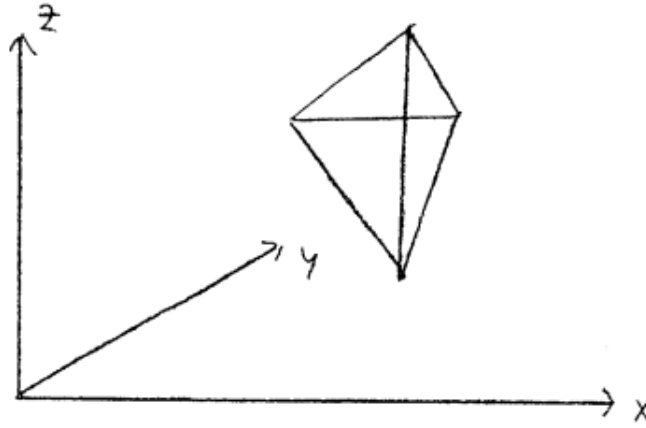
Wir können dieses Problem noch verallgemeinern. So kann das Vakuum durch ein beliebiges Gas ersetzt werden. Wenn  $n_G$  die Brechzahl des Gases und  $n_F$  die Brechzahl der Flüssigkeit ist, so lautet das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_F}{n_G}$$

$\frac{n_F}{n_G}$  ist dann anstatt von  $n$  in Gleichung (1) einzusetzen.

## 52. Ähnliche Abbildungen von Dreiecken im Auge

Wir wollen hier feststellen, unter welchen Bedingungen ähnliche Abbildungen von Dreiecken im Auge möglich sind. Wir schauen uns folgende Abbildung an:



Wir betrachten zwei beliebige Dreiecke mit den Vektoren  $\vec{p}_{11}, \vec{p}_{12}, \vec{p}_{13} \in R^3$  und  $\vec{p}_{21}, \vec{p}_{22}, \vec{p}_{23} \in R^3$ . Zentrum der Streckung soll der Umkreismittelpunkt  $\vec{p}_r$  beider Dreiecke sein. Dann haben wir noch:

$r_1$  = Außenkreisradius des ersten Dreiecks  
 $r_2$  = Außenkreisradius des zweiten Dreiecks

Zur Bestimmung von  $\vec{p}_r$  ziehen wir folgende 3 Gleichungen heran:

$$(\vec{p}_r - \vec{p}_{11})^2 = (\vec{p}_r - \vec{p}_{12})^2 = (\vec{p}_r - \vec{p}_{13})^2 = r_1^2$$

Mit diesen 3 Gleichungen ist  $\vec{p}_r$  berechnet. Wir führen den Streckungsfaktor  $\bar{a} = \frac{r_2}{r_1}$  ein. Nun kommen wir zu den Punkten  $\vec{p}_{21}, \vec{p}_{22}, \vec{p}_{23}$  des zweiten Dreiecks:

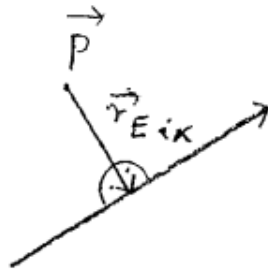
$$(\vec{p}_r - \vec{p}_{1k}) \cdot \bar{a} = \vec{p}_r - \vec{p}_{2k} \quad k \in 1, 2, 3$$

Mit dieser Kollinearitätsbedingung stehen uns 9 Gleichungen für die drei Vektoren des zweiten Dreiecks zur Verfügung. Nun stellen wir die Seitenvektoren der beiden Dreiecke dar:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{11} &= \vec{p}_{11} - \vec{p}_{12} & \vec{u}_{21} &= \vec{p}_{21} - \vec{p}_{22} \\ \vec{u}_{12} &= \vec{p}_{12} - \vec{p}_{13} & \vec{u}_{22} &= \vec{p}_{22} - \vec{p}_{23} \\ \vec{u}_{13} &= \vec{p}_{13} - \vec{p}_{11} & \vec{u}_{23} &= \vec{p}_{23} - \vec{p}_{21} \end{aligned}$$

Nun geben wir die Position  $\vec{p} \in R^3$  des Aussichtspunktes (Auge) an. Wir schauen uns folgende Abbildung an:

# I. Optik



Für  $\vec{r}_E$  benutzen wir eine Formel, die wir im Anhang herleiten.

$$\vec{r}_{Eik} = \vec{p}_{ik} + \frac{\vec{u}_{ik} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_{ik})}{|\vec{u}_{ik}|^2} \cdot \vec{u}_{ik} - \vec{p} \quad (1)$$

$|\cdot|$  = euklidischer Betrag eines Vektors in  $R^3$

Nun legen wir Gegenstandsweite und Gegenstandsgröße fest:

$$|\vec{r}_{Eik}| =: g_{ik} \quad (\text{Gegenstandsweite})$$

$$|\vec{u}_{ik}| =: G_{ik} \quad (\text{Gegenstandsgröße})$$

Im Auge ist die Bildweite  $b$  gegeben. Die Augenlinse kann ihre Brennweite  $f$  verändern. Die Brennweite erhalten wir aus:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g_{ik}} + \frac{1}{b}$$

Abbildungsgleichung:

$$B_{ik} = \frac{G_{ik} \cdot b}{g_{ik}} \quad (2)$$

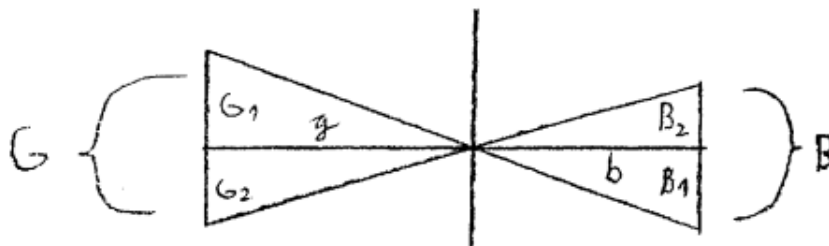
Nur im Fall

$$\frac{B_{21}}{B_{11}} = \frac{B_{22}}{B_{12}} = \frac{B_{23}}{B_{13}}$$

kommt es zu einer ähnlichen Abbildung im Auge. Das muß im allgemeinen nicht so sein.

$$G_1 + G_2 = G$$

$$B_1 + B_2 = B$$



## I. Optik

Im allgemeinen werden wir einen Fall wie in dieser Abbildung vorliegen haben. Aufgrund der Gleichungen

$$B_1 = \frac{G_1 \cdot b}{g} \quad B_2 = \frac{G_2 \cdot b}{g}$$

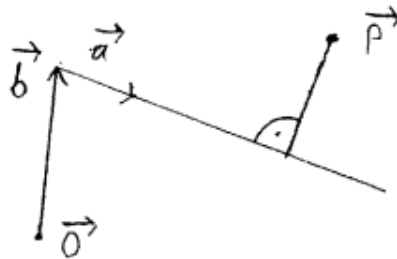
und

$$B = B_1 + B_2 = (G_1 + G_2) \cdot \frac{b}{g} = \frac{G \cdot b}{g}$$

kann  $G$  direkt in Gleichung (2) eingesetzt werden.

### Anhang:

Wir wollen hier die Formel (1) beweisen. Es geht um das Problem, den Minimalabstand zwischen dem Punkt  $\vec{p}$  und einer Gerade zu bestimmen.



Die Gerade hat die Form:

$$\vec{v} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{b}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

Entfernungsvektor:

$$\vec{r} = \vec{v} - \vec{p} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{a} - \vec{p}$$

Für den Betrag der Entfernung ergibt sich:

$$r = \sqrt{(\vec{b} + \lambda \cdot \vec{a} - \vec{p})^2}$$

Wir differenzieren  $r$  mit der Kettenregel nach  $\lambda$ :

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{(\vec{b} + \lambda \cdot \vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{a}}{\sqrt{(\vec{b} + \lambda \cdot \vec{a} - \vec{p})^2}}$$

Die notwendige Bedingung für ein lokales Minimum:

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0$$

Also folgt:

$$(\vec{b} + \lambda_{min} \cdot \vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{a} = 0$$

Wir formen nach  $\lambda_{min}$  um:

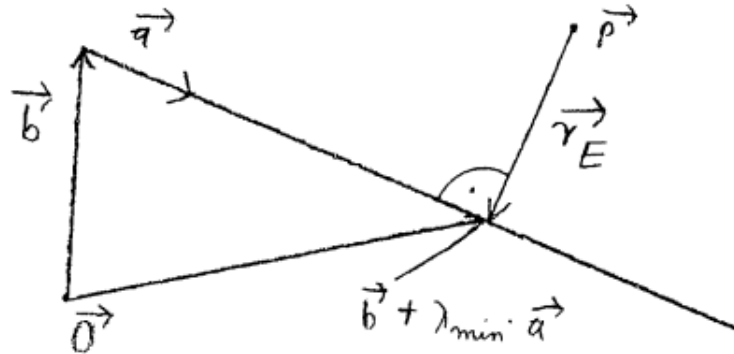
$$\lambda_{min} \cdot \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

## I. Optik

Also kommen wir zum eindeutigen Resultat:

$$\lambda_{min} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{b})}{\vec{a}^2} \quad (3)$$

Wir schauen uns nun die folgende Zeichnung an:



Es ist klar, daß es einen minimalen Abstand geben muß.  $\lambda_{min}$  ist eindeutig bestimmt durch Gleichung (3). Somit ist bei diesen  $\lambda_{min}$  eine minimale Entfernung. Wir berechnen nun den Minimalabstand selbst:

$$\vec{r}_E = \vec{b} + \lambda_{min} \cdot \vec{a} - \vec{p}$$

Einsetzung von Gleichung (3) bei  $\lambda_{min}$ :

$$\vec{r}_E = \vec{b} + \frac{\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{b})}{\vec{a}^2} \cdot \vec{a} - \vec{p} \quad (4)$$

Nun wird gezeigt, daß  $\vec{r}_E$  senkrecht auf  $\vec{a}$  steht:

$$\begin{aligned} \vec{r}_E \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{b})}{\vec{a}^2} \cdot \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{p} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \end{aligned}$$

Es ist also  $\vec{r}_E$  senkrecht zu  $\vec{a}$ . Aus der Zeichnung ist klar ersichtlich, daß es einen Minimalabstand geben muß. Dieser Minimalabstand kann mit der Formel (4) berechnet werden. Formel (1) ist eine Anwendung von Formel (4).

© 2001 Harald Schröder

# Kapitel J.

## Fotometrie (Strahlung)

### Inhalt

53. Der Lichtstrom durch das geneigte Rechteck im Medium . . . . .	247
54. Rechteck als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) im Vakuum . . . . .	251
55. Rechteck als Strahler — die Beleuchtungsstärke im Medium . . . . .	254
56. Lichtstrom (Strahlungsleistung, Strahlungsfluß) und Raumwinkel durch die geneigte Ellipse . . . . .	258
57. Ellipse als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) . . . . .	261

## 53. Der Lichtstrom durch das geneigte Rechteck im Medium

**Abstract:** Wir berechnen den Lichtstrom durch ein Rechteck im Medium mit konstanten Absorptionskoeffizienten. Das erste Ziel ist eine Integraldarstellung. Dieses Integral wird auf ein Integral über ein Intervall reduziert. Bei den physikalischen Strahlungsgrößen gelten dieselben Gleichungen wie bei den fotometrischen Strahlungsgrößen.

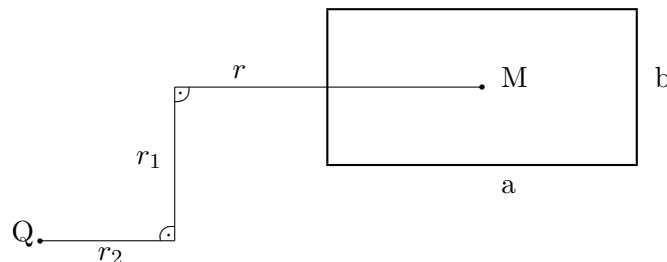
**Key words:** Optische Energie - geometrische Optik - Photometrie - Strahlung - Radiometrie

### 1. Einleitung

Wir betrachten eine Lichtquelle **Q** mit der Lichtstärke  $I$  und ein geneigtes Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$  im Medium (Gas). Dichte und Absorptionskoeffizient  $m$  sind konstant. Das Medium kann z.B. reine Luft sein. Die Absorption wird in [2] behandelt. Die Integrationstechnik ist ähnlich zum geneigten Kreis in [5]. Dieses zweidimensionale Integral wird auf ein Integral über ein Intervall zurückgeführt (vgl. [4]). Danach kann z.B. die Simpsonregel verwendet werden. Die Simpsonregel bietet sich an, weil die Abweichung vom Integral proportional zu  $n^{-4}$  ist vgl. [1]. Dabei ist  $n$  die Anzahl der Schritte.

### 2. Berechnung

Wir schauen uns folgende Abbildung an:



**Fig.1.** Lichtquelle **Q** mit geneigtem Rechteck, dem Abstand  $r$  und den Verschiebungen  $r_1$  und  $r_2$ .  $r$  ist bezogen auf den geometrischen Mittelpunkt **M** des Rechtecks.

Wir bilden den Entfernungsvektor  $(r, r_2 + x_1, r_1 + x_2)$  mit  $x_2 \in [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$  und  $x_1 \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ . Nun erhalten wir für die Beleuchtungsstärke:

$$E(x_1, x_2) = \frac{I \cdot \exp(-ml(x_1, x_2))}{(l(x_1, x_2))^2} \quad (1)$$

mit

$$l(x_1, x_2) = \sqrt{(r_1 + x_2)^2 + (r_2 + x_1)^2 + r^2}.$$

Berücksichtigung findet der Neigungswinkel  $\beta$  am Punkt  $(x_1, x_2)$ :

$$\cos \beta(x_1, x_2) = \frac{r}{l(x_1, x_2)} \quad . \quad (2)$$

Wir definieren eine Funktion:

$$f(x_1, x_2) := E(x_1, x_2) \cdot \cos \beta(x_1, x_2) \quad .$$

Für den Lichtstrom  $\Phi$  durch das Rechteck muß integriert werden:

$$\Phi = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad . \quad (3)$$

Im Spezialfall  $r_1 = 0$  und  $r_2 = 0$  gilt:

$$\Phi = 4 \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4)$$

Nun wenden wir die Transformationsformel auf Gleichung (3) an:

$$\Phi = \int_0^1 \int_0^1 g(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

mit der Abbildung

$$\vec{A}(x_1, x_2) = (bx_1 - \frac{b}{2}, ax_2 - \frac{a}{2})$$

und

$$g(x_1, x_2) = ab \cdot f(bx_1 - \frac{b}{2}, ax_2 - \frac{a}{2}).$$

Es gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x_1, \langle Nx_1 \rangle) dx_1$$

Dabei ist  $\langle Nx_1 \rangle$  der Bruchteil der Zahl  $N \cdot x_1$ , und  $N$  ist eine natürliche Zahl. Wir erhalten dann:

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x_1, \langle Nx_1 \rangle) dx_1.$$

Die Tabelle zeigt die Auswertung.



**Table 1.** Lichtstrom für  $a=2\text{m}, b=1.5\text{m}, I=1\text{cd}, r_1=0.5\text{m}$  und  $m=0.00003\text{ m}^{-1}$  in Abhängigkeit von  $r$ . Dabei ist  $r_2=0$ .

$r[\text{m}]$	$\Phi[\text{Lumen}]$
1	1.78
1.2	1.42
1.4	1.14
1.6	0.930
1.8	0.769
2	0.644
2.2	0.545
2.4	0.467
2.6	0.404
2.8	0.353
3	0.311
3.2	0.275
3.4	0.246
3.6	0.220
3.8	0.199
4	0.180
4.2	0.164
4.4	0.150
4.6	0.137
4.8	0.127
5	0.117

Sind die Größen  $x_1, x_2, a$  und  $b$  sehr klein gegenüber der Entfernung  $r$ , so bekommen wir die Näherungsformel

$$\Phi \approx \frac{Iab \cdot \exp(-m \cdot \sqrt{r^2 + r_1^2 + r_2^2}) \cdot \cos \alpha}{r^2 + r_1^2 + r_2^2}$$

mit den Neigungswinkel  $\alpha$ . Dieser ist erklärt durch

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r}.$$

### 3. Folgerung

Wir haben den Lichtstrom durch das geneigte Rechteck als eindimensionales Integral erhalten. Für  $r \gg a, b$  sind die Abweichungen zwischen exakter Auswertung und der Näherungsformel gering. Die Abweichungen werden größer, wenn  $r$  nicht mehr sehr groß gegenüber den Seiten  $a$  und  $b$  ist. Die Genauigkeit kann gesteigert werden, wenn für  $N = 10^k$  und  $k$  aus der Menge der natürlichen Zahlen gewählt wird. Dabei sollte  $k$  so groß sein, dass für jeden Schritt der Simpsonregel  $\langle Nx_1 \rangle = 0$  ist. Dann sind die berechneten Werte von  $N$  unabhängig.

Diese Gleichungen gelten analog für die entsprechenden physikalischen Größen Strahlstärke, Bestrahlungsstärke und Strahlungsfluss oder Strahlungsleistung im visuellen Wellenlängenbereich.

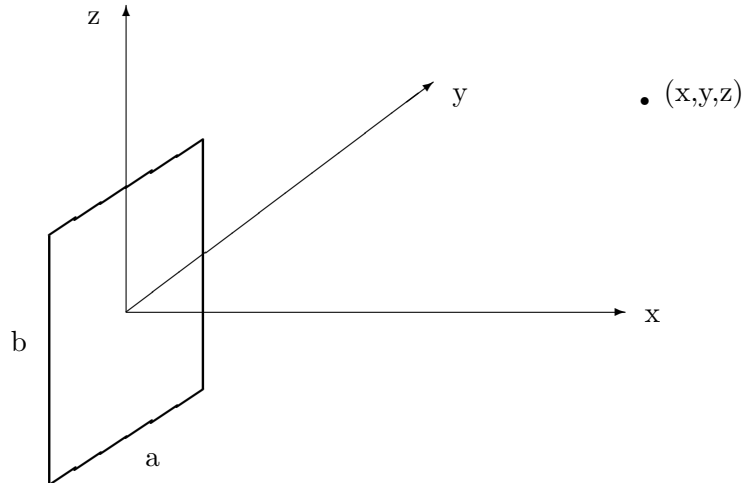
### **Literatur**

- [1] Barner M, Flohr F: Analysis I, p.414. de Gruyter, Berlin 1983
- [2] Fabelinskii,I: Molecular Scattering of Light, New York 1968
- [3] Forster, O: Analysis 3, pp.14-17. Vieweg Verlag, Braunschweig 1983
- [4] He T: Dimensionality reducing expansion of multivariate integration, p.86. Birkhäuser, Boston 2001
- [5] Schröer,H: Lichtstrom und Beleuchtungsstärke, pp.31-67. Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin 2001

© 2007 **Harald Schröer**

## 54. Rechteck als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) im Vakuum

Das Rechteck liegt im Ursprung und hat die Seiten  $a$  und  $b$ . Wir wollen hier die Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) bestimmen. Die Methode ist ähnlich zu der in Schröder [2] (Kapitel 7). Wir betrachten das folgende Rechteck:



Wir führen die Lichtstärke (Strahlstärke)  $I$  des Rechtecks ein. Die konstante Lichtstärke-dichte (Strahlstärke-dichte) beträgt:

$$w = \frac{I}{ab}$$

Wir definieren  $x_1 \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  und  $x_2 \in [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ .

Für die Entfernung haben wir:

$$l(x_1, x_2) := \sqrt{x^2 + (y - x_1)^2 + (z - x_2)^2}$$

Es wird  $x > 0$  angenommen.

Dann können wir die Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) im Vakuum konstruieren:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{I}{ab} \cdot \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right|^3} dx_1 dx_2 \quad (1)$$

Nun konstruieren wir eine Näherungsformel für  $a, b \ll x$ :

$$\vec{E} \approx \frac{w \cdot ab}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} \approx \frac{I}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| \approx \frac{I}{r^2} \quad \text{für} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =: r \gg a, b$$

Nun betrachten wir den Spezialfall  $y = z = 0$ :

Wegen der Symmetrie folgt:

$$\vec{E}(x, y, z) = (E_1(x, y, z), 0, 0)$$

$$E_1(x, y, z) = \frac{Ix}{ab} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx_1 dx_2}{(x^2 + x_1^2 + x_2^2)^{1.5}}$$

Die Integration erfolgt nach Bronstein [1] S.47 Nr.206 mit  $c := x^2 + x_2^2$ :

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx_1}{(x_1^2 + c)^{1.5}} = \left[ \frac{x_1}{c \cdot \sqrt{x_1^2 + c}} \right]_{x_1=-\frac{a}{2}}^{x_1=\frac{a}{2}} = \frac{a}{c \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + c}}$$

Wir bekommen:

$$E_1(x, 0, 0) = \frac{Ix}{b} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dx_2}{(x^2 + x_2^2) \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2 + x_2^2}}$$

Mit „Mathematica“ ergibt sich:

$$= \frac{2I}{ba} \cdot \left[ \arctan \left( \frac{\frac{a}{2} \cdot x_2}{x \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2 + x_2^2}} \right) \right]_{x_2=-\frac{b}{2}}^{x_2=\frac{b}{2}}$$

Wegen  $-\arctan(-s) = \arctan s$  erhalten wir:

$$E_1(x, 0, 0) = \frac{4I}{ba} \cdot \arctan \left( \frac{ab}{4x \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} + x^2}} \right)$$

Für  $x \gg a, b$  bekommen wir die Näherung:

$$E_1(x, 0, 0) \approx \frac{I}{x^2}$$

Für  $y, z \neq 0$  kann mit Bronstein [1] Nr.242,S.49 und Nr.250,S.50  $\vec{E}(x, y, z) = (E_1, E_2, E_3)$  auf Integrale über Intervalle zurückgeführt werden, die mit numerischen Methoden behandelt werden können.

$$E_1(x, y, z) = \frac{I}{ab} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{x dx_1 dx_2}{(l(x_1, x_2))^3}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } l(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1^2 - 2yx_1 + x^2 + y^2 + (z - x_2)^2} \\ &= \frac{I}{ab} \cdot \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \frac{2 \cdot (2x_1 - 2y) \cdot x}{\Delta \cdot l(x_1, x_2)} \right]_{x_1 = \frac{-a}{2}}^{x_1 = \frac{a}{2}} dx_2 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \Delta := 4 \cdot (x^2 + y^2 + (z - x_2)^2) - 4y^2$$

$$\begin{aligned} E_2(x, y, z) &= \frac{I}{ab} \cdot \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{(y - x_1) dx_1 dx_2}{(l(x_1, x_2))^3} \\ &= \frac{I}{ab} \cdot \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} H(x_2) dx_2 \end{aligned}$$

$$\text{mit } H(x_2) := \left[ \frac{2y \cdot (2x_1 - 2y) - 4yx_1 - 4 \cdot (x^2 + y^2 + (z - x_2)^2)}{\Delta \cdot l(x_1, x_2)} \right]_{x_1 = \frac{-a}{2}}^{x_1 = \frac{a}{2}}$$

$$\begin{aligned} E_3(x, y, z) &= \frac{I}{ab} \cdot \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{(z - x_2) dx_1 dx_2}{(l(x_1, x_2))^3} \\ &= \frac{I}{ab} \cdot \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \frac{2 \cdot (2x_1 - 2y) \cdot (z - x_2)}{\Delta \cdot l(x_1, x_2)} \right]_{x_1 = \frac{-a}{2}}^{x_1 = \frac{a}{2}} dx_2 \end{aligned}$$

Der Betrag ergibt sich aus:

$$E(x, y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (E_i(x, y, z))^2}$$

Bei diesen Integralen kann z.B. die Simpsonregel verwendet werden.

## Literatur

- [1] Bronstein, Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“, 22.Auflage Teubner Verlag Leipzig 1985
- [2] Harald Schröder „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001

## 55. Rechteck als Strahler — die Beleuchtungsstärke im Medium

**Abstract:** Wir berechnen die Beleuchtungsstärke von einem Rechteck im Medium mit konstanten Absorptionskoeffizienten. Das erste Ziel ist eine Integraldarstellung. Dieses Integral wird auf ein Integral über ein Intervall reduziert.

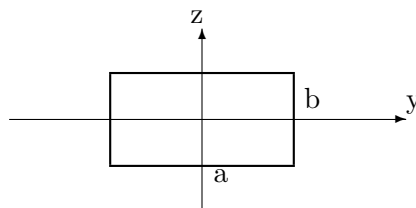
**Key words:** Optische Energie - geometrische Optik - Photometrie - Strahlung - Radiometrie

### 1. Einleitung

Wir betrachten eine rechteckige Lichtquelle mit der Lichtstärke  $I$  in Medium (Gas). Das Rechteck hat die Seiten  $a$  und  $b$ . Dichte und Absorptionskoeffizient  $m$  sind konstant. Das Medium kann z.B. reine Luft sein. Die Absorption wird in [2] behandelt. Die Integrations-technik ist ähnlich zum geneigten Kreis in [5], Kapitel 11. Mit der Transformationsformel vgl. [3] bekommen wir Integrale über das Einheitsquadrat. Diese zweidimensionalen Integrale werden auf Integrale über Intervalle zurückgeführt (vgl. [4]). Danach kann z.B. die Simpsonregel verwendet werden. Die Simpsonregel bietet sich an, weil die Abweichung vom Integral proportional zu  $n^{-4}$  ist vgl. [1]. Dabei ist  $n$  die Anzahl der Schritte.

### 2. Berechnung

Wir schauen uns folgende Abbildung an:



**Fig.1.** Rechteckige Lichtquelle mit den Seiten  $a$  und  $b$ . Der geometrische Mittelpunkt des Rechtecks liegt im Ursprung.

Wir führen die Lichtstärkedichte

$$w = \frac{I}{ab}$$

ein.  $E$  soll die Beleuchtungsstärke sein. Dann wird die Beleuchtungsstärke des Rechtecks an einen Punkt  $(x, y, z)$  mit  $x > 0$  beschrieben durch

$$\vec{E} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \vec{f}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1)$$

mit

$$\vec{f}(x_1, x_2) := w \cdot \frac{\exp[-m \cdot l(x_1, x_2)]}{[l(x_1, x_2)]^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y - x_1 \\ z - x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$l(x_1, x_2) = \sqrt{x^2 + (y - x_1)^2 + (z - x_2)^2}.$$

Nun wenden wir die Transformationsformel an:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^1 \vec{g}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2)$$

mit der Abbildung

$$\vec{A}(x_1, x_2) = (bx_1 - \frac{b}{2}, ax_2 - \frac{a}{2})$$

und

$$\vec{g}(x_1, x_2) = ab \cdot \vec{f}(bx_1 - \frac{b}{2}, ax_2 - \frac{a}{2}).$$

Es gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x_1, \langle Nx_1 \rangle) dx_1$$

für jede stetige Funktion  $g$ . Dabei ist  $\langle Nx_1 \rangle$  der Bruchteil der Zahl  $N \cdot x_1$ , und  $N$  ist eine natürliche Zahl.

Die Reduzierung auf ein eindimensionales Integral erfolgt komponentenweise mit  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$  und  $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ . Es folgt für  $i \in 1, 2, 3$ :

$$E_i(x, y, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 g_i(x_1, \langle Nx_1 \rangle) dx_1.$$

Die Tabelle zeigt die Auswertung.

**Table 1.** Betrag der Beleuchtungsstärke für  $a = 2\text{m}$ ,  $b = 1.5\text{m}$ ,  $I = 1\text{cd}$  und  $m = 0.00003 \text{ m}^{-1}$  in Abhängigkeit von  $x$ . Dabei sind  $y = z = 0$ .

$x[\text{m}]$	$E[\text{Lux}]$
4	0.0561
4.2	0.0514
4.4	0.0472
4.6	0.0435
4.8	0.0402
5	0.0373
5.2	0.0347
5.4	0.0323
5.6	0.0302
5.8	0.0282
6	0.0265
6.2	0.0249
6.4	0.0234
6.6	0.0220
6.8	0.0208
7	0.0197
7.2	0.0186
7.4	0.0177
7.6	0.0168
7.8	0.0160
8	0.0152

Für  $r \gg a, b$  gibt es folgende Näherungsformel für den Betrag der Beleuchtungsstärke:

$$E = \frac{I \cdot \exp(-mr)}{r^2}$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

### 3. Folgerung

Wir haben die Beleuchtungsstärke von einer rechteckigen Quelle in ein eindimensionales Integral erhalten. Für  $r \gg a, b$  sind die Abweichungen zwischen exakter Auswertung und der Näherungsformel gering. Die Abweichungen werden größer, wenn  $r$  nicht mehr sehr groß gegenüber den Seiten  $a$  und  $b$  ist. Die Genauigkeit kann gesteigert werden, wenn für  $N = 10^k$  und  $k$  aus der Menge der natürlichen Zahlen gewählt wird. Dabei sollte  $k$  so groß sein, dass für jeden Schritt der Simpsonregel  $\langle Nx_1 \rangle = 0$  ist. Dann sind die berechneten Werte von  $N$  unabhängig.

Diese Gleichungen gelten analog für die entsprechenden physikalischen Größen Strahlstärke und Bestrahlungsstärke im visuellen Wellenlängenbereich.



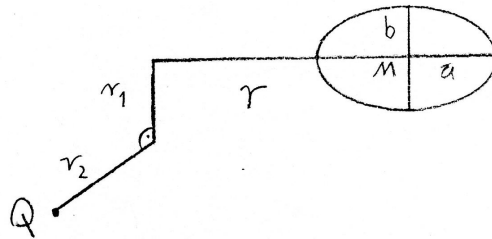
**Literatur**

- [1] Barner M, Flohr F: Analysis I,p.414. de Gruyter, Berlin 1983
- [2] Fabelinskii I: Molecular Scattering of Light, New York 1968
- [3] Forster O: Analysis 3,pp.14-17.Vieweg Verlag, Braunschweig 1983
- [4] He T: Dimensionality reducing expansion of multivariate integration, p.86. Birkhäuser, Boston 2001
- [5] Schröer H: Lichtstrom und Beleuchtungsstärke, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin 2001

© 2007 **Harald Schröer**

## 56. Lichtstrom (Strahlungsleistung, Strahlungsfluß) und Raumwinkel durch die geneigte Ellipse

Wir werden hier den Lichtstrom (Strahlungsleistung, Strahlungsfluß) und den Raumwinkel  $\Omega$  durch eine geneigte Ellipse bestimmen. Die Methode ist ähnlich zu der in Schröder [3] (Kapitel 7 und 9). Wir betrachten die folgende Ellipse:



$a$  und  $b$  sind die Halbachsen.  $r$  ist die Entfernung. Wir führen den Absorptionskoeffizienten  $m$  des Mediums und die Lichtstärke (Strahlstärke)  $I$  der Punktlichtquelle  $Q$  ein. Der Neigungswinkel der Ellipse beträgt:

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r}$$

$M$  ist der geometrische Mittelpunkt der Ellipse.

Wir verwenden die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$h(x) := y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wir definieren  $x_1 \in [-a, a]$  und  $x_2 \in [-h(x_1), h(x_1)]$  und bilden den Entfernungsvektor:

$$\vec{l} = (r, x_1 + r_2, r_1 + x_2)$$

Die Entfernung ergibt dann:

$$l(x_1, x_2) = \sqrt{r^2 + (x_1 + r_2)^2 + (r_1 + x_2)^2}$$

Damit kommen wir zur Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke):

$$E(x_1, x_2) = \frac{I \cdot e^{-m \cdot l(x_1, x_2)}}{(l(x_1, x_2))^2}$$

Nun benötigen wir den Neigungswinkel am Punkt  $(x_1, x_2)$ :

$$\cos \beta(x_1, x_2) = \frac{r}{l(x_1, x_2)}$$

Wir definieren:

$$f(x_1, x_2) := E(x_1, x_2) \cdot \cos \beta(x_1, x_2)$$

Wir bilden den Lichtstrom (Strahlungsleistung, Strahlungsfluß) durch die Ellipse:

$$\Phi = \int_{-a}^a \int_{-h(x)}^{h(x)} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (1)$$

Nun konstruieren wir eine Näherungsformel für  $a, b \ll r$ :

$$\Phi \approx \frac{I \cdot e^{-m \cdot \sqrt{r^2 + r_1^2 + r_2^2}} \cdot \pi ab \cdot \cos \alpha}{r^2 + r_1^2 + r_2^2} \quad (2)$$

mit:

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r}$$

Mit  $m = 0$  und ohne  $I$  folgt aus den Gleichungen für  $\Phi$  der Raumwinkel durch die Ellipse.

Ein Programm für die Auswertung von (1) wird bei Robinson [2] gegeben.

### Zurückführung des Raumwinkels auf ein eindimensionales Integral:

Das innere Integral von (1) ergibt bei  $m = 0$ :

$$\int_{-h(x_1)}^{h(x_1)} \frac{dx_2}{(l(x_1, x_2))^3} = \left[ \frac{2 \cdot (2x_2 + 2r_1)}{\Delta \cdot l(x_1, x_2)} \right]_{x_2=-h(x_1)}^{x_2=h(x_1)} =: Z(x_1)$$

mit

$$l(x_1, x_2)^2 = x_2^2 + 2r_1x_2 + r_1^2 + (x_1 + r_2)^2 + r^2$$

und

$$\Delta := 4 \cdot (r_1^2 + (x_1 + r_2)^2 + r^2) - 4r_1^2$$

Die Integration erfolgt nach Bronstein [1] Nr. 242 S.49.

Der Raumwinkel läßt sich dann schreiben als:

$$\Omega = r \cdot \int_{-a}^a Z(x_1) dx_1 \quad (3)$$

Hier ist es am besten, numerische Methoden wie z.B. die Simpsonregel anzuwenden.

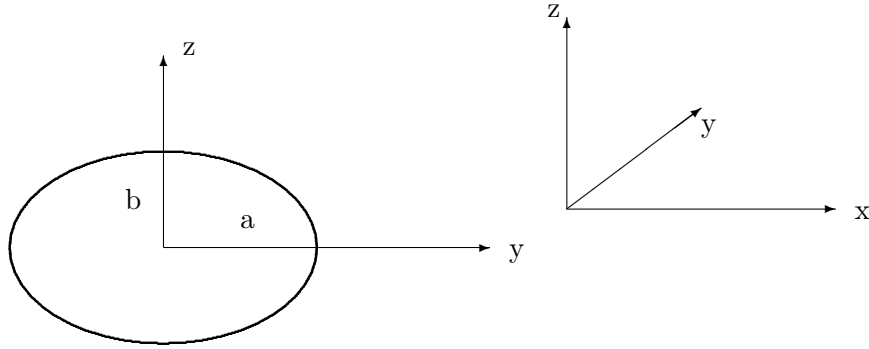
## **Literatur**

- [1] Bronstein, Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“, 22.Auflage Teubner Verlag Leipzig 1985
- [2] Robinson, de Doncker, „Algorithm 45, Automatic computation of improper integrals over a bounded or unbounded planar region“, Computing, 27 (1981) 3, p.253-284
- [3] Harald Schröder „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001

© 2006 **Harald Schröder**

## 57. Ellipse als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke)

Die Ellipse liegt im Ursprung und hat die Halbachsen  $a$  und  $b$ . Wir wollen hier die Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) bestimmen. Die Methode ist ähnlich zu der in Schröer [3] (Kapitel 7). Wir betrachten die folgende Ellipse:



Wir führen den Absorptionskoeffizienten  $m$  des Mediums und die Lichtstärke (Strahlstärke)  $I$  der Ellipse ein. Die konstante Lichtstärkedichte (Strahlstärkedichte) beträgt:

$$w = \frac{I}{\pi ab}$$

Wir definieren  $x_1 \in [-a, a]$  und  $x_2 \in [-h(x_1), h(x_1)]$ .

Wir verwenden die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

Daraus folgt:

$$h(x_1) := x_2 = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

Für die Entfernung haben wir:

$$l(x_1, x_2) := \sqrt{x^2 + (y - x_1)^2 + (z - x_2)^2}$$

Es wird  $x > 0$  angenommen.

Dann können wir die Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) im Vakuum konstruieren:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-a}^a \int_{-h(x_1)}^{h(x_1)} \frac{I}{\pi ab} \cdot \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right|^3} dx_2 dx_1 \quad (1)$$

Im Medium beträgt die Beleuchtungsstärke(Bestrahlungsstärke):

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{I}{\pi ab} \cdot \int_{-a-h(x_1)}^a \int_{-h(x_1)}^{h(x_1)} \frac{e^{-m \cdot l(x_1, x_2)}}{(l(x_1, x_2))^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y - x_1 \\ z - x_2 \end{pmatrix} dx_2 dx_1 \quad (2)$$

Nun konstruieren wir eine Näherungsformel für  $a, b \ll x$ :

$$\vec{E} \approx \frac{w \cdot \pi \cdot ab \cdot e^{-m \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} \approx \frac{I \cdot e^{-m \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| \approx \frac{I \cdot e^{-mr}}{r^2} \quad \text{für} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =: r \gg a, b$$

Ein Programm für die Auswertung von (2) wird bei Robinson [2] gegeben.

Nun betrachten wir den Spezialfall  $y = z = 0$  im Vakuum, das bedeutet  $m = 0$ .

$$\text{Symmetrie} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(x, y, z) = (E_1(x, y, z), 0, 0)$$

$$E_1(x, y, z) = \frac{Ix}{\pi ab} \cdot \int_{-a-h(x_1)}^a \int_{-h(x_1)}^{h(x_1)} \frac{dx_2 dx_1}{(x^2 + x_1^2 + x_2^2)^{1.5}}$$

Die Integration erfolgt nach Bronstein [1] S.47 Nr.206:

$$E_1(x, y, z) = \frac{Ix}{\pi ab} \cdot \int_{-a}^a \left[ \frac{x_2}{c \cdot \sqrt{x_2^2 + c}} \right]_{x_2=-h(x_1)}^{x_2=h(x_1)} dx_1$$

mit  $c := x^2 + x_1^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{2Ix}{\pi ab} \cdot \int_{-a}^a \frac{h(x_1) dx_1}{(x^2 + x_1^2) \cdot \sqrt{(h(x_1))^2 + x^2 + x_1^2}} \\ &= \frac{2Ix}{\pi a^2} \cdot \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - x_1^2} dx_1}{(x^2 + x_1^2) \cdot \sqrt{b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) + x^2 + x_1^2}} \end{aligned}$$

Die Auswertung führt zu elliptischen Integralen erster und dritter Art.

Hier ist es am besten, numerische Methoden wie z.B. die Simpsonregel anzuwenden.

Für  $y, z \neq 0$  kann bei  $m = 0$  mit Bronstein [1] Nr.242,S.49 und Nr.250,S.50  $\vec{E}(x, y, z)$  auf Integrale über Intervalle zurückgeführt werden, die mit numerischen Methoden behandelt werden können.

## **Literatur**

- [1] Bronstein, Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“, 22.Auflage Teubner Verlag Leipzig 1985
- [2] Robinson, de Doncker, „Algorithm 45, Automatic computation of improper integrals over a bounded or unbounded planar region“, Computing, 27 (1981) 3, p.253-284
- [3] Harald Schröder „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001

© 2006 **Harald Schröder**

# Kapitel K.

## Relativitätstheorie und Mikrophysik

### Inhalt

58. Geschwindigkeit und Temperatur . . . . .	265
59. Compton-Effekt —Ablenkung des Elektrons . . . . .	267



## 58. Geschwindigkeit und Temperatur

**Abstract:** In dieser Arbeit wird die Geschwindigkeit als Funktion der Temperatur bestimmt. Es wird der klassische und der relativistische Fall behandelt.

**Key words:** Geschwindigkeit - Temperatur - kinetische Energie - relativistische Statistik

Wir ziehen die bekannte Formel für die relativistische kinetische Energie heran:

$$E_{kin} = mc^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (1)$$

Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeit,  $m$  die Masse eines Teilchens und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Wir formen diese Gleichung nach  $v$  um:

$$\frac{E_{kin}}{mc^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\frac{E_{kin}}{mc^2} + 1}$$

Damit kommen wir zu:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left( \frac{1}{\frac{E_{kin}}{mc^2} + 1} \right)^2$$

Auflösung nach  $v$ :

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{E_{kin}}{mc^2} + 1} \right)^2}$$

Schließlich:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{mc^2}{E_{kin} + mc^2} \right)^2} \quad (2)$$

Im klassischen Fall haben wir einfach:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}}$$

In der Thermodynamik hat nach Höfling [1] Teil 1, Kapitel 3.1.6, S.336 jedes Teilchen die mittlere kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \cdot kT$$

$k$  ist die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur in Kelvin.

Daraus folgt sofort:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (3)$$

Die letzten beiden Formeln gelten solange die Temperatur viel kleiner als  $10^8$  K ist.

Bei höheren Temperaturen gibt es nach Neugebauer [2] Kapitel 3.2.2 S.85 eine andere Beziehung  $E_{kin}(T)$  aus der relativistischen Statistik, wobei Bessel-Funktionen eine Rolle spielen. Setzen wir die Funktion  $E_{kin}(T)$  in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir die Geschwindigkeit als Funktion  $v(E_{kin}(T))$  von der Temperatur.

Weitere relativistische Probleme, die in der Fachliteratur kaum vorkommen, finden sich bei Schröer [3].

## **Literatur**

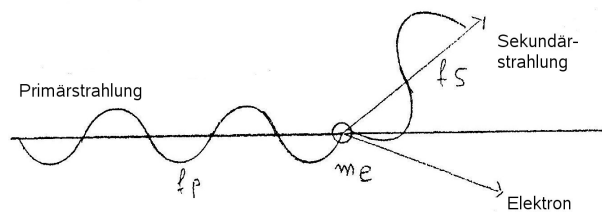
- [1] O.Höfling „Physik“ Band II, Dümmler Verlag Bonn 1981
- [2] Gernot Neugebauer „Relativistische Thermodynamik“, Akademie-Verlag Berlin 1980
- [3] Harald Schröer „Besondere Probleme aus der speziellen Relativitätstheorie“, Wissenschaft & Technik Verlag Berlin 2002

© 2009 **Harald Schröer**

## 59. Compton-Effekt — Ablenkung des Elektrons

Wenn elektromagnetische Strahlung auf ruhende Elektronen trifft, dann wird die Wellenlänge der Strahlung etwas vergrößert. Dieser Streuvorgang wird als Compton-Effekt bezeichnet. Wir führen folgende Größen ein:

$\lambda_p, \lambda_s$  = Primär- bzw. Sekundärwellenlänge der Strahlung  
 $f_p, f_s$  = Primär- bzw. Sekundärfrequenz der Strahlung  
 $m_e$  = Masse des Elektrons  
 $c$  = Lichtgeschwindigkeit  
 $h$  = Plancksches Wirkungsquantum  
 $\vartheta$  = Streuwinkel



In vielen Physikbüchern z.B. in Höfling [1] Kapitel 8.1.5 S.725-729 wird eine Herleitung der Wellenlängenverschiebung gegeben. Diese lautet:

$$\Delta\lambda := \lambda_s - \lambda_p = \frac{h}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos \vartheta)$$

Mit Hilfe der Wellenlängen - Frequenz - Beziehung erhalten wir:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{f_s} - \frac{c}{f_p} = \frac{h}{m_e c} \cdot (1 - \cos \vartheta) \quad (1)$$

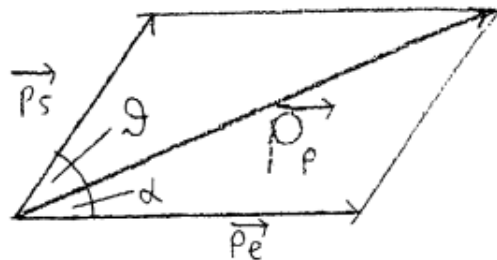
Wir lösen diese Gleichung nach  $f_s$  auf:

$$f_s = \frac{c}{\frac{h}{m_e c} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \frac{c}{f_p}}$$

Erweitert:

$$f_s = \frac{m_e f_p c^2}{h \cdot (1 - \cos \vartheta) \cdot f_p + m_e c^2} \quad (2)$$

Nun betrachten wir folgende Abbildung:



## K. Relativitätstheorie und Mikrophysik

Das Ziel ist nun, den Ablenkungswinkel  $\alpha$  des Elektrons auszurechnen. Wir verwenden den Impulserhaltungssatz:

$$\vec{p}_e = \vec{p}_p - \vec{p}_s$$

Die Indices e,p,s stehen dabei für Elektron, primäre Strahlung und sekundäre Strahlung. Wir können diesen Sachverhalt auch durch den Kosinussatz ausdrücken:

$$p_e^2 = p_p^2 + p_s^2 - 2p_p p_s \cdot \cos \vartheta \quad (3)$$

Der Kosinussatz kann auch noch in anderer Weise benutzt werden:

$$p_s^2 = p_p^2 + p_e^2 - 2p_p p_e \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

Wir formen die letzte Gleichung nach  $\cos \alpha$  um und setzen für  $p_e$  die Gleichung (3) ein:

$$\cos \alpha = \frac{p_p^2 + p_e^2 - p_s^2}{2p_e p_p} = \frac{p_p - p_s \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{p_p^2 + p_s^2 - 2p_p p_s \cdot \cos \vartheta}}$$

Die Photonenimpulse können folgendermaßen dargestellt werden:

$$p_p = \frac{h \cdot f_p}{c} \quad p_s = \frac{h \cdot f_s}{c}$$

Eine Einsetzung in den letzten Term der Gleichung für  $\cos \alpha$  führt zu:

$$\cos \alpha = \frac{f_p - f_s \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{f_p^2 + f_s^2 - 2f_p f_s \cdot \cos \vartheta}} \quad (5)$$

Mit der Gleichung (1) kommen wir zu:

$$1 - \cos \vartheta = \frac{\left(\frac{c}{f_s} - \frac{c}{f_p}\right) \cdot m_e c}{h}$$

Schließlich:

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{m_e c^2}{h} \cdot \left(\frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_p}\right) \quad (6)$$

Diesen Ausdruck können wir nun in die Gleichung (5) für  $\cos \alpha$  einsetzen:

$$\cos \alpha = \frac{f_p - f_s \cdot \left(1 - \frac{m_e c^2}{h} \cdot \left(\frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_p}\right)\right)}{\sqrt{f_p^2 + f_s^2 - 2f_p f_s \cdot \left(1 - \frac{m_e c^2}{h} \cdot \left(\frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_p}\right)\right)}}$$

Damit haben wir den Ablenkungswinkel als Funktion der beiden Frequenzen. Die beiden Frequenzen können gemessen werden. Man kann mit der letzten Gleichung dann den Ablenkungswinkel bestimmen. Der Streuwinkel  $\vartheta$  kann mit Gleichung (6) ermittelt werden.

## Literatur

- [1] Oskar Höfling „Physik“ Band II Teil 3 Dümmler Verlag 12.Auflage 1979 Bonn

# Kapitel L.

## Astronomie

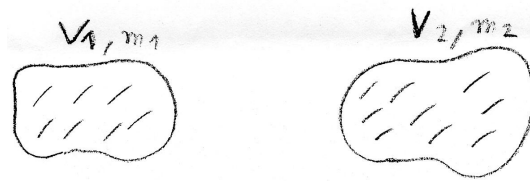
### Inhalt

60. Gravitationsbeschleunigung bei Rotationsellipsoid, Kugel und allgemeinen Rotationskörper	270
61. Bewegungen auf einem rotierenden Planeten	277
62. Projektionen von Winkeln und Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche	282
63. Frequenzveränderung der Strahlung im Gravitationsfeld	288
64. Der lokale Ausschnitt der Ellipse	292
65. Die Bewegung in Gravitations- und elektromagnetischen Feldern	294
66. Wurfbahnen im Schwerfeld eines Planeten	298
67. Rotierende Scheibe, Bahnen in Hohlkugeln und der schwingende Körper im Gravitationsfeld — ein Versuch	305
68. Die Form des Rotationsellipsoiden infolge der Zentrifugalkraft	315
69. Die scheinbare Helligkeit von Planeten	318
70. Finsternisse, eine nichtkonventionelle Darstellung	333
71. Geographische Breite und geozentrische Breite	338
72. Ein Beobachter auf einem unregelmäßigen Körper	342
73. Die Länge eines Tages auf einen Planeten	345
74. Die Anzahl der neuentstandenen Objekte im Raum und der mittlere Abstand	348

## 60. Gravitationsbeschleunigung bei Rotationsellipsoid, Kugel und allgemeinen Rotationskörper

**Abstract:** Die Gravitationsbeschleunigungen auf Planeten, die die Form eines Rotationsellipsoiden, einer Kugel und eines allgemeinen Rotationskörpers haben, werden berechnet.

**Key words:** Gravitationsbeschleunigung - Fallbeschleunigung - Schwerefeld - Kugel - Rotationsellipsoid - Rotationskörper - Planet



$m_1, m_2$  sind zwei Massen mit den Volumina  $V_1, V_2$ .

$m_1$  erzeugt eine Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}_1$ , ebenso wird durch  $m_2$  eine Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}_2$  hervorgerufen. Wenn  $G$  die Gravitationskonstante und  $\varphi_1, \varphi_2$  die Dichten von  $m_1$  und  $m_2$  sind, dann können die Beschleunigungen ausgedrückt werden durch:

$$\vec{g}_1(\vec{r}, t) = \int_{V_1(t)} \frac{G\varphi_1(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|} d\vec{x} \quad (1)$$

$$\vec{g}_2(\vec{r}, t) = \int_{V_2(t)} \frac{G\varphi_2(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|} d\vec{x} \quad (2)$$

$t$  ist dabei die Zeit. Wir haben damit auch den Fall zeitlich veränderlicher Felder eingeschlossen. Nun kommen wir zur Kraft:

$\vec{K}_{1,2}$  = Kraft, mit der  $m_2$  von  $m_1$  angezogen wird.

$\vec{K}_{2,1}$  = Kraft, mit der  $m_1$  von  $m_2$  angezogen wird.

Diese Kräfte können dargestellt werden mit:

$$\vec{K}_{1,2}(t) = \int_{V_2(t)} \vec{g}_1(\vec{x}, t) \cdot \varphi_2(\vec{x}, t) d\vec{x} \quad (3)$$

$$\vec{K}_{2,1}(t) = \int_{V_1(t)} \vec{g}_2(\vec{x}, t) \cdot \varphi_1(\vec{x}, t) d\vec{x} \quad (4)$$

Außerdem muß nach dem 3. Newton-Axiom sein:

$$\vec{K}_{1,2}(t) = -\vec{K}_{2,1}(t) \quad (5)$$

Wir müssen bei den drei letzten Gleichungen allerdings voraussetzen, dass  $m_1$  und  $m_2$  ruhen. Wenn sich diese Massen bewegen, gilt ganz allgemein mit  $\vec{v}$  als Geschwindigkeit:

$$\vec{K} = \frac{d}{dt}(m(t) \cdot \vec{v}(t)) = m(t) \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{m} \cdot \vec{v}$$

Die Berechnung wird dann etwas komplizierter.

Wichtige Spezialfälle sind, wenn beide Massen ruhen und  $\vec{g}_1$  im Bereich  $V_2$  bzw.  $\vec{g}_2$  im Bereich  $V_1$  örtlich konstant sind. Dann erhalten wir:

$$\vec{K}_{1,2} \approx m_2(t) \cdot \vec{g}_1(\vec{x}, t) \quad (6)$$

$$\vec{K}_{2,1} \approx m_1(t) \cdot \vec{g}_2(\vec{x}, t) \quad (7)$$

In unseren Fall wird die Masse konstant bleiben, so dass der Term  $\dot{m} \cdot \vec{v}$  nicht mit berücksichtigt werden muß.

In die Gleichungen für die Gravitationsbeschleunigungen kann statt  $\frac{G}{|\vec{x}-\vec{r}|^2}$  auch eine andere geeignete Funktion  $k(\vec{x}-\vec{r})$  eingesetzt werden. Damit kann die Gravitationsbeschleunigung modifiziert werden. In der Himmelsmechanik kann z.B. davon Gebrauch gemacht werden, wenn die Massen als Massenpunkte betrachtet werden.

Berücksichtigt man schließlich noch, dass bei Änderungen von Gravitationsfeldern und bei nicht kugelförmigen Körpern Gravitationswellen ausgestrahlt werden, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegen, so muss anstatt von  $t$

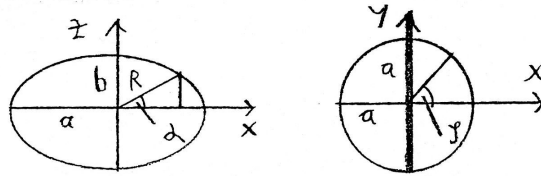
$$t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{r}|}{c}$$

eingesetzt werden. Also bekommen wir  $\varphi_1(\vec{x}, t')$  und  $\varphi_2(\vec{x}, t')$  anstatt von  $\varphi_1(\vec{x}, t)$  und  $\varphi_2(\vec{x}, t)$ . Die Dichten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bleiben natürlich Funktionen von  $\vec{x}$  und  $t$ .

Es werden nun verschiedene Spezialfälle von Rotationskörpern behandelt.

## 1. Rotationsellipsoid

Wir nehmen dafür an, dass der Mittelpunkt des Rotationsellipsoids im Koordinatenursprung liegt:



$\alpha$  = Breitengrad

$\varphi$  = Längengrad

$a, b$  = große bzw. kleine Halbachse  $a \geq b$

$a, b$  können Funktionen der Zeit  $t$  sein. Wir müssen nun  $R$  als Funktion von  $a, b$  und vom Breitengrad  $\alpha$  ermitteln. Wir ziehen folgende Gleichung heran:

$$x \cdot \tan \alpha = z \quad (8)$$

und die Mittelpunktsleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Für  $R$  haben wir die Gleichung  $R^2 = x^2 + z^2$ . Eine Gleichsetzung der ersten beiden Gleichungen liefert:

$$b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = x \cdot \tan \alpha$$

oder:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (a^2 - x^2) = x^2 \cdot \tan^2 \alpha$$

Wir lösen nun nach  $x^2$  auf:

$$x^2 = \frac{b^2}{\tan^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2 a^2}{a^2 \tan^2 \alpha + b^2}$$

Mit  $R^2 = x^2 + z^2$  und  $z = x \cdot \tan \alpha$  erhalten wir:

$$R^2 = x^2 \cdot (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{a^2 b^2}{a^2 \tan^2 \alpha + b^2} \cdot (1 + \tan^2 \alpha)$$

Es gilt:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Damit kommen wir zu:

$$R^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \tan^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Die Beziehung  $\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$  führt schließlich zu:

$$R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}$$

Mit  $r = R \cdot \cos \alpha$  erhalten wir:

$$r = \frac{\cos \alpha \cdot ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}$$

Für  $\vec{X}$  haben wir nun die Darstellung:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix}$$

Für  $r$  ist dabei die vorige Gleichung einzusetzen.



Wir wollen nun  $b$  in eine etwas andere Form schreiben, dabei verwenden wir die lineare Exzentrizität  $e$  und die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$ :

$$e^2 := a^2 - b^2 \quad \varepsilon^2 := \frac{e^2}{a^2}$$

Nun formen wir weiter um:

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2 - a^2\varepsilon^2 = a^2 \cdot (1 - \varepsilon^2)$$

Daraus folgt:

$$b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \varepsilon \leq 1$$

Wenn wir  $b$  in der Form  $b = a \cdot k$  schreiben, dann ist  $k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . Wir können dann ein  $\bar{a} \in [0, a]$  und ein  $\bar{b} = \bar{a} \cdot k \in [0, b]$  einführen.

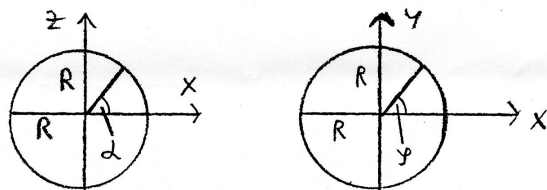
$(\bar{a}, \alpha, \varphi)$  ist ein geeignetes natürliches Koordinatensystem für Rotationsellipsoide. Nun folgt mit  $\bar{a}$  und  $\bar{b} = \bar{a} \cdot k$ :

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\cos \alpha \cdot \bar{a} \cdot \bar{a} \cdot k}{\sqrt{\bar{a}^2 \sin^2 \alpha + \bar{a}^2 k^2 \cos^2 \alpha}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \bar{a} \cdot k}{\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_1(\bar{a}, \alpha, \varphi) \end{aligned}$$

$\vec{\phi}_1$  stellt die Beziehung  $(\bar{a}, \alpha, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$  dar. Wir definieren noch  $\vec{y}_1 := (\bar{a}, \alpha, \varphi)$ .

## 2. Kugel

Der Mittelpunkt der Kugel soll im Koordinatenursprung sein.



Wir können Kugelkoordinaten einführen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Breitengrad} & -\frac{\pi}{2} &\leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \varphi &= \text{Längengrad} & -\pi &\leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

Der Kugelradius soll  $R(t)$  sein.  $t$  ist wieder die Zeit. Nun nehmen wir ein  $r \in [0, R]$ :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \sin \varphi \\ \sin \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_2(r, \alpha, \varphi)$$

Zum vorletzten Vektor vgl. z.B. Bartsch [1] Kapitel 7.2.1 S.265.  $\vec{\phi}_2$  stellt die Beziehung zwischen  $(r, \alpha, \varphi)$  und  $(x, y, z)$  dar.

Nun können wir beim Rotationsellipsoiden und bei der Kugel die Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}$  bestimmen.  $\vec{P}$  gehört zur Oberfläche. Wir verwenden dabei die allgemeine Transformationsformel (vgl. z.B. Forster [2] §13 Satz 2 S.120) aus der mehrdimensionalen Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \vec{g}_i(\vec{P}) &= \int_{V_i} \frac{G\varphi_i(\vec{X}, t)}{|\vec{X} - \vec{P}|^2} \cdot \frac{\vec{X} - \vec{P}}{|\vec{X} - \vec{P}|} d\vec{X} \\ &= \int_{U_i} \frac{G \cdot (\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P})}{|\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P}|^3} \cdot \varphi_i(\vec{\phi}_i(\vec{y}_i), t) \cdot |\det D\vec{\phi}_i(\vec{y}_i)| d\vec{y}_i \end{aligned}$$

Dabei ist  $D\vec{\phi}_i$  die Jakobi-Matrix von  $\vec{\phi}_i$  und  $V_i = \vec{\phi}_i(U_i)$ .  $i = 1$  ist für den Rotationsellipsoiden und  $i = 2$  für die Kugel. Außerdem sind  $\vec{y}_1 = (\bar{a}, \alpha, \varphi)$  und  $\vec{y}_2 = (r, \alpha, \varphi)$  definiert. Bezeichnen wir die Funktion unter den letzten Integralzeichen mit  $\vec{h}_i(\vec{y}_i, t)$ , so erhalten wir mit  $(\bar{a}, \alpha, \varphi) \in U_1 = [0, a] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$  für den Rotationsellipsoiden an der Oberfläche:

$$\vec{g}_1(\vec{P}) = \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \vec{h}_1(\bar{a}, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha d\bar{a} \quad \text{mit} \quad \vec{P} := \vec{\phi}_1(a, \alpha, \varphi)$$

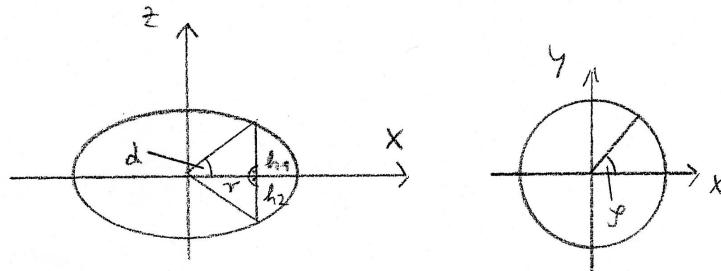
Für die Kugel ergibt sich mit  $(r, \alpha, \varphi) \in U_2 = [0, R] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$  an der Oberfläche:

$$\vec{g}_2(\vec{P}) = \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}_2(r, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha dr \quad \text{mit} \quad \vec{P} := \vec{\phi}_2(R, \alpha, \varphi)$$

Wir haben in beiden Fällen 3-dimensionale Integrale. Natürlich kann man mit dem Integral für den Rotationsellipsoiden auch den Fall der Kugel behandeln. Allerdings wird das zweite Integral etwas einfacher bei der konkreten Berechnung sein.

### 3. Das natürliche Koordinatensystem des allgemeinen Rotationskörpers

Wir wollen nun auch für den allgemeinen Rotationskörper naheliegende natürliche Koordinaten einführen:



$\alpha$  = Breitengrad

$\varphi$  = Längengrad

Wir stellen den Vektor  $\vec{X}$  dar mit:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h_1(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r \tan \alpha \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_3(r, \alpha, \varphi)$$

für  $z \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$  und  $r \in [0, r_0]$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ -h_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r \tan \alpha \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_4(r, \alpha, \varphi)$$

für  $z \leq 0$ ,  $\alpha \leq 0$  und  $r \in [0, r_0]$

Dabei ist  $r_0$  der Äquatorradius des Rotationskörpers.  $(r, \alpha, \varphi)$  sind die gewünschten natürlichen Koordinaten des Rotationskörpers. Die Gravitationsbeschleunigung können wir dann ausdrücken mit der allgemeinen Transformationsformel (vgl. z.B. Forster [2], §13, Satz 2, S.120):

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{P}) &= \sum_{i=3}^4 \int_{V_i} \frac{G \varphi_i(\vec{X}, t)}{|\vec{X} - \vec{P}|^2} \cdot \frac{\vec{X} - \vec{P}}{|\vec{X} - \vec{P}|} d\vec{X} \\ &= \sum_{i=3}^4 \int_{U_i} \frac{G \cdot (\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P})}{|\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P}|^3} \cdot \varphi_i(\vec{\phi}_i(\vec{y}_i), t) \cdot |\det D\vec{\phi}_i(\vec{y}_i)| d\vec{y}_i \end{aligned}$$

Dabei ist  $V_i = \vec{\phi}_i(U_i)$ .  $i = 3$  ist für den nördlichen Teil und  $i = 4$  für den südlichen Teil des Rotationskörpers. Außerdem sind  $\vec{y}_3 = (r, \alpha, \varphi)$  und  $\vec{y}_4 = (r, \alpha, \varphi)$  definiert. Bezeichnen wir die Funktion unter dem letzten Integralzeichen mit  $\vec{h}_i(\vec{y}_i, t)$ , so erhalten wir mit  $(r, \alpha, \varphi) \in U_3 = [0, r_0] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$  bzw.  $U_4 = [0, r_0] \times [-\frac{\pi}{2}, 0] \times [0, 2\pi]$ :

$$\vec{g}(\vec{P}) = \int_0^{r_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \vec{h}_3(r, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha dr + \int_0^{r_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{2\pi} \vec{h}_4(r, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha dr$$

Mit  $\vec{P} := \vec{\phi}_3(r_0, \alpha, \varphi)$  falls  $\alpha \geq 0$  und  $\vec{P} := \vec{\phi}_4(r_0, \alpha, \varphi)$  falls  $\alpha \leq 0$ .

Also haben wir hier eine Summe von 3-dimensionalen Integralen.

Solche Fallbeschleunigungen werden bei Schröer [3] Kapitel 5 zur Berechnung der Gesamtbeschleunigung und der visuellen Vertikale verwendet.

## Literatur

- [1] Hans-Jochen Bartsch „Taschenbuch mathematischer Formeln“, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 7.-9. Auflage 1986

- [2] Otto Forster „Analysis 3“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 2. Auflage 1983
- [3] Harald Schröder „Orientierungstheorie - Die visuelle Vertikale“, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin, 2002

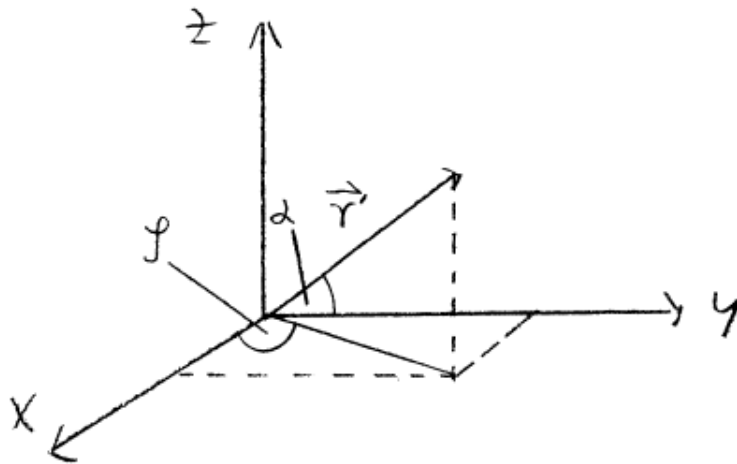
© 2009 **Harald Schröder**

## 61. Bewegungen auf einem rotierenden Planeten

Wir wollen hier die Bewegung beschreiben, die ein fallender Körper auf einem rotierenden Planeten erfährt.

### 1. Allgemein (Kugelkoordinaten)

Der Planet rotiert mit beliebiger veränderlicher Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}(t)$  und erfährt eine Translationsbeschleunigung  $\vec{a}_{tr}(t)$ .  $t$  ist dabei die Zeit.



$\vec{r} = (x, y, z) = \text{Ortsvektor}$        $r = |\vec{r}|$   
 $\varphi = \text{Längengrad}$   
 $\alpha = \text{Breitengrad}$

Der Koordinatenursprung soll gleich dem geometrischen Mittelpunkt des Planeten sein. Wir führen Kugelkoordinaten ein vgl. z.B. Budo [1], §3, S.13:

$$\begin{aligned}x &= r \sin(90^\circ - \alpha) \cos \varphi = r \cos \alpha \cos \varphi \\y &= r \sin(90^\circ - \alpha) \sin \varphi = r \cos \alpha \sin \varphi \\z &= r \cos(90^\circ - \alpha) = r \sin \alpha\end{aligned}$$

Nun kommen wir zur Gestalt der Gravitationskraft. Für komplizierte Gravitationsfelder ist die Form  $\vec{F}(\vec{r}, \alpha, \varphi, t)$  oder sogar  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, t)$  möglich. Schon wesentlich einfacher ist das Zentralfeld mit:

$$\vec{F} = -f(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Am häufigsten kommt jedoch das Newtonsche Gravitationsgesetz vor:

$$\vec{F} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$G$  = Gravitationskonstante

$M = M(t)$  = Masse des Planeten

$m$  = Masse des Probekörpers  $m$  ist konstant.

Für die Bewegung in einem rotierenden System haben wir nach Budo [1], §14, S.74, Gleichung (16):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m \cdot (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) - m \cdot (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) - 2m \cdot (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \quad (1)$$

Setzen wir den Vektor

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \sin \varphi \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir 3 Differentialgleichungen für  $r, \alpha$  und  $\varphi$ .

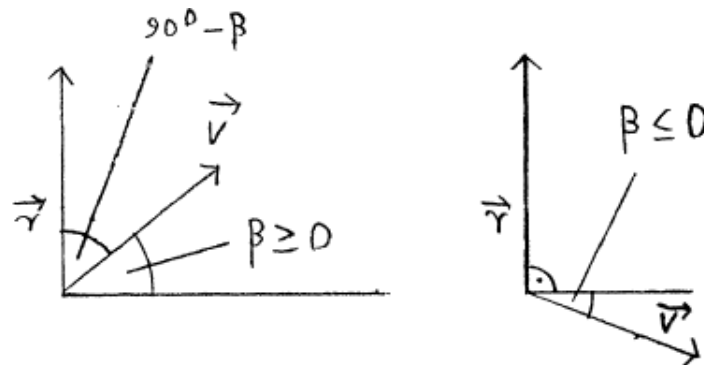
Anfangsbedingungen:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

Die Höhe kann mit  $r(t) - R_p$  dargestellt werden, wobei  $R_p$  der Planetenradius ist.

Wurfwinkel  $\beta$ :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$



$$\angle(\vec{r}, \vec{v}) = 90^\circ - \beta$$

$$\beta = -(\angle(\vec{r}, \vec{v}) - 90^\circ) = 90^\circ - \angle(\vec{r}, \vec{v})$$

Also:

$$\sin \beta(t_0) = \cos(90^\circ - \beta(t_0)) = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0}{|\vec{r}_0| \cdot |\vec{v}_0|}$$

Allgemeiner Steigungswinkel  $\beta(t)$ :

$$\sin \beta(t) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|}$$

Das Differentialgleichungssystem (1) kann umgeschrieben werden zu:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} \quad (2)$$

$$m\dot{\vec{a}} = \vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m \cdot (\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})) - m \cdot (\vec{w} \times \vec{r}) - 2m \cdot (\vec{w} \times \vec{a})$$

Wir bekommen 6 Differentialgleichungen 1.Ordnung mit den Unbekannten  $\vec{a}(t), \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ . Dieses Differentialgleichungssystem ist nicht linear wegen  $\vec{F}$ . Für eine exakte Lösung bleibt nur die Möglichkeit von Reihenentwicklungen nach Kamke [4], A, §2, (6.3), S.38. Das gilt für alle Zentralfelder. Für das allgemeine Gravitationsfeld ist das möglich, wenn das Differentialgleichungssystem nach  $\dot{\vec{r}}$  und  $\ddot{\vec{r}}$  explizit auflösbar ist. Kann dieses System nicht explizit aufgelöst werden, so gibt es bei zeitlich veränderlichen  $\vec{w}(t)$  überhaupt keine exakte Lösung. Mit numerischen Methoden können allerdings Näherungslösungen ermittelt werden.

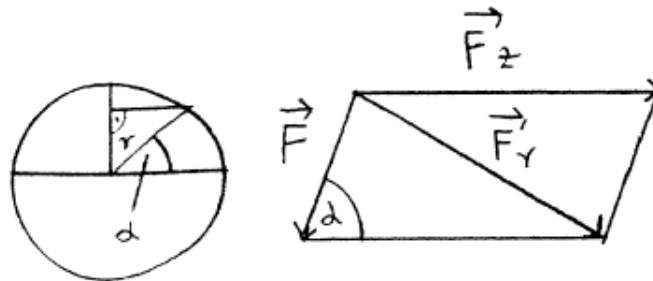
Anstatt einer Planetenkugel kann auch ein allgemeiner Rotationskörper genommen werden. Es sind sogar noch allgemeinere Körper denkbar. Wie diese zu handhaben sind, wird in Schröer [5], Kapitel 10 erklärt.

## 2. Bewegung in einem lokalen Koordinatensystem auf der Planetenoberfläche:

Für diesen Fall nehmen wir  $\vec{a}_{tr} = 0$  und  $M, m$  als konstant an. Ferner soll die Gravitationskraft eine Zentralkraft sein, also:

$$\vec{F} = -m \cdot f(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Die Winkelgeschwindigkeit hat die Gestalt  $\vec{w}(t) = (0, 0, w(t))$ .



Nun führen wir für diesen Fall die Zentrifugalkraft  $\vec{F}_z$  ein:

$$F_z = mrw^2 \cdot \cos \alpha$$

resultierende Kraft:

$$\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{F}_z$$

Für die resultierende Beschleunigung können wir schreiben:

$$\begin{aligned} b_r(r, \alpha, w) &= \frac{F_r}{m} = \frac{\sqrt{F^2 + F_z^2 - 2FF_z \cos \alpha}}{m} \\ &= \sqrt{(f(r))^2 + r^2 w^4 \cos^2 \alpha - 2f(r)r w^2 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

mit  $r = R_p + z$ . Dabei wird  $R_p$  für den Planetenradius und  $z$  für die Höhe verwendet. Nach Budo [1], §24, S.119,120 und Gleichung (1) haben wir das Differentialgleichungssystem:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{b}_r(r, \alpha, w) + 2 \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{w} - \dot{\vec{w}} \times \vec{r} \quad (3)$$

mit den Vektoren:

$$\vec{b}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_r \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -w \cos \alpha \\ 0 \\ w \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{w}} = \begin{pmatrix} -\dot{w} \cos \alpha \\ 0 \\ \dot{w} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Die Bedeutung der Koordinaten im einzelnen:

$x$  = Nord-Süd-Richtung (Süden positiv)

$y$  = West-Ost-Richtung (Osten positiv)

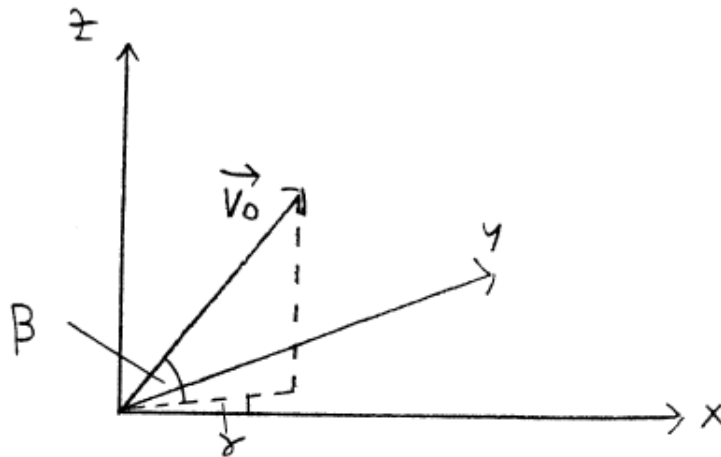
$z$  = Höhe (nach oben positiv)

Die Anfangsbedingungen mit dem Richtungswinkel  $\gamma$  und den Wurfwinkel  $\beta$  lauten:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

Wir führen Kugelkoordinaten ein:

$$\vec{v}_0 = |\vec{v}_0| \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \gamma \in [0, 360^\circ[ \\ \beta \in [-90^\circ, 90^\circ] \end{array}$$



$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  stellt die Lösung des Differentialgleichungssystems dar. Das Einsetzen der Vektoren führt zu folgendem Differentialgleichungssystem:

$$\ddot{x} = 2\dot{y}w \sin \alpha + y\dot{w} \sin \alpha$$



$$\ddot{y} = -2\dot{z}w \cos \alpha - 2\dot{x}w \sin \alpha - x\dot{w} \sin \alpha - z\dot{w} \cos \alpha$$

$$\ddot{z} = 2\dot{y}w \cos \alpha - b_r + y\dot{w} \cos \alpha$$

Also ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem 2.Ordnung.  $b_r = b_r(r, \alpha, w)$  soll dabei eine feste Konstante sein.  $\alpha$  hat ebenfalls einen festen Wert.

Umwandlung:

$$\dot{x} = a_1$$

$$\dot{y} = a_2$$

$$\dot{z} = a_3$$

$$\dot{a}_1 = 2a_2w \sin \alpha + y\dot{w} \sin \alpha$$

$$\dot{a}_2 = -2a_3w \cos \alpha - 2a_1w \sin \alpha - x\dot{w} \sin \alpha - z\dot{w} \cos \alpha$$

$$\dot{a}_3 = 2a_2w \cos \alpha - b_r + y\dot{w} \cos \alpha$$

Dann haben wir ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem 1.Ordnung. Wenn  $w$  nicht konstant ist, dann steht an exakten Methoden nur die Reihenentwicklung nach Kamke [4], A, §2, (6.3), S.38 zur Verfügung. Die Alternative dazu ist eine numerische Berechnung. Wenn ein Fundamentalsystem des zugehörigen linearen homogenen Systems bekannt wäre, dann könnte die Lösung des inhomogenen Systems mit der Variation der Konstanten, vgl. Forster [2], §12, S.128, Satz 4, bestimmt werden.

Ist  $w$  konstant, dann liegt ein System mit konstanten Koeffizienten vor. In diesen Fall ist die Berechnung der exakten Lösung möglich. Das wird z.B. in Greiner [3], I.2, S.8-17 gemacht.

Wir sehen insgesamt, dass es Möglichkeiten zur Lösung dieses Problems gibt.

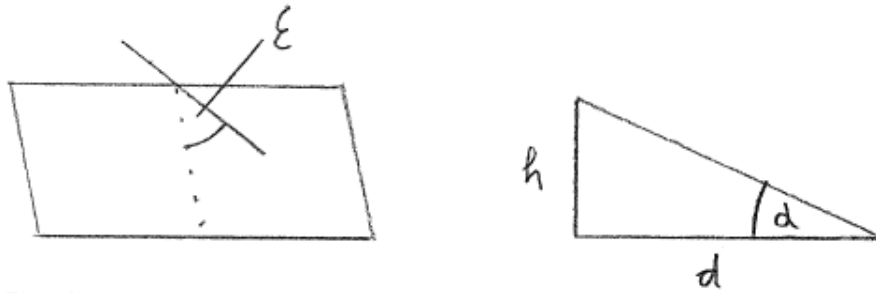
## Literatur

- [1] A Budo „Theoretische Mechanik“, 10.Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980
- [2] Otto Forster „Analysis 2“, 5.Auflage, 1984, Vieweg Verlag, Braunschweig
- [3] Walter Greiner „Mechanik“, Teil 2, Verlag Harri Deutsch, 1989
- [4] Erich Kamke „Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen“, Band 1, 10.Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1983
- [5] Harald Schröder „Orientierungstheorie“ Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2002

## 62. Projektionen von Winkeln und Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche

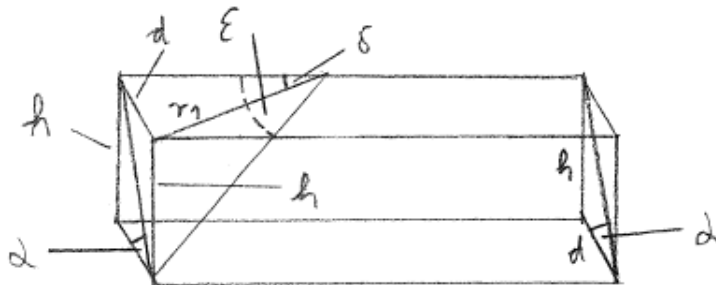
### 1. Projektionen von Winkeln

Wir wollen uns hier mit der Projektion von Winkeln beschäftigen. Es handelt sich hier um einen Sachverhalt der in der mathematischen Literatur kaum erwähnt wird. Der Leser bekommt hier einen Eindruck wie sich Winkel unter Projektionen ändern können.



Eine Gerade dreht sich um den Winkel  $\delta$  von der Flächenkante aus gesehen. Die Ebene ist unter dem Winkel  $\alpha$  geneigt:

$\varepsilon$  ist der jeweilige Neigungswinkel unter dem Drehwinkel  $\delta$ . Dazu kann man sich die folgende Abbildung anschauen:



Wir kommen nun zur Ermittlung von  $\varepsilon$ . Wir haben:

$$\tan \varepsilon = \frac{h}{r_1}$$

$h$  und  $r_1$  müssen ersetzt werden:

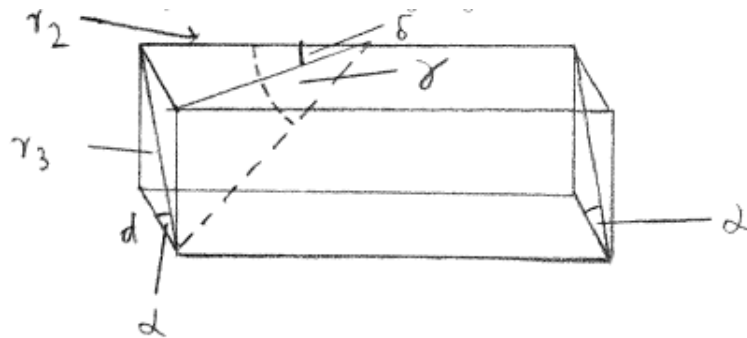
$$h = d \cdot \tan \alpha \quad r_1 = \frac{d}{\sin \delta}$$

Damit erhalten wir durch Einsetzung:

$$\tan \varepsilon = \tan \alpha \cdot \sin \delta \quad (1)$$

Spezialfall:  $\varepsilon = \alpha$  bei  $\delta = 90^\circ$

Nun wollen wir uns dem Winkel  $\gamma$  auf der geneigten Ebene zuwenden.  $\gamma$  ist die Projektion von  $\delta$  auf der geneigten Ebene.



Aus der Abbildung entnehmen wir:

$$\tan \gamma = \frac{r_3}{r_2}$$

Wir ersetzen  $r_3$  und  $r_2$  durch:

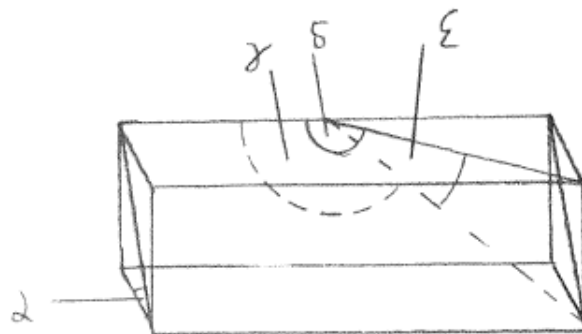
$$r_3 = \frac{d}{\cos \alpha} \quad r_2 = \frac{d}{\tan \delta}$$

Wir bekommen:

$$\tan \gamma = \frac{\tan \delta}{\cos \alpha} \quad (2)$$

Spezialfall:  $\gamma = \delta$  für  $\alpha = 0$

**Die Erweiterung auf  $0 \leq \delta \leq 180^\circ$ :**



Nach der Abbildung und Gleichung (1) ist:

$$\tan \varepsilon = \tan \alpha \cdot \sin(180^\circ - \delta)$$

Mit  $\sin(180^\circ - \delta) = \sin \delta$  kommen wir wieder zu Gleichung (1).

Für den Winkel  $\gamma$  können wir mit Gleichung (2) folgern:

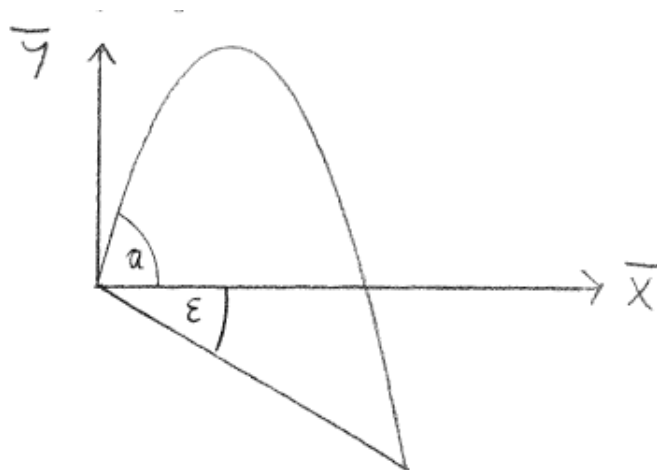
$$\tan(180^\circ - \gamma) = \frac{\tan(180^\circ - \delta)}{\cos \alpha}$$

Mit Hilfe von  $\tan(180^\circ - a) = -\tan a$  erhalten wir wieder Gleichung (2).

Also gelten die Gleichungen (1) und (2) für  $\delta \in [0, 180^\circ]$ .

## 2. Eine Anwendung: Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche

Dieser Sachverhalt kann bei Wurfbahnen auf Planeten mit geneigter Oberfläche angewendet werden. Weil ein homogenes Schwerfeld im lokalen Bereich vorliegt, sind die Wurfbahnen entsprechend geneigte Parabeln. Wir führen zunächst ein Koordinatensystem  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  ein.  $\bar{y}$  ist parallel zur Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}$ .  $\bar{x}$  liegt senkrecht dazu.



$v$  = Anfangsgeschwindigkeit

$t$  = Zeit

$a$  = Wurfwinkel

Wurfbahngleichungen:

$$\bar{x} = vt \cdot \cos a \tag{3}$$

$$\bar{y} = vt \cdot \sin a - \frac{gt^2}{2} \tag{4}$$

$$\bar{y} = \bar{x} \cdot \tan a - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 a} \tag{5}$$

Steigzeit:

$$\bar{t}_s = \frac{v \cdot \sin a}{g}$$

Steighöhe:

$$\bar{h} = \frac{v^2 \cdot \sin^2 a}{2g}$$

Durch die Ableitungen nach der Zeit kommen wir zu den Geschwindigkeitskomponenten:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}_x = v \cdot \cos a$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{v}_y = v \cdot \sin a - gt$$

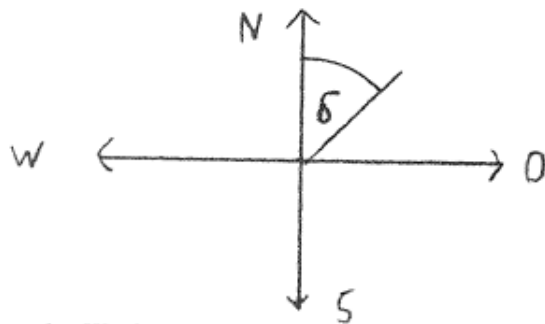
Damit können wir die Bahngeschwindigkeit  $v_B = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2}$  ausrechnen. Unter Verwendung von  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$  erhalten wir:

$$v_B = \sqrt{v^2 - 2g \cdot \left( vt \cdot \sin a - \frac{gt^2}{2} \right)}$$

Die Wurfweite und die Wurfzeit müssen anders bestimmt werden, da die Ebene geneigt ist.  $\alpha$  ist wieder der Neigungswinkel der Ebene. Nach der Gleichung (1) gilt:

$$-\tan \varepsilon = \tan(-\varepsilon) = \tan \alpha \cdot \sin(\delta - 90^\circ) = -\tan \alpha \cdot \cos \delta$$

Also haben wir  $\tan \varepsilon = \tan \alpha \cdot \cos \delta$ .



N = NORDEN  
O = OSTEN  
S = SÜDEN  
W = WESTEN

Zur Ermittlung der Wurfzeit  $t_w$ :

$$\sin a \cdot v \cdot t_w - \frac{gt_w^2}{2} = \tan \varepsilon \cdot \cos a \cdot v \cdot t_w$$

Alle Glieder enthalten  $t_w$ . Es kann also durch  $t_w$  dividiert werden.

$$\sin a \cdot v - \frac{gt_w}{2} = \tan \varepsilon \cdot \cos a \cdot v$$

Auflösung nach  $t_w$ :

$$t_w = 2 \cdot \frac{\sin a \cdot v - \tan \varepsilon \cdot \cos a \cdot v}{g}$$

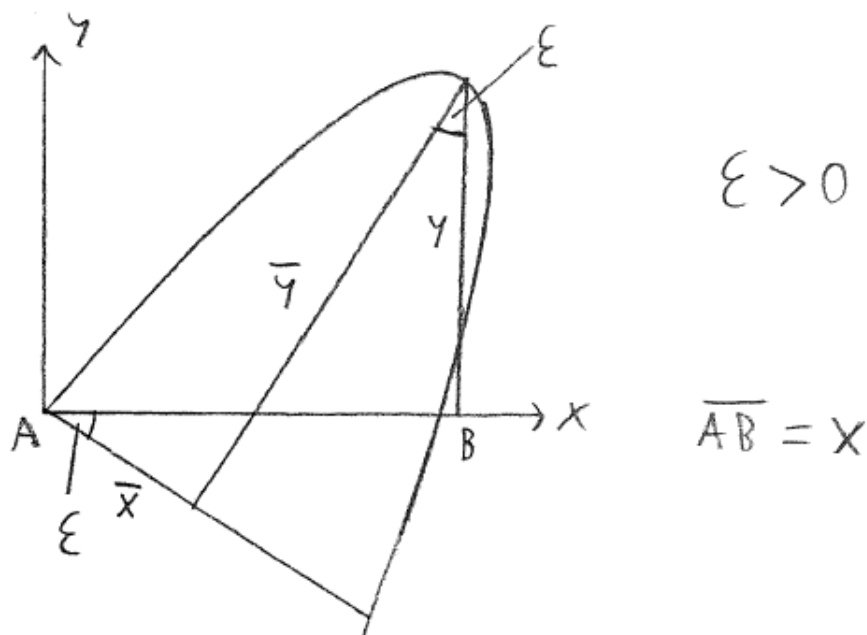
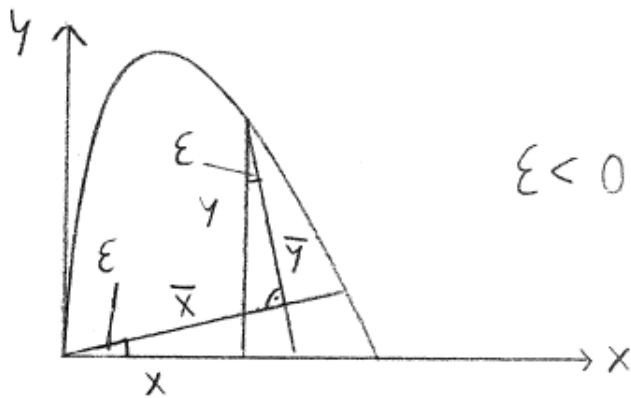
Die Wurfweite  $\bar{w}$  bekommt man, wenn man die Wurfzeit in die Gleichung (3) einsetzt:

$$\bar{w} = \cos a \cdot v \cdot t_w$$

$\bar{y}$  zur Zeit  $t_w$  können wir darstellen mit:

$$\bar{y}_w = \sin a \cdot v \cdot t_w - \frac{gt_w^2}{2}$$

Um nun an die wirklichen  $x$  und  $y$  zu kommen, müssen wir die Wurfparabel um den Winkel  $\varepsilon$  drehen.  $y$  steht senkrecht zur Oberfläche und  $x$  ist parallel zur Oberfläche.



Wir können aus diesen Abbildungen dann folgende Gleichung entnehmen:

$$y = \cos \varepsilon \cdot (\bar{y} - \bar{x} \cdot \tan \varepsilon) \quad (6)$$

$$y = \cos \varepsilon \cdot \left( \sin a \cdot vt - \frac{gt^2}{2} - \tan \varepsilon \cos a \cdot vt \right) \quad (7)$$

Durch Ableitung:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \cos \varepsilon \cdot (\sin a \cdot v - gt - \tan \varepsilon \cos a \cdot v)$$

Aus den letzten Abbildungen schließen wir auch auf:

$$x = \frac{\bar{x}}{\cos \varepsilon} + y \cdot \tan \varepsilon \quad (8)$$

Außerdem ist  $v_x = \frac{dx}{dt}$ . Die Bahngeschwindigkeit bekommen wir mit  $v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . Der wahre Wurfwinkel ergibt sich mit  $a - \varepsilon$ . Durch Errechnen des Maximums von  $y$  (Gleichung (7)) mit Hilfe der Differentialrechnung kann die Steigzeit und die Steighöhe bezüglich der Koordinaten  $x$  und  $y$  bestimmt werden. Die Wurfweite bezüglich  $x$  bekommen wir durch Einsetzen von  $t_w$  für  $t$  in Gleichung (8). Wir haben noch nicht über den Betrag des Winkels  $\alpha$  auf einen Planeten gesprochen. Dazu verweisen wir auf Schröer [1], dort wird der Neigungswinkel  $\alpha$  bei konstanter Rotationszeit (Winkelgeschwindigkeit) als auch bei nicht konstanter Rotationszeit berechnet. Auf der Erde beträgt  $\alpha$  bei 50 Grad nördlicher oder südlicher Breite ungefähr ein Hunderstel Grad.

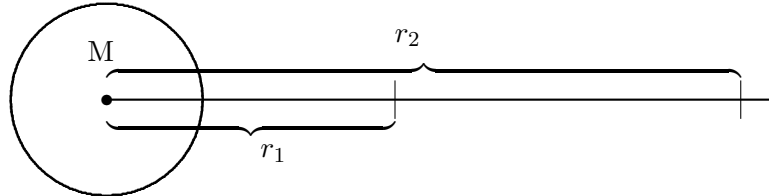
## **Literatur**

- [1] Harald Schröer „Orientierungstheorie“, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2002

© 2002 Harald Schröer

### 63. Frequenzveränderung der Strahlung im Gravitationsfeld

Strahlung erfährt auf dem Weg durch das Gravitationsfeld eine Änderung der Frequenz. Wir schauen uns zuerst die Situation bei einem Planeten an:



Die Strahlung verrichtet im Gravitationsfeld des Planeten mit der Masse  $M$  zwischen den Entfernungen  $r_1$  und  $r_2$  die Arbeit:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} g(r) \cdot m(r) dr$$

Dabei sind:

$g(r)$  = Gravitationsbeschleunigung in der Entfernung  $r$

$m(r)$  = Masse eines Photons in der Entfernung  $r$

Für die Energie eines Photons gilt  $W = h \cdot f$ , wobei  $f(r)$  die Frequenz des Photons und  $h$  das Wirkungsquantum von Planck ist. Die Frequenz verändert sich im Gravitationsfeld mit der Entfernung, daher ist die Frequenz eine Funktion von  $r$ . Die Photonenmasse erhalten wir aus der Gleichung  $m(r) \cdot c^2 = h \cdot f(r)$  mit  $c$  als Lichtgeschwindigkeit, vgl z.B. Hammer [2] Kapitel 8.2.2.2 S.189. Also ergibt sich:

$$m(r) = \frac{h \cdot f(r)}{c^2}$$

Die Frequenzveränderung wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$h \cdot (f(r_2) - f(r_1)) = - \int_{r_1}^{r_2} g(r) \cdot m(r) dr \quad (1)$$

Durch Differenzieren nach  $r$  folgt daraus die Differentialgleichung:

$$h \cdot f'(r) = -g(r) \cdot m(r)$$

mit den Anfangswert  $f_1 = f(r_1)$ , den wir als gegeben voraussetzen. Setzen wir noch die Photonenmasse ein, so erhalten wir:

$$f'(r) = -\frac{g(r)}{c^2} \cdot f(r) \quad (2)$$



Also haben wir ein Anfangswertproblem mit einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Für die Lösung können wir z.B. nach Forster [1] §11 Satz 2 S.114 schreiben:

$$f(r) = f(r_1) \cdot \exp \left( -\frac{1}{c^2} \cdot \int_{r_1}^r g(\bar{r}) d\bar{r} \right)$$

Im allgemeinen ist  $g(r) = \frac{GM}{r^2}$  nach dem Gravitationsgesetz von Newton.  $G$  ist die Gravitationskonstante. Also bekommen wir:

$$\begin{aligned} f(r) &= f(r_1) \cdot \exp \left( -\frac{1}{c^2} \int_{r_1}^r \frac{GM}{\bar{r}^2} d\bar{r} \right) \\ &= f(r_1) \cdot \exp \left( \frac{GM}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \right) \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} f(r) &\leq f(r_1) \text{ wenn } r \geq r_1 \\ f(r) &\geq f(r_1) \text{ wenn } r \leq r_1 \end{aligned}$$

Im ersten Fall verrichtet die Strahlung Arbeit, das bedeutet Energieverlust bzw. kleinere Frequenz. Im zweiten Fall gewinnt die Strahlung Energie und die Frequenz erhöht sich.

Nun wollen wir eine Näherung im newtonischen Fall herleiten. Wir nehmen an, daß die Frequenzverschiebung  $\Delta f$  sehr klein gegenüber der Frequenz  $f(r_1)$  ist. Dann ist die Photonenmasse  $m = \frac{hf(r_1)}{c^2}$  näherungsweise konstant. Die Arbeit, die im Gravitationsfeld verrichtet wird, kann dann geschrieben werden als:

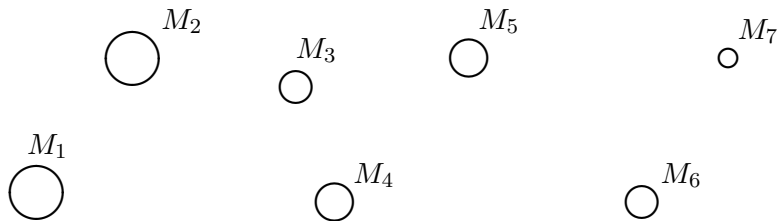
$$\Delta W \approx GMm \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Gleichzeitig haben wir  $\Delta W = h \cdot \Delta f$ , so daß wir als Resultat erhalten:

$$\Delta f \approx \frac{GMf(r_1)}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Damit ist dann  $f(r_2) = f(r_1) - \Delta f$ .

Nun schauen wir uns die Situation an, daß sich Gravitationsfeldern von  $n$  Planeten mit den Massen  $M_1, \dots, M_n$  überlagern.



Wir nehmen zuerst an, daß die Frequenzänderung sehr klein ist. Dann ist wieder die Photonenmasse konstant. Die Massen  $M_1, \dots, M_n$  haben die Positionen  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in R^3$ . Dann verrichtet oder gewinnt im newtonischen Fall ein Photon, das sich von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2 \in R^3$  bewegt die Arbeit:

$$\Delta W \approx Gm \cdot \sum_{i=1}^n M_i \cdot \left( \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{x}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{x}_i|} \right)$$

$|\cdot|$  ist dabei der Betrag eines Vektors. Mit  $\Delta W = h \cdot \Delta f$  und der Photonenmasse  $m \approx \frac{h \cdot f(\vec{r}_1)}{c^2}$  kommen wir dann zu:

$$\Delta f \approx \frac{Gf(\vec{r}_1)}{c^2} \cdot \sum_{i=1}^n M_i \cdot \left( \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{x}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{x}_i|} \right)$$

Nun werden wir noch den Fall betrachten, bei dem die Frequenzverschiebung so groß ist, so daß die Photonenmasse nicht als näherungsweise konstant angenommen werden kann. Für diesen Fall müssen wir die folgende Integralgleichung betrachten:

$$\begin{aligned} h \cdot (f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)) &= - \sum_{i=1}^n \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{g}_i(\vec{r} - \vec{x}_i) \cdot m(\vec{r}) d\vec{r} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \vec{g}_i(\vec{r} - \vec{x}_i) \cdot m(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt \end{aligned}$$

Dabei ist  $\vec{r}$  eine Funktion von  $t$ . Außerdem haben wir  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$  und  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$  und die Gravitationsbeschleunigungen  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$  der Massen  $M_1, \dots, M_n$ . Wir haben es hier mit einem Kurvenintegral 2. Art zu tun. Differenzieren nach  $t$  führt zur Differentialgleichung:

$$- \sum_{i=1}^n \vec{g}_i(\vec{r} - \vec{x}_i) \cdot m(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = h \cdot \text{grad}(f(\vec{r})) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Setzen wir noch  $m(\vec{r}) = \frac{h \cdot f(\vec{r})}{c^2}$  ein, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung:

$$0 = \text{grad}(f(\vec{r})) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{f(\vec{r})}{c^2} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{g}_i(\vec{r} - \vec{x}_i) \cdot \dot{\vec{r}} \quad (3)$$

Wir haben hier eine lineare partielle Differentialgleichung. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist aufwendig. Sie soll hier nicht durchgeführt werden. Wir verweisen hier auf Kamke [3] D. §1 Kapitel 3.10, 5.8, 6.9. Diese Kapitel sind Überblicke über die Lösungsmethoden von partiellen Differentialgleichungen.

## Literatur

- [1] Otto Forster „Analysis 2“ 5.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig
- [2] Karl Hammer „Grundkurs der Physik“ Teil 2 3.Auflage Oldenbourg Verlag München 1987

- [3] Erich Kamke „Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen“ Band II  
Teubner Verlag Stuttgart 6.Auflage 1979

© 2001 **Harald Schröder**

## 64. Der lokale Ausschnitt der Ellipse

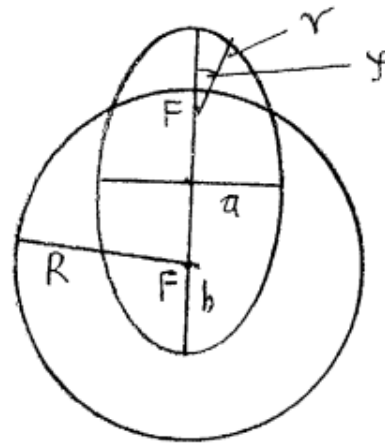
Wenn wir eine Wurfbahn hier auf der Erdoberfläche im homogenen Feld betrachten, dann können wir feststellen, daß diese Wurfbahnen Parabeln sind.

Tatsächlich gibt es bei der Bewegung von Himmelskörpern aber auch andere Bahnformen wie z.B. die Ellipse. Ein Ball, der mit einer geringen Anfangsgeschwindigkeit geworfen wird, beschreibt eine Parabel im homogenen Feld d.h. mit konstanter Schwerebeschleunigung. Würde diese Experiment in etwa 1000 km Höhe gestartet, dann müßte der Ball bis zum Auftreffen auf die Erdoberfläche einen Ellipsenabschnitt beschreiben.

Es liegt nun nahe zu vermuten, daß ein sehr kleiner Ellipsenausschnitt einer Parabel sehr ähnlich ist. Wir werden uns nun mit diesem Sachverhalt beschäftigen.

F = BRENNPUNKT

a,b = HALBACHSEN



Wir betrachten eine Ellipse und dazu einen Kreis mit dem Radius  $R$ .  $R$  kann der Erdradius oder ein beliebiger Planetenradius sein. Wir bilden die Differenz  $h = r - R$  mit Hilfe der Kegelschnittgleichung:

$$h(\varphi) = r - R = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} - R$$

$\varphi$  = Winkel in Bogenmaß (wahre Anomalie)

$e$  = numerischen Exzentrizität

$p$  = Parameter

Vgl. z.B. Voigt [1] Kapitel II.2.2 a S.33. Die Ableitung ist nach der Reziprokenregel

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}:$$

$$h'(\varphi) = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}$$

Bei  $\varphi \ll 1$  erhalten wir die Näherung:

$$h'(\varphi) \approx \frac{pe \cdot \varphi}{(1 + e)^2}$$

Das gilt wegen  $\sin \varphi \approx \varphi$  und  $\cos \varphi \approx 1$  für  $\varphi \ll 1$ . Nun integrieren wir diese Näherung:

$$h(\varphi) \approx \frac{pe}{(1+e)^2} \cdot \int \varphi d\varphi = \frac{pe\varphi^2}{2 \cdot (1+e)^2} + c$$

$c$  = Integrationskonstante

Es ist also  $h(\varphi) \approx k\varphi^2 + c$ . Das ist eine Parabelgleichung. Wir sehen, daß eine Ellipse im sehr kleinen Ausschnitt einer Parabel ähnelt. Das ist die mathematische Begründung, warum eine Ellipsenbahn in einem kleinen Ausschnitt (homogenes Feld  $h \ll R$ ) in eine Parabel übergeht.

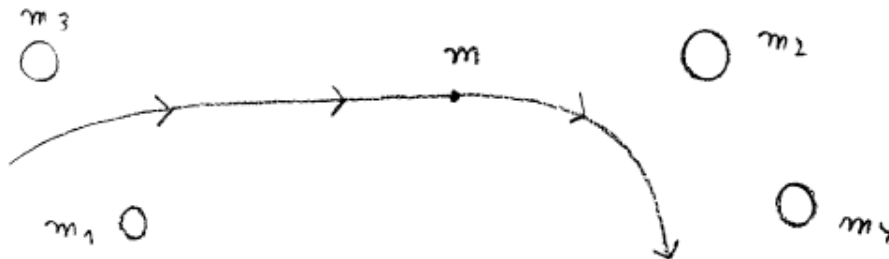
### Literatur

- [1] Hans Heinrich Voigt „Abriß der Astronomie“ 4.Auflage BI Mannheim 1988

© 2001 Harald Schröder

## 65. Die Bewegung in Gravitations- und elektromagnetischen Feldern

Hier soll eine allgemeine Beschreibung der Bewegung eines Probekörpers erfolgen.



$n$  Körper mit Masse  $m_i(t)$  und Ladung  $Q_i(t)$  bewegen sich in einem Koordinatensystem im  $R^3$  im Medium.  $t$  ist die Zeit. Die Bewegungen  $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t) \in R^3$  sind bekannt. Der Probekörper ist mit der Masse  $m(t)$  und der Ladung  $Q(t)$  ausgestattet. Wir suchen die Bewegung  $\vec{r}(t)$  des Probekörpers. Ein Probekörper muß in der Masse und der Ladung so klein sein, daß er die Bewegungen der anderen  $n$  Körper nicht wesentlich stört. Also:

$$m_i(t) \gg m(t) \quad \text{und} \quad Q_i(t) \gg Q(t) \quad \text{für alle } i \in 1, \dots, n$$

Wir führen jetzt verschiedene Kräfte ein:

$\vec{F}_g$  = Gravitationskraft

$\vec{F}_E$  = elektrische Kraft

$\vec{F}_m$  = magnetische Kraft

$\vec{F}_b$  = Bremskraft des Mediums

$\vec{F}_{bi}, \vec{F}_{gi}, \vec{F}_{Ei}, \vec{F}_{mi}$  = Bremskraft (des Mediums z.B. der Atmosphäre) / Gravitationskraft / Elektrische Kraft / Magnetische Kraft des  $i$ . Körpers

$\varphi_i, \vec{g}_i, \vec{E}_i, \vec{B}_i$  = Dichte (des Mediums z.B. der Atmosphäre) / Gravitationsbeschleunigung / Elektrische Feldstärke / Magnetische Flußdichte des  $i$ . Körpers

$\vec{F}_p$  = Kraft, die vom Probekörper selbst stammt - z.B. wenn der Probekörper eine Rakete ist.

$\vec{F}_{ba}, \vec{F}_{ga}, \vec{F}_{Ea}, \vec{F}_{ma}$  = Bremskraft (des Mediums - z.B. interstellare Materie) / Gravitationskraft / Elektrische Kraft / Magnetische Kraft, die im  $R^3$  ohne Einfluß der  $n$  Körper und des Probekörpers vorgegeben sind.

$\varphi_K$  = Dichte des Probekörpers (Ist die Dichte im Probekörper selbst nicht örtlich konstant, so ist  $\varphi_K$  die mittlere Dichte, die zeitlich veränderlich sein kann.)

Wir gehen nun auf die verwendeten Notationen ein:

$$\vec{y} := (m, m_1, \dots, m_n, Q, Q_1, \dots, Q_n, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1, \dots, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n, \ddot{\vec{r}}_n, \vec{F}_{g1}, \vec{F}_{E1}, \vec{F}_{m1}, \vec{F}_{b1}, \vec{g}_1, \vec{E}_1, \vec{B}_1, \varphi_1, \dots, \vec{F}_{gi}, \vec{F}_{Ei}, \vec{F}_{mi}, \vec{F}_{bi}, \vec{g}_i, \vec{E}_i, \vec{B}_i, \varphi_i, \dots, \vec{F}_{gn}, \vec{F}_{En}, \vec{F}_{mn}, \vec{F}_{bn}, \vec{g}_n, \vec{E}_n, \vec{B}_n, \varphi_n, \vec{F}_{ga}, \vec{F}_{Ea}, \vec{F}_{ma}, \vec{F}_{ba}, \vec{g}_a, \vec{E}_a, \vec{B}_a, \varphi_a, \varphi_K)$$

$$\vec{y}_i := (m, Q, m_i, Q_i, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, \vec{g}_i, \vec{E}_i, \vec{B}_i, \varphi_i)$$

$$\vec{y}_a := (m, Q, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \vec{g}_a, \vec{E}_a, \vec{B}_a, \varphi_a)$$

Dabei entstehen zum Teil rekursive Beziehungen, die im praktischen Fall natürlich vermieden werden sollten. Die Abhängigkeiten sind nun:

$$\begin{array}{cccc} m(t, \vec{y}) & Q(t, \vec{y}) & \varphi_K(t, \vec{y}) & \\ \vec{F}_{gi}(t, \vec{y}_i) & \vec{F}_{Ei}(t, \vec{y}_i) & \vec{F}_{mi}(t, \vec{y}_i) & \vec{F}_{bi}(t, \vec{y}_i) \\ \vec{g}_i(t, \vec{y}_i) & \vec{E}_i(t, \vec{y}_i) & \vec{B}_i(t, \vec{y}_i) & \varphi_i(t, \vec{y}_i) \\ \vec{F}_{ga}(t, \vec{y}_a) & \vec{F}_{Ea}(t, \vec{y}_a) & \vec{F}_{ma}(t, \vec{y}_a) & \vec{F}_{ba}(t, \vec{y}_a) \\ \vec{g}_a(t, \vec{y}_a) & \vec{E}_a(t, \vec{y}_a) & \vec{B}_a(t, \vec{y}_a) & \varphi_a(t, \vec{y}_a) \end{array}$$

Gewöhnlich haben wir:

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= m \cdot \vec{g} & \vec{F}_E &= Q \cdot \vec{E} & \vec{F}_m &= Q \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \\ \vec{F}_b &= |\vec{F}_b(|\dot{\vec{r}}|)| \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = F_b(|\dot{\vec{r}}|) \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \end{aligned}$$

Die Bremskraftfunktion  $F_b$  hat häufig folgende Gestalt:

$$F_b(|\dot{\vec{r}}|) = -C \cdot |\dot{\vec{r}}|^2 \quad \text{oder} \quad F_b = -K \cdot |\dot{\vec{r}}|$$

$C$  und  $K$  sind bestimmte Konstanten vgl. Budo [1] §16 S.83.

$\vec{g}, \vec{E}, \vec{B}, \varphi$  = Gravitationsbeschleunigung/ Elektrische Feldstärke/Magnetische Flußdichte/ Dichte des Mediums

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= \vec{F}_{ga} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{gi} \\ \vec{F}_E &= \vec{F}_{Ea} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ei} \\ \vec{F}_m &= \vec{F}_{ma} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{mi} \\ \vec{F}_b &= \vec{F}_{ba} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{bi} \end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi_a + \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Wir führen die Größe  $a = 1 - \frac{\varphi}{\varphi_K}$  ein. Die Gesamtkraft, die auf den Probekörper wirkt und nicht von ihm selber stammt, ist dann nach Budo [1] §16 S.83-85:

$$\vec{F}_{ges} = a \cdot (\vec{F}_g + \vec{F}_E + \vec{F}_m) + \vec{F}_b$$

Verknüpft man  $\vec{F}_{ges}$  schließlich mit der Kraft  $\vec{F}_p$ , die vom Probekörper selbst stammt, so erhält man schließlich die Differentialgleichung der Bewegung des Probekörpers:

$$\frac{d}{dt}(m(t) \cdot \dot{\vec{r}}) = \vec{F}_{ges}(t) + a(t) \cdot \vec{F}_p(t) \quad (1)$$

mit Anfangswerten:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\vec{r}}(t_0) = \vec{b}_0$$

Geschwindigkeit =  $\dot{\vec{r}}$                       Beschleunigung =  $\ddot{\vec{r}}$

Diese Gleichung kann verwendet werden, wenn  $|\dot{\vec{r}}|$  ein Zehntel der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  nicht überschreitet. Es kann auch die relativistische Kraft verwendet werden. Man kann evt. sogar damit genauere Resultate gewinnen. Die relativistische Kraft lautet nach Sandhas [2] Kapitel 27 S.67:

$$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Also bekommen wir:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{m(t) \cdot \dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}_{ges}(t) + a(t) \cdot \vec{F}_p(t) \quad (2)$$

mit Anfangswerten:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\vec{r}}(t_0) = \vec{b}_0$$

Bei Geschwindigkeiten, die über ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit liegen, muß aufgrund der beschleunigten Bezugssysteme die Allgemeine Relativitätstheorie herangezogen werden. Das soll hier nicht gemacht werden.

Die Bremskraft  $\vec{F}_b$  im Medium kann bei Überschallgeschwindigkeiten und erst recht bei noch höheren Geschwindigkeiten eine sehr komplexe Gestalt haben. Es müssen dann viele Zusatzeffekte (z.B. Überschallknall), die mit dem Medium zusammenhängen, berücksichtigt werden.

Bei  $\vec{F}_b = 0$  und  $a = 1$  erfolgt die Bewegung im Vakuum.  $\vec{F}_E = 0$  und  $\vec{F}_m = 0$  führt zur Bewegung in Gravitationsfeldern. Bei  $\vec{F}_p = 0$  ist der Probekörper ohne eigenen Antrieb.



Aus  $\vec{F}_{ges} + a \cdot \vec{F}_p = 0$  folgt das allgemeinste Kräftegleichgewicht, das es hier gibt. Ist  $\vec{F}_g = 0$  so bezeichnet man den betroffenen Bereich in der Astronomie als Roche'sche Grenze oder Roche'sche Fläche. Analog können auch  $\vec{F}_E$  und  $\vec{F}_m$  gleich Null gesetzt werden. Dann bekommt man analoge Flächen für die elektrischen und für die magnetischen Kräfte.

## **Literatur**

- [1] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980
- [2] Werner Sandhas „Theoretische Elektrodynamik - Kurzfassung“ Universität Bonn Physikalisches Institut Sommersemester 1982 ISSN-0172-8733

© 2002 **Harald Schröder**

## 66. Wurfbahnen im Schwerfeld eines Planeten

Wir betrachten eine Wurfbahn, bei der die Anfangsgeschwindigkeit so hoch ist, daß der geworfene Körper in den Weltraum gelangt. Dafür kann das homogene Feld an der Oberfläche eines Planeten (Erde) nicht mehr verwendet werden. Es muß vielmehr das Gravitationsfeld herangezogen werden.

Wir erklären folgende Größen:

$h_s$  = Starthöhe

$\alpha$  = Wurfwinkel

$v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit

$h$  = Wurfhöhe zur Zeit  $t$

$r_e$  = Planetenradius (Erdradius)

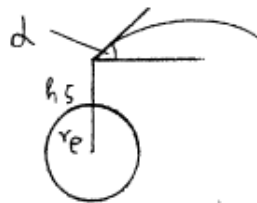
$m_e$  = Planetenmasse (Erdmasse)

$G$  = Gravitationskonstante

$R := r_e + h_s$

$r := r_e + h$

$r, R$  sind Entfernungen vom Planetenmittelpunkt.



Ein Körper mit der Masse  $m$ , der sich von  $R$  bis  $r$  bewegt, muß die Arbeit

$$W_{pot} = Gm_em \cdot \left( \frac{1}{r_e + h_s} - \frac{1}{r_e + h} \right)$$

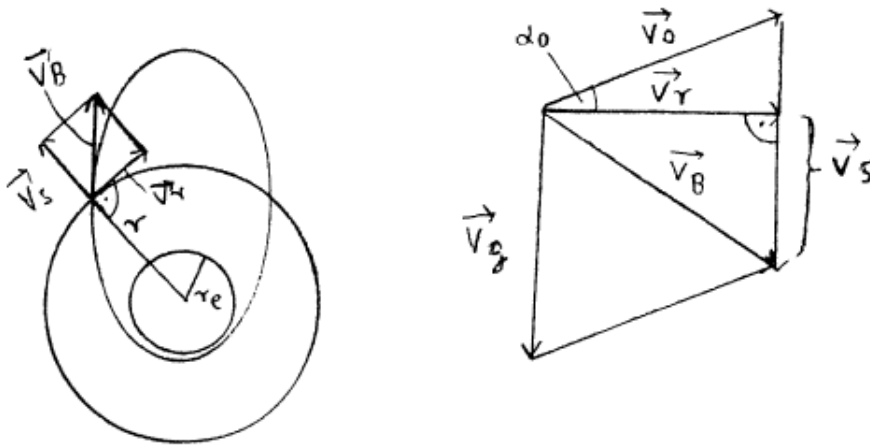
verrichten. Wenn  $r$  kleiner ist als  $R$ , dann kommt dieser Beitrag zu seiner Bewegungsernergie dazu. Der Energiesatz für die Wurfbahn lautet:

$$\frac{mv_0^2}{2} = W_{pot} + \frac{mv_B^2}{2}$$

$v_B$  ist dabei die Bahngeschwindigkeit in der Höhe  $h$ . Mit den Einsetzungen erhalten wir:

$$v_B^2 = v_0^2 - 2Gm_e \cdot \left( \frac{1}{r_e + h_s} - \frac{1}{r_e + h} \right) \quad (1)$$

Wir schauen uns nun die beiden Abbildungen an:



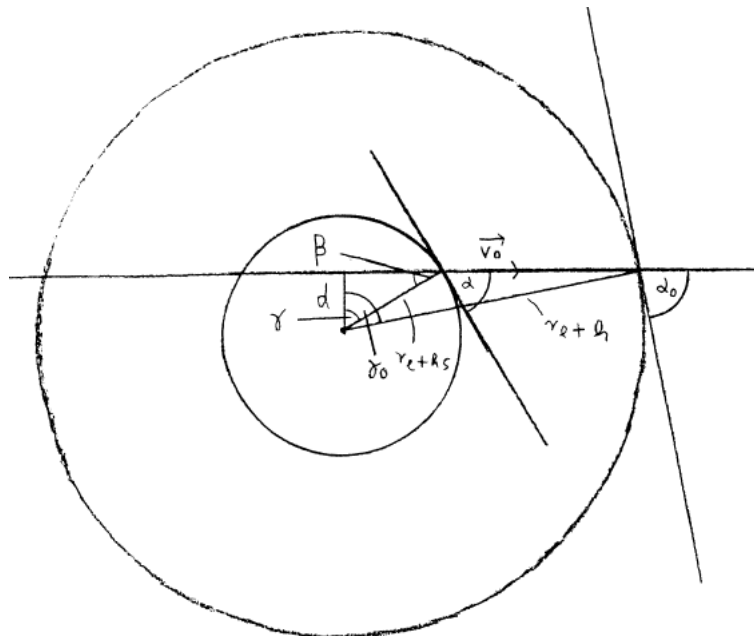
Wir können entnehmen:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{v}_g = \vec{v}_r + \vec{v}_s$$

Die Bahngeschwindigkeit setzt sich zusammen aus der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  und der Gravitationskomponente  $\vec{v}_g$ . Außerdem kann  $\vec{v}_B$  in einen senkrechten Geschwindigkeitsanteil  $\vec{v}_s$  und einen tangentialen Geschwindigkeitsanteil  $\vec{v}_r$  zerlegt werden. Nach der zweiten Abbildung ist dann  $\angle(\vec{v}_r, \vec{v}_0) = \alpha_0$  und  $v_r = v_0 \cdot \cos \alpha_0$ . Also folgt:

$$v_B^2 = \cos^2 \alpha_0 \cdot v_0^2 + v_s^2 \quad (2)$$

Wir werden nun  $\alpha_0$  durch einen Ausdruck ersetzen, der mit dem Wurfwinkel  $\alpha$  zusammenhängt.



Die Tangente weist in Richtung von  $\vec{v}_r$ .  $\vec{v}_0$  zeigt in die Richtung der Senkrechten zu  $d$ . Es gilt  $\gamma + \beta = 90^\circ$  und  $\beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$ . Daraus erhalten wir:

$$\gamma = 90^\circ - (180^\circ - 90^\circ - \alpha) = \alpha$$

Analog erhalten wir  $\gamma_0 = \alpha_0$ . Aus der Abbildung schließen wir:

$$\frac{d}{r_e + h_s} = \cos \gamma = \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad d = \cos \alpha \cdot (r_e + h_s)$$

und auch:

$$\frac{d}{r_e + h} = \cos \gamma_0 = \cos \alpha_0$$

Nun wird für  $d$  eingesetzt:

$$\cos \alpha_0 = \frac{\cos \alpha \cdot (r_e + h_s)}{r_e + h} \quad (3)$$

Lösen wir Gleichung (2) nach  $v_s$  auf und setzen wir den Term (3) für  $\cos \alpha_0$  ein, so bekommen wir:

$$v_s = \sqrt{v_B^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\frac{r_e + h_s}{r_e + h}\right)^2}$$

Um nun an  $t$  heranzukommen, muß die Differentialgleichung  $v_s = \frac{dh}{dt}$  gelöst werden. Mit der Trennung der Variablen z.B. nach Forster [3] §11 Satz 1 S.112 kann die Gleichung umgeformt werden zu:

$$t = \int \frac{dh}{v_s(h)} - c$$

Dabei ist  $c$  eine Integrationskonstante. Setzt man nun in diese Gleichung den Ausdruck für  $v_s$  und darin den Term (1) für  $v_B$  ein, dann bekommen wir schließlich:

$$c + t = \int \frac{dh}{\sqrt{v_0^2 - 2Gm_e \cdot \left(\frac{1}{r_e + h_s} - \frac{1}{r_e + h}\right) - \left(v_0 \cos \alpha \cdot \frac{r_e + h_s}{r_e + h}\right)^2}} \quad (4)$$

Bevor wir diese Gleichung integrieren, werden wir erst mal die Wurfweite bestimmen. Dazu haben wir:

$$v_r = v_0 \cdot \cos \alpha_0 = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{r_e + h_s}{r_e + h}$$

Damit ist es dann möglich die Winkelgeschwindigkeit  $w$  vom Planetenmittelpunkt aus zu bestimmen.

$$w = \frac{v_r}{r_e + h}$$

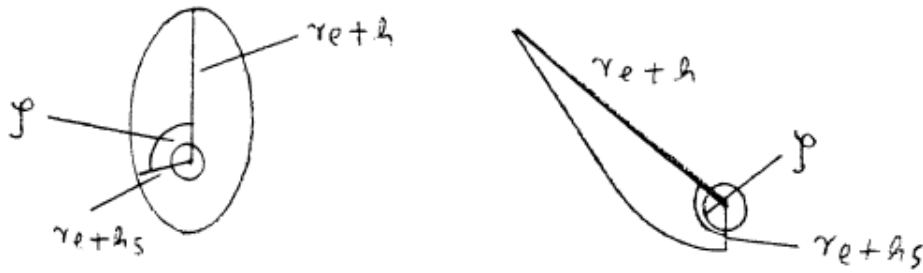
Mit

$$\varphi = \int_0^t w dt$$

erhalten wir dann den Winkel im Bogenmaß vom Planetenmittelpunkt aus gesehen.  $\gamma = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi$  ist dieser Winkel in Grad (siehe Abbildung):

ELLIPSE

HYPERBEL



$r_e + h$  und  $\varphi$  sind dann die gesuchten Polarkoordinaten der Bahn. Setzen wir nun den Ausdruck für  $w$  zusammen mit dem Term für  $v_r$  in das Integral für  $\varphi$  ein, so erhalten wir:

$$\varphi = v_0 \cos \alpha \cdot (r_e + h_s) \cdot \int_0^t \frac{dt}{(r_e + h(t))^2} \quad (5)$$

$h(t) = 0$  steht mit der Wurfzeit  $t_w$  in Zusammenhang. Vorausgesetzt ist hierbei, daß es ein  $h_{max}$  gibt. Das muß nicht immer der Fall sein. Wenn  $t_w$  existiert erhalten wir die Wurfweite  $w$  auf dem Planeten mit:

$$w = v_0 \cos \alpha \cdot (r_e + h_s)^2 \cdot \int_0^{t_w} \frac{dt}{(r_e + h(t))^2}$$

Bei  $h_s = 0$  erhalten wir die Wurfweite auf der Oberfläche.

Wir kommen nun zur Auswertung des Integrals (4) für  $t$ . Dieses Integral kann umgeschrieben werden zu:

$$t - c_3 = \int \frac{(r_e + h) \cdot \sqrt{r_e + h_s} dh}{\sqrt{v_0^2 \cdot (r_e + h)^2 \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e \cdot (h - h_s) \cdot (r_e + h) - v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot (r_e + h_s)^3}}$$

$c_3 =$  Integrationskonstante

Definiert man:

$$\begin{aligned} a &:= v_0^2 \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e \\ 2b &:= 2v_0^2 r_e \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e \cdot (r_e - h_s) \\ c &:= v_0^2 r_e^2 \cdot (r_e + h_s) + 2Gm_e h_s r_e - v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot (r_e + h_s)^3 \end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} t - c_3 &= \int \frac{(r_e + h) \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} dh \\ &= \int \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} dh + \int \frac{h \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} dh \end{aligned} \quad (6)$$

Bei der Integration ist es maßgeblich, ob  $a > 0$ ,  $a = 0$  oder  $a < 0$  ist. Dazu soll  $a$  etwas näher untersucht werden.

$$a := v_0^2 \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e > 0$$

Daraus folgt:

$$v_0 > \sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}} \quad (\text{Hyperbel})$$

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}} \quad (\text{Parabel})$$

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 < \sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}} \quad (\text{Ellipse})$$

Vgl. auch dazu Budo [2] §21.2. S.106 Gleichung (17).

$$\sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}}$$

ist die Entweichgeschwindigkeit vom Planeten mit Masse  $m_e$ . Diese Geschwindigkeit wird auch als Fluchtgeschwindigkeit oder zweite kosmische Geschwindigkeit bezeichnet. Bei der Hyperbel und der Parabel ist  $h(t)$  eindeutig. Bei der Ellipse gibt es ein  $h_{max}$ , zu einem bestimmten  $h$  können mehrere Zeiten zugeordnet sein.

## 1. Die Hyperbel

Wir könnten für die Berechnung der Gleichung (6) ein Integral aus Ryshik [6] Band 1 S.115 Nr.2.261 und S.117 Nr.2.264 verwenden. Wir ziehen allerdings Integrale aus Gröbner [4] Kapitel 231 S.37 Nr.8a und 7b heran. Wir benutzen die Integralzerlegung von Gleichung (6). Das Integral 8a ergibt:

$$\int \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s} dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} = \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left( c_1 \cdot \left( \frac{ah + b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ah^2 + 2bh + c} \right) \right)$$

$a > 0$  ist erfüllt.  $c_1 =$  Integrationskonstante

Nun zum Integral 7b:

$$\int \frac{h \cdot \sqrt{r_e + h_s} dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} = \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{a} \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c} - \frac{b}{a} \cdot \int \frac{\sqrt{r_e + h_s} dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}$$

Die beiden Integrale summiert ergibt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{a} \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c} + \left( r_e - \frac{b}{a} \right) \cdot \int \frac{\sqrt{r_e + h_s} dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + c_3 \\ &= \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{a} \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c} + c_2 + \left( r_e - \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left( c_1 \cdot \left( \frac{ah + b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ah^2 + 2bh + c} \right) \right) \end{aligned}$$

$c_1, c_2, c_3 =$  Integrationskonstanten  
 Die Wahl der Integrationskonstanten  $c_1, c_2$  kann durch  $t(h_s) = 0$  erfolgen.

Nun kommen wir wieder zur Gleichung (5) für  $\varphi$  zurück und zwar für Hyperbel, Parabel und Ellipse:

$$\varphi = v_0 \cos \alpha \cdot (r_e + h_s) \cdot \int_0^t \frac{dt}{(r_e + h(t))^2}$$

Wir wenden nun die Substitutionsregel an:

$$h = f(t) \quad f(0) = h(0) = h_s \quad f(t) = h(t) = h$$

Mit der Umkehrregel:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{\frac{d}{dh}(f^{-1}(h))} = \frac{1}{\frac{d}{dh}t(h)} \\ \frac{d}{dh}t(h) &=: T(h) \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{T(h)} \end{aligned}$$

Das Integral transformiert sich dann in:

$$\varphi = v_0 \cos \alpha \cdot (r_e + h_s) \cdot \int_{h_s}^h \frac{T(h) dh}{(r_e + h)^2} \quad (7)$$

Diese Gleichung gilt für Hyperbel, Parabel und Ellipse. Nach Gleichung (6) ist:

$$T(h) = \frac{(r_e + h) \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}$$

Damit folgt für alle Kegelschnitte:

$$\varphi = v_0 \cos \alpha \cdot (r_e + h_s)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_{h_s}^h \frac{dh}{(r_e + h) \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c}}$$

Im Fall von Hyperbel und Ellipse ist  $a \neq 0$ . Dann kann die Integration mit Gröbner [4] Kap. 231 S.38 Nr. 10a -10d durchgeführt werden. Bei der Parabel ist  $a = 0$ . Hier ist die Integration nach Gröbner [4] Kap. 212 S.28 Nr.9a -9c möglich.

## 2. Die Parabel

Im Fall der Parabel vereinfacht sich das Integral (6) für  $t$  wegen  $a = 0$  folgenderweise:  
 $c_3 =$  Integrationskonstante

$$t - c_3 = \int \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{2bh + c}} dh + \int \frac{h \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{2bh + c}} dh$$

nach Bronstein [1] Kap. 1.3.3.3. S.42 Nr. 124,125:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{r_e + h_s} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2bh + c}}{2b} \cdot r_e + \frac{2 \cdot (2bh - 2c)}{3 \cdot 4b^2} \cdot \sqrt{2bh + c} \cdot \sqrt{r_e + h_s} \\ &= \frac{\sqrt{r_e + h_s} \cdot \sqrt{2bh + c}}{b} \cdot \left( r_e + \frac{bh - c}{3b} \right) \end{aligned}$$

$c_3$  ist durch  $t(h_s) = 0$  bestimmt.

### 3. Die Ellipse

In diesem Fall ist  $a < 0$ . Wir führen die Integration von Gleichung (6) nach Gröbner [4] Kap. 231 S.37 Nr. 7b und 8b durch. Es muß  $b^2 - ac > 0$  sein.

$$\frac{t}{\sqrt{r_e + h_s}} = \int \frac{r_e dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + \int \frac{h dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + c_3$$

mit Integral 7b:

$$= \left(r_e - \frac{b}{a}\right) \cdot \int \frac{dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + \frac{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}{a} + c_4$$

Integral 8b:

$$= \left(r_e - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{-a}} \cdot \arcsin\left(\frac{ah + b}{\sqrt{b^2 - ac}}\right) + \frac{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}{a} + c_5$$

$c_i$  = Integrationskonstanten

Damit ist  $t(h)$  bekannt.  $c_5$  kann durch  $t(h_s) = 0$  gewählt werden. Somit haben wir dieses Problem vollständig gelöst. In Budo [2] §21.3 S.107 ff. und §45.2 S.244 ff. ist eine andere Lösung dieses Problems angegeben. Im Kamke [5] Kap. C.9 S.627 Nr.9.26 ist die zugehörige dreidimensionale vektorielle Differentialgleichung gelöst worden und zwar für jede Zentralkraft.

### Literatur

- [1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage
- [2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980
- [3] Otto Forster „Analysis 2“ 5.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig
- [4] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5.Auflage 1975 Springer Verlag Wien
- [5] Erich Kamke „Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen“ Band 1 10.Auflage Teubner Verlag Stuttgart 1983
- [6] I.Ryshik und I.Gradstein „Summen-, Produkt- und Integraltafeln“ Band 1 Verlag Harri Deutsch Thun 1981



## 67. Rotierende Scheibe, Bahnen in Hohlkugeln und der schwingende Körper im Gravitationsfeld — ein Versuch

Wir führen folgende Größen ein:

$\vec{w}_p$  = Winkelgeschwindigkeit des Planeten

$U_t$  = Rotationszeit des Planeten

$R$  = Radius des Planeten

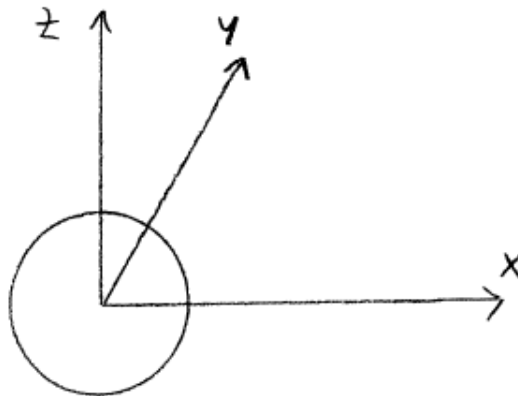
$m_1$  = Masse des Planeten

$\alpha$  = Breitengrad

$G$  = Gravitationskonstante

$h_a$  = Höhe über der Oberfläche des Planeten

$\vec{w}_p$  soll zeitlich konstant sein. Auch wird zunächst angenommen, daß  $|\vec{w}_p|$  sehr klein ist. Sonst muß die Corioliskraft des Planeten berücksichtigt werden. Das wird nachher gemacht.  $|\cdot|$  ist der Betrag eines Vektors. Wir betrachten ein Koordinatensystem für diesen Planeten:



Die Schwerebeschleunigung ist gegeben durch:

$$\vec{g}(\vec{X}) = -\frac{Gm_1}{|\vec{X}|^2} \cdot \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Zentrifugalbeschleunigung kann dargestellt werden als:

$$\vec{b}_z(\vec{X}) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \vec{w}_p^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{w}_p^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $\vec{w}_p = (0, 0, |\vec{w}_p|)$  mit  $w_p = \frac{2\pi}{U_t}$ .

Wir erklären nun die Kugelkoordinaten  $r, \alpha_1, \alpha$  von  $\vec{X}$ :

$$\begin{aligned} r &= |\vec{X}| = R + h_a \\ \alpha_1 &= \text{Längengrad} \\ \alpha &= \text{Breitengrad} \quad -90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \end{aligned}$$

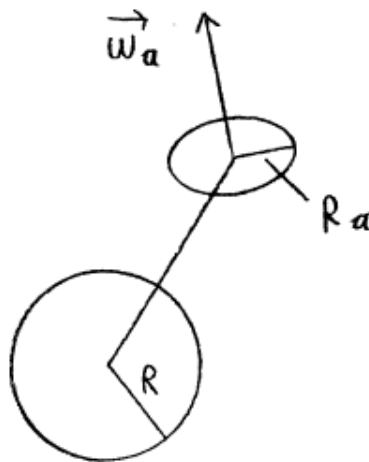
$90^\circ - \alpha$  ist der polare Winkel. Die Position wird bestimmt durch  $R, h_a, \alpha_1$  und  $\alpha$ . Das führt zu folgenden Kugelkoordinaten:

$$\vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha) \cos \alpha_1 \\ \sin(90^\circ - \alpha) \sin \alpha_1 \\ \cos(90^\circ - \alpha) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

vgl. Forster [3], §3, (3.6), S.33 und Bronstein [1], Kapitel 4.2.2.2, S.564

### 1. Rotierende Scheibe (Karussell)

$R_a$  = Radius der Scheibe  
 $\vec{\omega}_a$  = Winkelgeschwindigkeit der Scheibe



$\vec{\omega}_a$  soll konstant sein. Wir kommen nun zu den gegebenen räumlichen Polarkoordinaten  $|\vec{\omega}_a|, \alpha_2, \alpha_3$  von  $\vec{\omega}_a$ :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \text{Längenwinkel} \\ \alpha_3 &= \text{Breitenwinkel} \quad -90^\circ \leq \alpha_3 \leq 90^\circ \end{aligned}$$

Dann erhalten wir mit Gleichung (1):

$$\vec{\omega}_a := |\vec{\omega}_a| \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Nun betrachten wir die Größen:

$r_a$  = Abstand von der Scheibenachse  $\vec{w}_a$ , dieser kann maximal gleich  $R_a$  sein.

$\alpha_3$  = Breitenwinkel (Neigungswinkel) der Scheibe und von  $\vec{w}_a$

$\alpha_2$  = Längenwinkel von  $\vec{w}_a$

$\alpha_4$  = Längenwinkel auf der Scheibe

$\alpha_3$  soll aus Gründen der Einfachheit nur im Bereich  $[0, 90^\circ]$  betrachtet werden. Es gilt nun, wie im Anhang gezeigt, für  $0 \leq \alpha_4 \leq 360^\circ$ :

$$\sin \alpha_5 = \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4$$

$$\tan \alpha_6 = \cos \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4$$

Dabei sind  $\alpha_5$  der Breitengrad und  $\alpha_6$  der Längengrad von  $\vec{r}_a$ . Nun haben wir nach Gleichung (1):

$$\vec{r}_a(\alpha_3, \alpha_4, r_a) = r_a \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_5) \cos \alpha_6 \\ \sin(90^\circ - \alpha_5) \sin \alpha_6 \\ \cos(90^\circ - \alpha_5) \end{pmatrix} = r_a \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_5 \cos \alpha_6 \\ \cos \alpha_5 \sin \alpha_6 \\ \sin \alpha_5 \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $-90^\circ \leq \alpha_5 \leq 90^\circ$ .

$\vec{r}_a$  und  $\vec{w}_a$  können mit einer Methode in Schröer [4], Kapitel 7 ins Oberflächenkoordinatensystem umgewandelt werden.

Nun berechnen wir die Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{z}_1$  auf der Scheibe im Abstand  $r_a$ :

$$\vec{z}_1 = |\vec{r}_a| \cdot \vec{w}_a^2 \cdot \frac{\vec{r}_a}{|\vec{r}_a|} = \vec{r}_a \cdot \vec{w}_a^2$$

Die Gesamtbeschleunigung  $\vec{b}_{ges}$  an der Stelle  $\vec{X} + \vec{r}_a$  kann dann ausgedrückt werden durch:

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) = \vec{z}_1 + \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{r}_a)$$

$\beta = \angle(\vec{b}_{ges}, \vec{g})$  ist der Abweichungswinkel. Dazu verwenden wir das Skalarprodukt:

$$\cos \beta = \frac{\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) \cdot \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a)}{|\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)| \cdot |\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a)|}$$

## 2. Bahnen in einer Hohlkugel

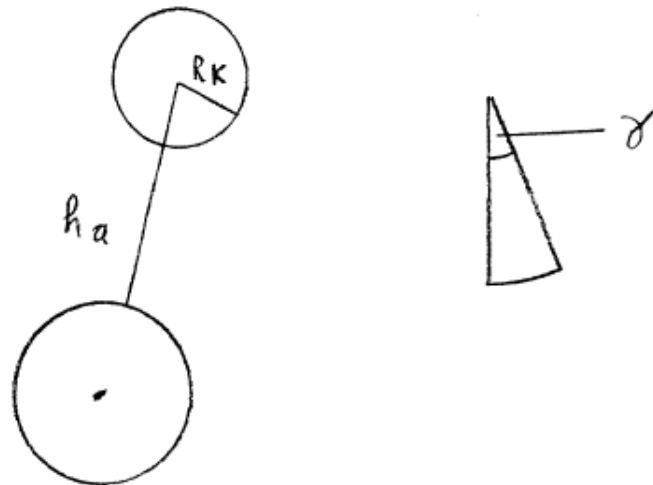
Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$R_k$  = Hohlkugelradius

$\gamma$  = Steigungswinkel der Bahn der kleinen Kugel in der Hohlkugel

$\vec{w}_a$  = Winkelgeschwindigkeit der Hohlkugel, diese ist konstant.

Voraussetzung: Der Radius der kleinen Kugel ist sehr klein gegenüber  $R_k$ .



Es können nach Gleichung (1) räumliche Polarkoordinaten gebildet werden:

$$\vec{w}_a = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_3) \cos \alpha_2 \\ \sin(90^\circ - \alpha_3) \sin \alpha_2 \\ \cos(90^\circ - \alpha_3) \end{pmatrix} = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit:

$\alpha_3 =$  Breitenwinkel von  $\vec{w}_a$   $-90^\circ \leq \alpha_3 \leq 90^\circ$

$\alpha_2 =$  Längswinkel von  $\vec{w}_a$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{w}_b$  der kleinen Kugel in der großen Hohlkugel kann auch in räumliche Polarkoordinaten zerlegt werden, mit der Gleichung (1):

$$\vec{w}_b = |\vec{w}_b| \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \gamma) \cos \alpha_4 \\ \sin(90^\circ - \gamma) \sin \alpha_4 \\ \cos(90^\circ - \gamma) \end{pmatrix} = |\vec{w}_b| \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha_4 \\ \cos \gamma \sin \alpha_4 \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$$

mit:

$\gamma =$  Steigungswinkel der Kugelbahn (von  $\vec{w}_b$ )  $-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$

$\alpha_4 =$  Längswinkel von  $\vec{w}_b$  (der Kugelbahn)

$\gamma$  und  $\alpha_4$  gelten bezüglich des Koordinatensystems des Planetenmittelpunkts.

Nun beschäftigen wir uns mit Beschleunigungen:

$\vec{z}_1 =$  Zentrifugalbeschleunigung, die von der rotierenden großen Hohlkugel ( $\vec{w}_a$ ) erzeugt wird.

$\vec{z}_c =$  Coriolisbeschleunigung der großen Hohlkugel ( $\vec{w}_a$ )

$\vec{z}_2 =$  Zentrifugalbeschleunigung, die durch die kleine Kugel ( $\vec{w}_b$ ) erzeugt wird.

Weitere Beschleunigungen treten nicht auf, da  $\vec{w}_a$  konstant ist.

Räumliche Polarkoordinaten von  $\vec{r}_a$  nach Gleichung (1):

$$\vec{r}_a = R_k \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_5) \cos \alpha_6 \\ \sin(90^\circ - \alpha_5) \sin \alpha_6 \\ \cos(90^\circ - \alpha_5) \end{pmatrix} = R_k \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_5 \cos \alpha_6 \\ \cos \alpha_5 \sin \alpha_6 \\ \sin \alpha_5 \end{pmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned} R_k &= |\vec{r}_a| \\ \alpha_5 &= \text{Höhenwinkel von } \vec{r}_a \quad -90^\circ \leq \alpha_5 \leq 90^\circ \\ \alpha_6 &= \text{Längenwinkel von } \vec{r}_a \end{aligned}$$

$\vec{r}_a$  ist die Bewegung der kleinen Kugel in der großen Hohlkugel.  $\vec{w}_a, \vec{w}_b$  und  $\vec{r}_a$  können mit der Methode in Schröer [4], Kapitel 7 ins Oberflächenkoordinatensystem transformiert werden.

Nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74 gilt:

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 &= -\vec{w}_a \times (\vec{w}_a \times \vec{r}_a) & \vec{z}_2 &= -\vec{w}_b \times (\vec{w}_b \times \vec{r}_a) \\ \vec{z}_c &= -2 \cdot (\vec{w}_a \times \vec{v}) \end{aligned}$$

$\vec{v}$  = Geschwindigkeit der kleinen Kugel in der großen Hohlkugel

$$\vec{v} = \vec{w}_b \times \vec{r}_a \quad \text{nach Budo [2], §14, Gleichung (8), S.72}$$

Die Gesamtbeschleunigung  $\vec{b}_{ges}$  ergibt sich nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74:

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) = \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{z}_1 + \vec{z}_c + \vec{z}_2$$

Den Abweichungswinkel  $\beta = \angle(\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a), \vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a))$  erhalten wir mit dem Skalarprodukt:

$$\cos \beta = \frac{\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) \cdot \vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)}{|\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a)| \cdot |\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)|}$$

Der Spezialfall  $\vec{w}_a = 0$  ergibt den schiefen Makrolooping.

Eine wichtige Rolle spielt der Winkel  $\beta_2 = \angle(\vec{r}_a, \vec{b}_{ges})$ . Mit dem Skalarprodukt bekommen wir:

$$\cos \beta_2 = \frac{\vec{r}_a \cdot \vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)}{|\vec{r}_a| \cdot |\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)|}$$

- 1)  $0 \leq \beta_2 \leq 90^\circ$ , die kleine Kugel bleibt an der Schale der großen Hohlkugel.
- 2)  $90^\circ \leq \beta_2 \leq 180^\circ$ , die kleine Kugel fällt innerhalb der großen Hohlkugel.

Daraus können mit

$$1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \cos 90^\circ \leq \frac{\vec{r}_a \cdot \vec{b}_{ges}}{|\vec{r}_a| \cdot |\vec{b}_{ges}|} \leq \cos 0^\circ = 1$$

$$2) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \cos 90^\circ \geq \frac{\vec{r}_a \cdot \vec{b}_{ges}}{|\vec{r}_a| \cdot |\vec{b}_{ges}|} \geq \cos 180^\circ = -1$$

konkrete Bedingungen für das Bleiben oder Fallen abgeleitet werden.

### 3. Der schwingende Körper

Wir zerlegen die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{w}_a$  der Kreisbewegung des Körpers (ohne Gravitation) in Kugelkoordinaten. Diese Winkelgeschwindigkeit soll konstant sein. Nach Gleichung (1):

$$\vec{w}_a = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_3) \cos \alpha_2 \\ \sin(90^\circ - \alpha_3) \sin \alpha_2 \\ \cos(90^\circ - \alpha_3) \end{pmatrix} = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_3 \end{pmatrix}$$

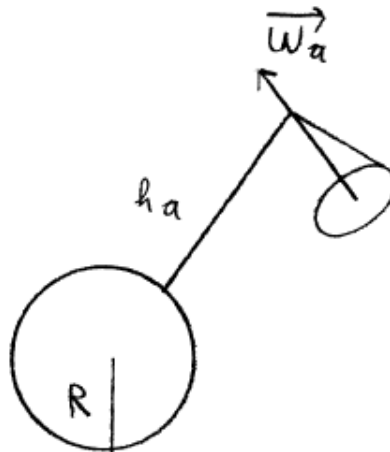
mit den Größen:

$\alpha_3 =$  Breitenwinkel von  $\vec{w}_a$   $-90^\circ \leq \alpha_3 \leq 90^\circ$

$\alpha_2 =$  Längswinkel von  $\vec{w}_a$

$l =$  Länge des Seils, an dem der Körper befestigt ist.  $l$  ist gegeben.  $l = |\vec{l}_a|$

$\vec{l}_a =$  Bewegung des schwingenden Körpers



Wir führen Kugelkoordinaten ein, nach Gleichung (1):

$$\vec{l}_a = l \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_5) \cos \alpha_6 \\ \sin(90^\circ - \alpha_5) \sin \alpha_6 \\ \cos(90^\circ - \alpha_5) \end{pmatrix} = l \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_5 \cos \alpha_6 \\ \cos \alpha_5 \sin \alpha_6 \\ \sin \alpha_5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

mit folgenden Größen:

$\alpha_6$  = Längenwinkel von  $\vec{l}_a$

$\alpha_5$  = Breitenwinkel von  $\vec{l}_a$

$\alpha_5$  und  $\alpha_6$  sind bezogen auf das Koordinatensystem vom Mittelpunkt des Planeten.  $\vec{w}_a$  und  $\vec{l}_a$  können auch ins Oberflächenkoordinatensystem umgerechnet werden mit der Methode in Schröer [4], Kapitel 7.

Wir wenden uns nun der Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{z}_1$  des schwingenden Körpers zu:

$$\vec{z}_1 = -\vec{w}_a \times (\vec{w}_a \times \vec{l}_a) \quad \text{nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74}$$

Mit derselben Gleichung in Budo [2] bilden wir die Gesamtbeschleunigung:

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a) = \vec{g}(\vec{X} + \vec{l}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{l}_a) + \vec{z}_1 \quad (5)$$

Den Abweichungswinkel  $\beta = \angle(\vec{b}_{ges}, \vec{g})$  berechnen wir mit dem Skalarprodukt:

$$\cos \beta = \frac{\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a) \cdot \vec{g}(\vec{X} + \vec{l}_a)}{|\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a)| \cdot |\vec{g}(\vec{X} + \vec{l}_a)|}$$

$\vec{b}_{ges}$  muß mit der Richtung von  $\vec{l}_a$  übereinstimmen:

$$\frac{\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a)}{|\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a)|} = \frac{\vec{l}_a}{|\vec{l}_a|} \quad (6)$$

Durch die Gleichungen (5) und (6) wird die Bewegung  $\vec{l}_a$  des schwingenden Körpers beschrieben.  $l$  ist bekannt.  $\alpha_6$  und  $\alpha_5$  müssen aus (5) und (6) bestimmt werden.

Der Winkel  $\gamma = \angle(\vec{l}_a, \vec{w}_a)$  des schwingenden Körpers:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{l}_a \cdot \vec{w}_a}{|\vec{l}_a| \cdot |\vec{w}_a|}$$

Im Spezialfall  $\frac{\vec{w}_a}{|\vec{w}_a|} = \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|}$  ist  $\vec{w}_a$  senkrecht zur Planetenoberfläche. Der schwingende Körper führt dann eine Kreisbewegung aus.

Nun soll auch die Coriolisbeschleunigung, die durch die Rotation des Planeten verursacht wird, bestimmt werden.

$$\vec{b}_c = -2 \cdot (\vec{w}_p \times \vec{v}) \quad \text{nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74}$$

$$\vec{v} = \vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{r}_a) \quad \text{in den Fällen 1) und 2)}$$

und

$$\vec{v} = \vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{l}_a) \quad \text{im Fall 3)}$$

Vgl. auch Budo [2], §14, Gleichung (8), S.72.

Daraus folgt:

$$\vec{b}_c(\vec{X} + \vec{r}_a) = -2 \cdot [\vec{w}_p \times (\vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{r}_a))] \quad \text{in den Fällen 1) und 2)}$$

$$\vec{b}_c(\vec{X} + \vec{l}_a) = -2 \cdot [\vec{w}_p \times (\vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{l}_a))] \quad \text{im Fall 3)}$$

Wir berechnen die Gesamtbeschleunigungen, vgl. auch Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74.

Es gilt dann im Fall 1):

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) = \vec{z}_1 + \vec{b}_c + \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{r}_a)$$

im Fall 2):

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) = \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{z}_1 + \vec{z}_c + \vec{z}_2 + \vec{b}_c$$

im Fall 3) wegen Gleichung (5):

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a) = \vec{g}(\vec{X} + \vec{l}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{l}_a) + \vec{z}_1 + \vec{b}_c \quad (7)$$

Alle anderen Gleichungen verändern sich nicht.  $\vec{w}_p$  ist konstant.  $|\vec{w}_p|$  muß dann nicht mehr sehr klein sein. Wenn  $|\vec{w}_p|$  sehr klein ist, dann kann die Berechnung in allen Fällen näherungsweise ohne  $\vec{b}_z$  und  $\vec{b}_c$  geführt werden.

Wir fassen die Fälle noch einmal zusammen:

Fall 1): Rotierende Scheibe (Karussell)

Fall 2): Bahnen in einer Hohlkugel

Fall 3): schwingender Körper

Sind die Winkelgeschwindigkeiten nicht mehr zeitlich konstant, dann treten noch weitere Beschleunigungen auf. Soll aber eine genaue zeitliche Beschreibung dieser Vorgänge erfolgen, so sind Materialeigenschaften (bei Karussell und Hohlkugel Reibung, beim schwingenden Körper Elastizitätseigenschaften des Seils) mit zu berücksichtigen. Das wird hier nicht gemacht.

Die Beschleunigungen, die durch andere Planeten, Fixsterne, Satelliten und andere Massen (bei der Erde vor allem Sonne und Mond) hervorgerufen werden, können durch ein Zusatzglied  $\vec{b}_r(t)$  berücksichtigt werden. Dieser Zusatzterm ist aber gerade bei der Erde wegen der Mondbewegung stark zeitabhängig.

Bei der Erde ist:  $\odot = \text{Sonne}$      $E = \text{Erde}$      $M = \text{Mond}$

$$\frac{Gm_{\odot}}{r_{E\odot}^2} + \frac{Gm_M}{r_{EM}^2} \approx 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Das ist vernachlässigbar klein gegenüber  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Nur bei genauen Berechnungen ist dieses Korrekturglied erforderlich.  $\vec{b}_r(t)$  kann aber durchaus auch nicht vernachlässigbar klein sein, wenn z.B. 2 Planeten nicht weit voneinander entfernt sind.

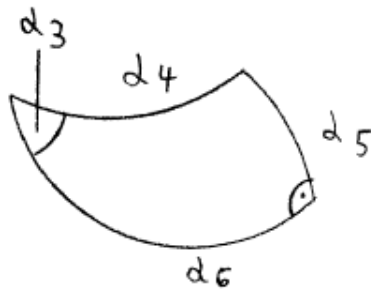


## Anhang

Es geht hier um die Herleitung von  $\sin \alpha_5 = \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4$  und  $\tan \alpha_6 = \cos \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4$  für  $0^\circ \leq \alpha_4 \leq 360^\circ$ .

$\alpha_5 =$  Breitengrad von  $\vec{r}_a$        $-90^\circ \leq \alpha_5 \leq 90^\circ$   
 $\alpha_6 =$  Längengrad von  $\vec{r}_a$

Wir betrachten zuerst den Fall  $0^\circ \leq \alpha_4 \leq 90^\circ$ . Dabei ist  $\alpha_5 \geq 0^\circ$ .

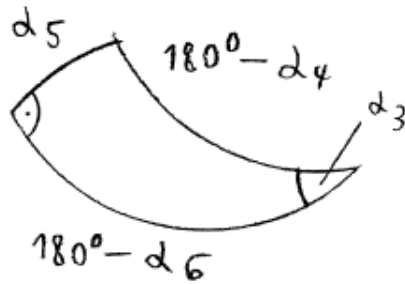


Nach Bronstein [1], Kapitel 2.6.4.3.2, S.209, Gleichung (2.87) und (2.95):

$$\sin \alpha_5 = \sin \alpha_4 \cdot \sin \alpha_3$$

$$\cos \alpha_3 = \tan \alpha_6 \cdot \cot \alpha_4 = \frac{\tan \alpha_6}{\tan \alpha_4} \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_6 = \cos \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4$$

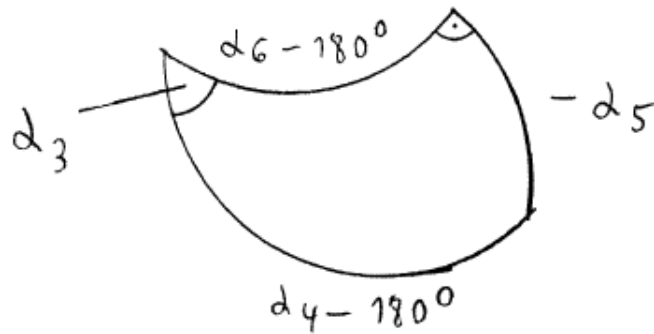
Nun zum Fall  $90^\circ \leq \alpha_4 \leq 180^\circ$ , mit  $\alpha_5 \geq 0^\circ$ :



$$\sin \alpha_5 = \sin(180^\circ - \alpha_4) \cdot \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4 \cdot \sin \alpha_3$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\tan(180^\circ - \alpha_6)}{\tan(180^\circ - \alpha_4)} = \frac{-\tan \alpha_6}{-\tan \alpha_4} \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_6 = \cos \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4$$

Der Fall  $180^\circ \leq \alpha_4 \leq 270^\circ$ :       $\alpha_5 \leq 0^\circ$

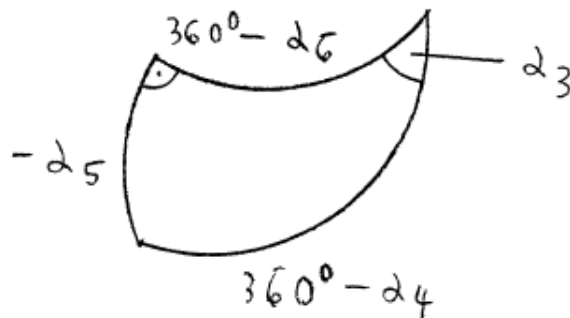


$$-\sin \alpha_5 = \sin(-\alpha_5) = \sin \alpha_3 \cdot \sin(\alpha_4 - 180^\circ) = -\sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4$$

$$\Rightarrow \sin \alpha_5 = \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\tan(\alpha_6 - 180^\circ)}{\tan(\alpha_4 - 180^\circ)} = \frac{\tan \alpha_6}{\tan \alpha_4} \Rightarrow \tan \alpha_6 = \cos \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4$$

Schließlich zum Fall  $270^\circ \leq \alpha_4 \leq 360^\circ$ :  $\alpha_5 \leq 0^\circ$



$$-\sin \alpha_5 = \sin(-\alpha_5) = \sin \alpha_3 \cdot \sin(360^\circ - \alpha_4) = -\sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4$$

$$\Rightarrow \sin \alpha_5 = \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\tan(360^\circ - \alpha_6)}{\tan(360^\circ - \alpha_4)} = \frac{-\tan \alpha_6}{-\tan \alpha_4} \Rightarrow \tan \alpha_6 = \cos \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4$$

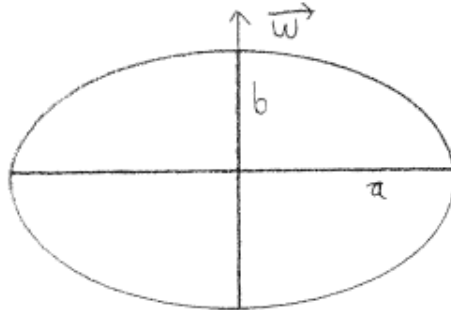
Damit ist die Behauptung gezeigt.

## Literatur

- [1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1985, 22.Auflage
- [2] A Budo „Theoretische Mechanik“, 10.Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980
- [3] Otto Forster „Analysis 3“, 2.Auflage, 1983, Vieweg Verlag, Braunschweig
- [4] Harald Schröder „Orientierungstheorie - die visuelle Vertikale“, Verlag Wissenschaft und Technik, Berlin, 2002

## 68. Die Form des Rotationsellipsoids infolge der Zentrifugalkraft

Wir betrachten folgenden Rotationsellipsoiden:



Wir führen ein:

$a$  = große Halbachse

$b$  = kleine Halbachse

$\vec{w}$  = Winkelgeschwindigkeit des Rotationsellipsoids

$T$  = Rotationszeit des Rotationsellipsoids

$t$  = Zeit

Wir nehmen  $w$  zeitlich konstant an. Dann besteht die Beziehung  $w = \frac{2\pi}{T}$ .

Wir schauen uns nun folgende Größen an:

Zentrifugalbeschleunigung =  $\vec{b}_z = aw^2$

Gravitationsbeschleunigung =  $\vec{g}$

Die Gravitationsbeschleunigung ist durch das Gesetz von Newton gegeben:

$$g = \frac{G \cdot M}{a^2}$$

$G$  = Gravitationskonstante

$M$  ist die Masse des Rotationsellipsoids mit:

$$M(t) = \int_{V(t)} \varphi(\vec{x}, t) d\vec{x}$$

Dabei sind:

$\varphi(\vec{x}, t)$  = Dichte des Rotationsellipsoids

(Die Dichte muß rotationssymmetrisch sein  $\varphi(\vec{x}, t) = \varphi(|\vec{x}|, t)$ )

Ursprung des Koordinatensystems = geometrischer Mittelpunkt des Rotationsellipsoiden  
 $V(t)$  = Volumen des Rotationsellipsoiden  
 $|\cdot|$  = Betrag eines Vektors

Wir bilden nun folgende Größe:

$$c := \frac{|\vec{b}_z|}{|\vec{g}|} = \frac{aw^2 \cdot a^2}{GM} = \frac{a^3w^2}{GM} \quad (1)$$

Diese Größe spielt nach Müller [1] eine entscheidene Rolle bei der Form des Rotationsellipsoiden.

Dann gelten nach Müller [1] Kapitel 3.4.2.4 S.99 folgende Zusammenhänge:

$A$  ist die Abplattung

$$A = \frac{a-b}{a} \quad (2)$$

$$A = f(c) \quad A = kc \quad \text{bei} \quad A, c \ll 1 \quad (3)$$

$k= 0.5$  (rochesches Modell)

$k= 1.25$  (homogenes Modell)

Bei  $A, c \ll 1$  folgt dann:

$$1 - \frac{b}{a} = A = k \cdot \frac{w^2 a^3}{GM}$$

Wir erhalten:

$$b = (1 - A) \cdot a = \left(1 - \frac{kw^2 a^3}{GM}\right) \cdot a$$

Damit ist die Form des Rotationsellipsoiden für  $A, c \ll 1$  geklärt.

Die tatsächlichen  $k$ -Werte der Planeten in unserem Sonnensystem entsprechen nicht ganz den Idealwerten des Rocheschen bzw. des homogenen Modells. So ist für die Erde  $k=0.98$ , für den Mars  $k=1.11$ , für Jupiter  $k=0.68$  und für Saturn  $k=0.58$  siehe Müller [1] Kap. 3.4.2.4 S.100.

Deswegen muß man bei den Planeten  $k$  über die Abplattung  $A$  und  $c$  bestimmen. Die Rotationszeiten sind bekannt. Dann erhält man  $k$ . Damit besteht die Möglichkeit für andere Rotationszeiten die kleine Halbachse  $b$  und damit die Abplattung zu bestimmen, sofern  $A, c \ll 1$  sind.

Problem: Was ist, wenn  $A$  und  $c$  nicht klein sind?

Dann muß die Gravitationsbeschleunigung in ihrer allgemeinen Form herangezogen werden.

$$\vec{g}(\vec{r}, t) = \int_{V(t)} \frac{G\varphi(\vec{x}, t)}{|\vec{r} - \vec{x}|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{x}) d\vec{x} \quad (4)$$

Die Gleichungen (1) - (4) werden dann ineinander eingesetzt. Außerdem muß  $A = f(c)$  bekannt sein.

### **Literatur**

- [1] B. Müller „Grundzüge der Astronomie“ 1973 Teubner Verlag Leipzig

© 2001 **Harald Schröder**

## 69. Die scheinbare Helligkeit von Planeten

**Abstract:** Die scheinbare Helligkeit von Planeten wird zuerst allgemein und dann bei geeigneten Kreisbahnen bestimmt.

**Key words:** Helligkeit - Phase - Phasenwinkel - Kreisbahn - Planet

### 1. Grundlagen

Es ist bekannt, daß die Planeten Merkur und Venus im Fernrohr verschiedene Phasen ähnlich wie der Mond zeigen. Zur Bestimmung der scheinbaren Helligkeit ist neben der Entfernung die Phase entscheidend. Aus diesem Grund haben Merkur und Venus nicht die größte scheinbare Helligkeit, wenn sie die geringste Entfernung zur Erde haben. Im Fernrohr sind dann beide Planeten als sehr schmale Sichel zu sehen. Die maximale scheinbare Helligkeit wird erreicht, wenn Venus und Merkur im Fernrohr eine dicke Sichel zeigen. Wir wollen hier die scheinbare Helligkeit eines Planeten in Abhängigkeit von seiner Bewegung untersuchen. Dazu führen wir folgende Größen ein:

$\vec{r}_s(t)$  = Position eines **selbstleuchtenden** Körpers  $S$  (Fixstern)

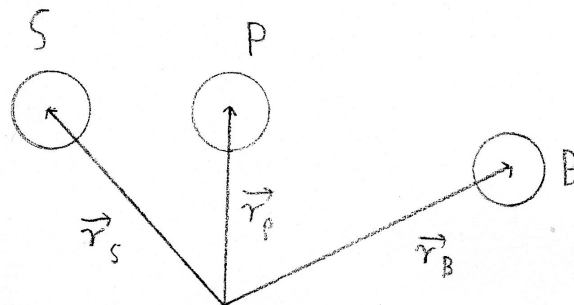
$\vec{r}_p(t)$  = Position eines bestrahlten Körpers  $P$  (Planet),  $P$  leuchtet nicht selbst.

$\vec{r}_B(t)$  = Position eines anderen Körpers  $B$  (Planet), auf dem sich ein Beobachter befindet.  $B$  leuchtet nicht selbst.

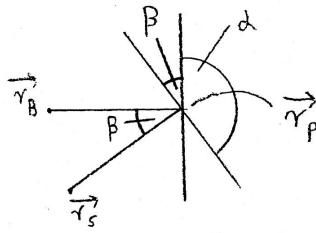
$\vec{r}_s, \vec{r}_B, \vec{r}_p \in R^3$        $t$  = Zeit

Annahme:  $P$  und  $B$  besitzen **keine** Atmosphären.

Alle 3 Körper sind Kugeln, deren Radien klein gegenüber den Entfernungen der 3 Körper untereinander sein sollen.



**Der Reflektionswinkel (Phasenwinkel):**



$\alpha$  = Phasenwinkel, unter dem  $P$  bei  $B$  gesehen wird.

$$\alpha = 180^\circ - \beta \quad \cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

Der Winkel  $\beta$  kann mit dem Skalarprodukt beschrieben werden:

$$\cos \beta = \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_p) \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B| \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|}$$

Daraus folgt:

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_B) \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B| \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|} \quad (1)$$

Nun erklären wir folgende Größen:

$R_s$  = Radius der Kugel  $S$  (Fixstern)

$R_p$  = Radius der Kugel  $P$  (Planet)

$R_B$  = Radius der Kugel  $B$  (Planet mit Beobachter)

$R_a$  = Radius der Augenlinse des Beobachters

Das Problem ist, die Helligkeit der Kugel  $P$ , von  $B$  aus gesehen, zu bestimmen.

$\Phi_{s,p}$  = Lichtstrom, der von  $S$  nach  $P$  geht.

$I$  = Lichtstärke von  $S$

$\Omega_{s,p}$  = Raumwinkel, unter dem  $P$  von  $S$  aus erscheint.

Nach Voigt [9] Kapitel V.1.1 S.177 kann der Raumwinkel näherungsweise durch

$$\Omega_{s,p} = \frac{\pi R_p^2}{|\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2} \quad R_p \ll |\vec{r}_s - \vec{r}_p|$$

dargestellt werden.

$$\Phi_{s,p} = I \cdot \Omega_{s,p}$$

ist nach Kuchling [6] Kapitel 27.2.4. S.387 der dazugehörige Lichtstrom.

Der Lichtstrom  $\Phi_\alpha$  mit Berücksichtigung der Phase kann nach Montenbruck [7] Kapitel VI.3.2 S.112 folgenderweise dargestellt werden:

$$\Phi_\alpha = \frac{1 + \cos(\pi - \alpha)}{2} \cdot \Phi_{s,p} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \cdot \Phi_{s,p} \quad \alpha \text{ in Bogenmaß}$$

Wir benötigen noch:

$a$  = spezifische Lichtintensität (Reflektionsfaktor) der Kugel  $P$

Für die Beleuchtungsstärke  $E$ , die der Beobachter auf der Kugel  $B$  aufnimmt, erhalten wir nach Kuchling [6] Kapitel 27.2.7. S.389:

$$E = \frac{\Phi_\alpha \cdot a}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

Der Lichtstrom, den der Beobachter aufnimmt, ist nach Kuchling [6] (O 27.21) S.389:

$$\Phi_B = \pi \cdot R_a^2 \cdot E$$

$\Phi_B$  kann ebenso wie  $E$  als Maß für die Helligkeit angesehen werden. Wenn wir nun die Einsetzungen vornehmen, erhalten wir für die Beleuchtungsstärke:

$$E = \frac{(1 - \cos \alpha) \cdot \Phi_{s,p} \cdot a}{2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2} = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2} \quad (2)$$

Das sind die Formeln für die Helligkeit unter der Voraussetzung, daß der Zwischenraum Vakuum ist. Es findet also keine Absorption statt. Wir werden nun die Absorption mit berücksichtigen. Der ganze Raum soll jetzt mit einem Medium versehen sein.  $m$  ist der Absorptionskoeffizient. Die folgenden Formeln ändern sich dann:

$$\Phi_{s,p} = \Omega_{s,p} \cdot I \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t)$$

und

$$E = \frac{\Phi_\alpha \cdot a}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2} \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t)$$

$e(\dots)$  sind Schwächungsfaktoren. Im Fall gleichmäßiger Absorption, d.h.  $m$  zeitlich und räumlich konstant, erhalten wir:

$$e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t) = e^{-m \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|}$$

$$e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t) = e^{-m \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|}$$

Bei ungleichmäßiger Absorption ist dagegen:

$$e(\vec{x}, \vec{y}, t) = e^{-F(\vec{x}, \vec{y}, t)}$$



mit

$$F(\vec{x}, \vec{y}, t) := \int_0^1 m(\vec{s}(\vec{x}, \vec{y}, \tau), t) \cdot |\vec{x} - \vec{y}| d\tau$$

wobei

$$\vec{s}(\vec{x}, \vec{y}, \tau) = \tau \vec{y} + (1 - \tau) \cdot \vec{x} \quad \tau \in [0, 1]$$

und

$$\vec{s}(\tau = 0) = \vec{x} \quad \vec{s}(\tau = 1) = \vec{y}$$

$m(\vec{x}, t)$  ist dabei eine Absorptionsfunktion, die von  $\vec{x} \in R^3$  und  $t$  abhängt. Die Formel für die ungleichmäßige Absorption gilt nur bei extrem dünnem Medium wie z.B. im Weltraum. Auch dann gilt diese Formel nur näherungsweise. Im nichthomogenen Medium werden die Lichtstrahlen gebrochen. Diese Richtungsänderung ist schwer zu berücksichtigen. Bei sehr dünnen Medien, wie bei der extrem verdünnten Materiedichte im Weltraum, tritt keine nennenswerte Richtungsänderung auf.

Bei der Formel für ungleichmäßige Absorption handelt es sich um ein Kurvenintegral 1.Art vgl. Bronstein [3] Kapitel 3.1.8.2 S.319.

Wenn wir die Einsetzungen genauso wie im Fall des Vakuums vornehmen, bekommen wir:

$$E = \frac{\pi R_p^2 I_a \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

oder

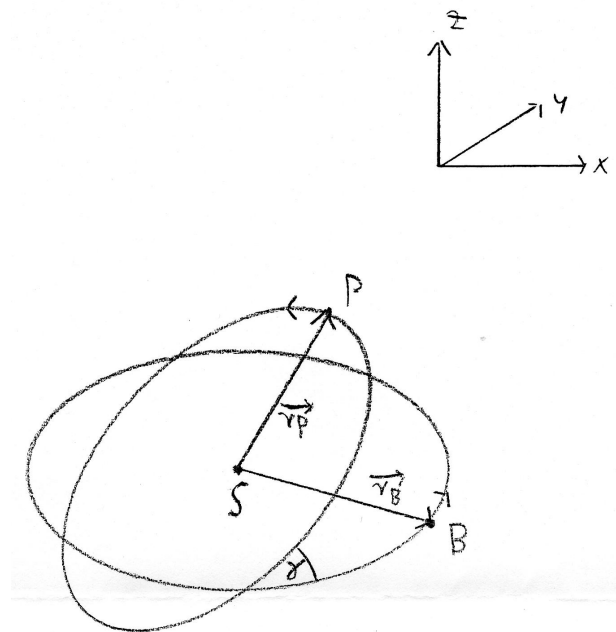
$$\Phi_B = \frac{\pi^2 R_p^2 R_a^2 \cdot I_a \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

Im Absorptionsfall gelten die Formeln nur bei Licht im **sichtbaren** Wellenlängenbereich. Schon in den Nachbarbereichen Ultraviolett und Infrarot treten zusätzlich Emission und Streuung in größerem Maße auf.

Ebene Polarkoordinaten können für  $\vec{r}_s, \vec{r}_p, \vec{r}_B$  für die Bewegung in Kreisbahnen in einer Ebene verwendet werden. Das wird bei Schröer [8] gemacht. Für geneigte Kreisbahnen können Kugelkoordinaten eingesetzt werden.

## 2. Die scheinbare Helligkeit von Planeten auf geneigten Kreisbahnen

Wir schauen uns nun ein Beispiel mit geneigten Kreisbahnen an. Dieses Beispiel ist ähnlich zu Sonne, Erde und Venus. Die Sonne symbolisiert den Fixstern  $S$ , während die Erde durch den Beobachterplaneten  $B$  und die Venus durch den bestrahlten Planeten  $P$  dargestellt wird. Auf Absorption wird zunächst verzichtet.



Gegeben sind die Bahnradien  $r_p$  und  $r_B$ , die Startwinkel  $\delta_p$  und  $\delta_B$  und die Massen  $m_p$  und  $m_B$  der Planeten  $P$  (Venus) und  $B$  (Erde). Der Fixstern  $S$  (Sonne) befindet sich im Koordinatenursprung ( $\vec{r}_s = \vec{0}$ ).  $m_s$  soll die Masse des Fixsterns (Sonne) sein. Dann kann die Winkelgeschwindigkeit der beiden Planeten bestimmt werden. Sie folgt aus der Gleichheit von Gravitationskraft und Zentripetalkraft bei der Kreisbewegung:

$$\frac{G \cdot m_s m_p}{r_p^2} = m_p \cdot r_p w_p^2 \quad \text{daraus folgt:} \quad w_p = \sqrt{\frac{G \cdot m_s}{r_p^3}}$$

$$\frac{G \cdot m_s m_B}{r_B^2} = m_B \cdot r_B w_B^2 \quad \text{daraus folgt:} \quad w_B = \sqrt{\frac{G \cdot m_s}{r_B^3}}$$

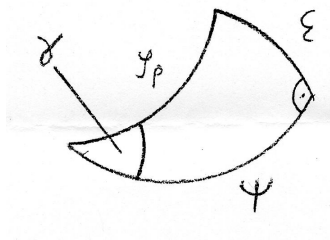
Dabei ist  $G$  die Gravitationskonstante. Die Kreisbahn des bestrahlten Planeten  $P$  soll geneigt sein gegenüber der Kreisbahn des Beobachterplaneten  $B$ . Dieser Neigungswinkel wird mit  $\gamma$  bezeichnet und soll konstant sein. Dieses Modell wird dann der Bewegung von Erde und Venus entsprechen.

Der Planet  $B$  mit Beobachter kreist in einer Ebene mit dem Bahnvektor:

$$\vec{r}_B(t) = r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos(\delta_B + w_B \cdot t) \\ \sin(\delta_B + w_B \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} = r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt  $\varphi_p = \delta_p + w_p \cdot t$ .

Wir betrachten das folgende rechtwinklige Kugeldreieck:

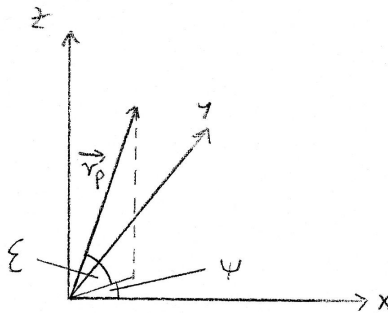


Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin \varepsilon = \sin \gamma \cdot \sin \varphi_p \quad (3)$$

$$\tan \psi = \cos \gamma \cdot \tan \varphi_p \quad (4)$$

Die Herleitung beider Gleichungen erfolgt im Anhang. Wir führen jetzt Kugelkoordinaten ein, nach der folgenden Zeichnung:



Der Vektor  $\vec{r}_p$  ist nach Bartsch [2], Kapitel 7.2.1, S.264,265 gegeben durch:

$$\vec{r}_p(t) = r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cdot \cos \psi \\ \cos \varepsilon \cdot \sin \psi \\ \sin \varepsilon \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass der Betrag  $r_p$  von  $\vec{r}_p$  gegeben ist.

Vom erstem Kapitel kennen wir die Formeln:

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_B) \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B| \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|}$$

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

$$\Phi_B = \pi \cdot R_a^2 \cdot E$$

Es ist hier  $\vec{r}_s = \vec{0}$ .

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_p) \cdot \vec{r}_p}{|\vec{r}_B - \vec{r}_p| \cdot r_p}$$

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot r_p^2 \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p|^2}$$

Nun müssen Zähler und Nenner von  $\cos \alpha$  bestimmt werden.

Wir berechnen den Zähler von  $\cos \alpha$ :

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_p) \cdot \vec{r}_p = \vec{r}_B \cdot \vec{r}_p - r_p^2$$

Wegen der Skalarprodukteigenschaft  $r_p^2 = |\vec{r}_p|^2$ :

$$\begin{aligned} &= r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \\ \sin \varepsilon \end{pmatrix} - r_p^2 \\ &= r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} - r_p^2 \\ &= r_p \cdot \left[ r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} - r_p \right] \end{aligned}$$

Nun bilden wir den Nenner von  $\cos \alpha$ :

$$|\vec{r}_B - \vec{r}_p| \cdot r_p = \sqrt{r_B^2 - 2 \cdot \vec{r}_B \cdot \vec{r}_p + r_p^2} \cdot r_p$$

Wir nutzen die Skalarprodukteigenschaft  $r^2 = |\vec{r}|^2$  für  $\vec{r} \in R^3$ :

$$\begin{aligned} &= r_p \cdot \left[ r_B^2 + r_p^2 - 2r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \\ \sin \varepsilon \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= r_p \cdot \left[ r_B^2 + r_p^2 - 2r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Wir bekommen schließlich:

$$\cos \alpha = \frac{\left( r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} - r_p \right) \cdot r_p}{r_p \cdot \left[ r_B^2 + r_p^2 - 2r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Im Nenner der Beleuchtungsstärke  $E$  ist das Quadrat des Nenners von  $\cos \alpha$ . Wir erhalten:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha)}{2r_p^2 \cdot \left[ r_B^2 + r_p^2 - 2r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} \right]}$$

Für den Lichtstrom:

$$\Phi_B = \pi \cdot R_a^2 \cdot E$$

Es bietet sich die Gelegenheit auch den Absorptionsfall zu behandeln, wobei der Absorptionkoeffizient  $m$  räumlich aber nicht zeitlich veränderlich ist. Das Medium muß extrem dünn sein (z.B. interplanetarer Raum). Bei dichteren Medien kommt es bei veränderlichen  $m$  zu größeren Richtungsänderungen der Strahlung. Im Fall mit Absorption lautet die Beleuchtungsstärke, vgl. Kapitel 1:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p)}{2 \cdot r_p^2 \cdot \left[ r_B^2 + r_p^2 - 2r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} \right]}$$

Dabei ist:

$$e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) = e^{-F(\vec{r}_p, \vec{r}_B)}$$

mit:

$$F(\vec{r}_p, \vec{r}_B) = \int_0^1 m(\vec{s}(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p| d\tau$$

wobei:

$$\vec{s}(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau) = \tau \cdot \vec{r}_B + (1 - \tau) \cdot \vec{r}_p \quad \tau \in [0, 1]$$

Nun berücksichtigen wir  $\vec{r}_s = \vec{0}$ :

$$e(\vec{r}_s, \vec{r}_p) = e(\vec{0}, \vec{r}_p) = e^{-F(\vec{0}, \vec{r}_p)}$$

mit:

$$F(\vec{0}, \vec{r}_p) = \int_0^1 m(\vec{s}(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) \cdot r_p d\tau$$

wobei:

$$\vec{s}(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau) = \tau \cdot \vec{r}_p \quad \tau \in [0, 1]$$

Wenn der Absorptionskoeffizient  $m$  konstant ist, folgt für die Beleuchtungsstärke:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e^{-m \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p|} \cdot e^{-m \cdot r_p}}{2r_p^2 \cdot \left[ r_B^2 + r_p^2 - 2r_p r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} \right]}$$

mit:

$$|\vec{r}_B - \vec{r}_p| = \left[ r_B^2 + r_p^2 - 2r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ist  $M$  die scheinbare Helligkeit in Größenklassen und  $E$  die Beleuchtungsstärke und  $\Phi_B$  der Lichtstrom, so gilt für die Umrechnung nach Voigt [9] Kapitel IV.1.1, S.139 oder Wendker [10] Kapitel 4.1.2 S.78, Gleichung (4-1):

$$M_1 - M_2 = -2.5 \cdot \lg \left( \frac{\Phi_{B1}}{\Phi_{B2}} \right) = -2.5 \cdot \lg \left( \frac{E_1}{E_2} \right)$$

Bei Montenbruck [7] Kapitel VI.5, S.119 werden spezielle Formeln für die scheinbare Helligkeit von Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun und Pluto angegeben. Eine Schwierigkeit bei Saturn besteht durch das Ringsystem, das aber auch mit

berücksichtigt wird.

Wir wollen nun die maximale und minimale Beleuchtungsstärke berechnen. Dazu benötigen wir die Ableitung von  $E$ . Zuerst soll der Vakuumfall behandelt werden. Wir führen das Symbol  $k$  ein.

$$k := r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix}$$

Das Symbol  $h$  ist erklärt durch:

$$h := \cos \alpha$$

Wir bilden die zeitliche Ableitung von  $k$ :

$$\begin{aligned} \dot{k} = r_B r_p \cdot & \left[ \dot{\varphi}_B \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi_B \\ \cos \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left( \cos \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \right) \right] \end{aligned}$$

mit:

$$\frac{d}{dt} \left( \cos \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \right) = -\dot{\varepsilon} \sin \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} + \dot{\psi} \cos \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}$$

Dabei ist nach den Gleichungen (3) und (4):

$$\varepsilon = \arcsin(\sin \gamma \cdot \sin \varphi_p)$$

$$\psi = \arctan(\cos \gamma \cdot \tan \varphi_p)$$

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varphi_p}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi_p}} \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \cos \gamma \cdot (\tan^2 \varphi_p + 1)}{1 + \cos^2 \gamma \tan^2 \varphi_p} \quad (6)$$

Damit ist  $k$  vollständig differenziert.

Wir können nun die Beleuchtungsstärke schreiben als:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha)}{2r_p^2 \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)}$$

Nun bilden wir die Ableitung von  $E$  nach der Quotientenregel:

$$\dot{E} = \frac{\pi R_p^2 I a}{2r_p^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k) + 2 \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \dot{k}}{(r_B^2 + r_p^2 - 2k)^2}$$

Nun differenzieren wir  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = h$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \arccos h$$

Mit der Kettenregel bekommen wir:

$$\dot{\alpha} = \frac{-\dot{h}}{\sqrt{1-h^2}}$$

mit:

$$h = \frac{k - r_p^2}{r_p \cdot \sqrt{r_p^2 + r_B^2 - 2k}}$$

Quotientenregel:

$$\dot{h} = \frac{1}{r_p \cdot (r_p^2 + r_B^2 - 2k)} \cdot \left( \dot{k} \cdot \sqrt{r_p^2 + r_B^2 - 2k} - (k - r_p^2) \cdot \frac{-\dot{k}}{\sqrt{r_p^2 + r_B^2 - 2k}} \right)$$

Dabei sind:

$$\varphi_B = \delta_B + w_B \cdot t$$

$$\varphi_p = \delta_p + w_p \cdot t$$

Es folgt:

$$\dot{\varphi}_B = w_B \quad \dot{\varphi}_p = w_p$$

Damit ist die Beleuchtungsstärke  $E$  vollständig differenziert im Vakuumfall.

Die notwendige Bedingung für Maxima oder Minima der Beleuchtungsstärke folgt mit  $\dot{E} = 0$  aus:

$$\sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k) + 2 \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \dot{k} = 0$$

Löst man diese Gleichung nach  $t$  auf, so erhält man  $t$ -Werte, für die  $E(t)$  ein lokales Maximum oder lokales Minimum oder ein Sattelpunkt ergibt. Ob nun ein Extremum wirklich vorliegt, muß mit dem Satz von Rolle oder der zweiten Ableitung von  $E$  entschieden werden. Evt. werden dafür auch höhere Ableitungen benötigt vgl. Barner [1] Kapitel 8.4 S.295.

Nun beschäftigen wir uns mit der Ableitung der Beleuchtungsstärke im Absorptionsfall: ( $\vec{r}_s = \vec{0}$ )

$$E = \frac{\pi R_p^2 I a \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)}{2r_p^2 \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)}$$

Der Absorptionskoeffizient  $m$  ist räumlich nicht konstant. Wir wenden die Quotientenregel an:

$$\dot{E} = \frac{\pi R_p^2 I a}{2r_p^2 \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)^2} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \left( (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) \right) \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k) \right]$$

$$+2\dot{k} \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)]$$

mit:

$$\frac{d}{dt} \left( (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) \right) = \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) + (1 - \cos \alpha) \cdot \frac{d}{dt} \left[ e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) \right]$$

wobei:

$$\frac{d}{dt} \left[ e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) \right] = \frac{d}{dt} e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) + e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot \frac{d}{dt} e(\vec{0}, \vec{r}_p)$$

Wir differenzieren:

$$\frac{d}{dt} e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) = -e^{-F_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B)} \cdot \dot{F}_1$$

Die  $F$ -Funktion wird indiziert, weil sie in unterschiedlicher Weise gebraucht wird.

$\dot{F}_1$  wird erklärt durch:

$$\dot{F}_1 = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p| d\tau \right]$$

$\vec{s}$  wird indiziert, weil es in unterschiedlicher Weise verwendet wird.

Wir setzen voraus, dass  $m$  stetig im  $R^3$  und der Integrand stetig differenzierbar nach  $t$  ist. Dann kann z.B. nach Forster [4], §9, Satz 2, S.84 Ableitung und Integration vertauscht werden, zu schwächeren Voraussetzungen vgl. Forster [5] §11 Satz 2 S.99:

$$\dot{F}_1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} [m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p|] d\tau$$

Der Integrand ist gleich:

$$\frac{d}{dt} m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p| + m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) \cdot \frac{d}{dt} |\vec{r}_B - \vec{r}_p|$$

mit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\vec{r}_B - \vec{r}_p| &= \frac{d}{dt} (\vec{r}_B^2 + \vec{r}_p^2 - 2 \cdot \vec{r}_B \cdot \vec{r}_p)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{d}{dt} (r_B^2 + r_p^2 - 2k)^{\frac{1}{2}} = \frac{-\dot{k}}{\sqrt{r_B^2 + r_p^2 - 2k}} \end{aligned}$$

und:

$$\frac{d}{dt} m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) = \text{grad } m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) \cdot \dot{\vec{s}}_1 \quad \text{grad } m = \left( \frac{\partial m}{\partial x}, \frac{\partial m}{\partial y}, \frac{\partial m}{\partial z} \right)$$

mit:

$$\dot{\vec{s}}_1 = \tau \dot{\vec{r}}_B + (1 - \tau) \dot{\vec{r}}_p \quad \tau \in [0, 1]$$

Dabei ist:

$$\dot{\vec{r}}_B = r_B \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \\ 0 \end{pmatrix} = r_B \cdot \dot{\varphi}_B \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi_B \\ \cos \varphi_B \\ 0 \end{pmatrix}$$



mit:

$$\dot{\varphi}_B = w_B$$

und:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_p &= r_p \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \sin \psi \\ \sin \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= r_p \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\varepsilon} \sin \varepsilon \cos \psi - \dot{\psi} \cos \varepsilon \sin \psi \\ -\dot{\varepsilon} \sin \varepsilon \sin \psi + \dot{\psi} \cos \varepsilon \cos \psi \\ \dot{\varepsilon} \cos \varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit den Gleichungen (5) und (6):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varphi_p}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 \varphi_p}} \\ \dot{\psi} &= \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \cos \gamma \cdot (\tan^2 \varphi_p + 1)}{1 + \cos^2 \gamma \cdot \tan^2 \varphi_p} \end{aligned}$$

und:

$$\dot{\varphi}_p = w_p$$

Wir differenzieren nun den zweiten  $e$ -Term:

$$\frac{d}{dt} e(\vec{0}, \vec{r}_p) = -e^{-F_2(\vec{0}, \vec{r}_p)} \cdot \dot{F}_2$$

Hier zeigt sich nun, dass es sinnvoll ist, die  $F$ -Funktion und  $\vec{s}$  zu indizieren.

$$\dot{F}_2 = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) \cdot |\vec{r}_p| d\tau \right]$$

$m$  soll stetig im  $R^3$  sein. Der Integrand sei stetig differenzierbar nach  $t$ . Dann gilt nach Forster [4], §9, Satz 2, S.84 (zu schwächeren Voraussetzungen vgl. Forster [5] §11, Satz 2, S.99):

$$\dot{F}_2 = r_p \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) d\tau$$

mit:

$$\frac{d}{dt} m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) = \text{grad } m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) \cdot \dot{\vec{s}}_2$$

wobei:

$$\dot{\vec{s}}_2 = \tau \cdot \dot{\vec{r}}_p \quad \tau \in [0, 1]$$

$\dot{\vec{r}}_p$  wurde schon vorher erklärt.

Damit ist die Beleuchtungstärke  $E$  vollständig differenziert.

Notwendige Bedingung für lokale Extrema ist  $\dot{E} = 0$ . Also folgt:

$$\frac{d}{dt}((1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)) \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k) + 2\dot{k} \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) = 0$$

Nun betrachten wir noch den Spezialfall, dass der Absorptionskoeffizient  $m$  konstant ist. Dann ist  $\text{grad } m = \vec{0}$ . Wir erhalten:

$$\dot{F}_1 = m \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} |\vec{r}_B - \vec{r}_p| d\tau$$

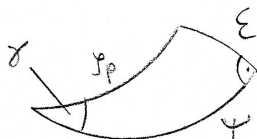
$$\dot{F}_2 = 0$$

### 3. Anhang

Es geht hier um die Herleitung von  $\sin \varepsilon = \sin \gamma \cdot \sin \varphi_p$  und  $\tan \psi = \cos \gamma \cdot \tan \varphi_p$  für  $0^\circ \leq \varphi_p \leq 360^\circ$ .

$\varepsilon =$  Breitenwinkel  $-90^\circ \leq \varepsilon \leq 90^\circ$   
 $\psi =$  Längenwinkel

Wir betrachten zuerst den Fall  $0^\circ \leq \varphi_p \leq 90^\circ$ . Dabei ist  $\varepsilon \geq 0^\circ$ .

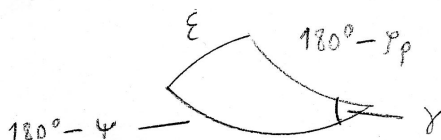


Nach Bronstein [3], Kapitel 2.6.4.3.2, S.209, Gleichung (2.87) und (2.95):

$$\sin \varepsilon = \sin \varphi_p \cdot \sin \gamma$$

$$\cos \gamma = \tan \psi \cdot \cot \varphi_p = \frac{\tan \psi}{\tan \varphi_p} \Rightarrow \tan \psi = \cos \gamma \cdot \tan \varphi_p$$

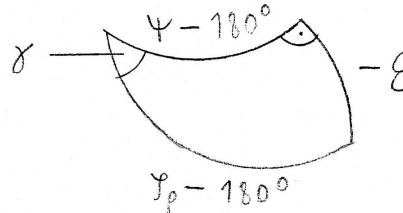
Nun zum Fall  $90^\circ \leq \varphi_p \leq 180^\circ$ , mit  $\varepsilon \geq 0^\circ$ :



$$\sin \varepsilon = \sin(180^\circ - \varphi_p) \cdot \sin \gamma = \sin \varphi_p \cdot \sin \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{\tan(180^\circ - \psi)}{\tan(180^\circ - \varphi_p)} = \frac{-\tan \psi}{-\tan \varphi_p} \Rightarrow \tan \psi = \cos \gamma \cdot \tan \varphi_p$$

Der Fall  $180^\circ \leq \varphi_p \leq 270^\circ$ :  $\varepsilon \leq 0^\circ$

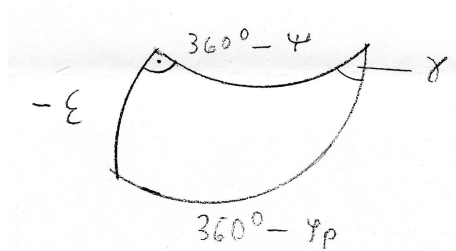


$$-\sin \varepsilon = \sin(-\varepsilon) = \sin \gamma \cdot \sin(\varphi_p - 180^\circ) = -\sin \gamma \cdot \sin \varphi_p$$

$$\Rightarrow \sin \varepsilon = \sin \gamma \cdot \sin \varphi_p$$

$$\cos \gamma = \frac{\tan(\psi - 180^\circ)}{\tan(\varphi_p - 180^\circ)} = \frac{\tan \psi}{\tan \varphi_p} \Rightarrow \tan \psi = \cos \gamma \cdot \tan \varphi_p$$

Schließlich zum Fall  $270^\circ \leq \varphi_p \leq 360^\circ$ :  $\varepsilon \leq 0^\circ$



$$-\sin \varepsilon = \sin(-\varepsilon) = \sin \gamma \cdot \sin(360^\circ - \varphi_p) = -\sin \gamma \cdot \sin \varphi_p$$

$$\Rightarrow \sin \varepsilon = \sin \gamma \cdot \sin \varphi_p$$

$$\cos \gamma = \frac{\tan(360^\circ - \psi)}{\tan(360^\circ - \varphi_p)} = \frac{-\tan \psi}{-\tan \varphi_p} \Rightarrow \tan \psi = \cos \gamma \cdot \tan \varphi_p$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

## Literatur

- [1] Martin Barner, Friedrich Flohr „Analysis 1“ 2. Auflage de Gruyter Verlag Berlin 1983
- [2] Hans-Jochen Bartsch „Taschenbuch mathematischer Formeln“, 7.-9. Auflage, Verlag Harri Deutsch Thun 1986

- [3] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage
- [4] Otto Forster „Analysis 2“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984, 5.Auflage
- [5] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983 Vieweg Verlag Braunschweig
- [6] Horst Kuchling „Taschenbuch der Physik“ 1979 Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main
- [7] Oliver Montenbruck „Grundlagen der Ephemeridenrechnung“ 3.Auflage 1987 Verlag Sterne und Weltraum München
- [8] Harald Schröder „Helligkeit und Bewegung“ 2001 Wissenschaft & Technik Verlag Berlin
- [9] Hans Heinrich Voigt „Abriß der Astronomie“ 4.Auflage 1988 BI Mannheim
- [10] Weigert/Wendker „Astronomie und Astrophysik - ein Grundkurs“ 2.Auflage 1989 VCH Verlagsgesellschaft Weinheim

© 2009 **Harald Schröder**

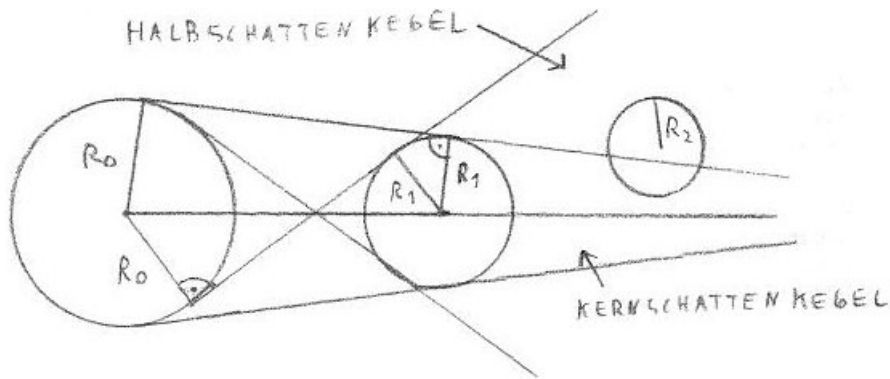
## 70. Finsternisse, eine nicht konventionelle Darstellung

Wir wollen uns die Konstellationen bei Finsternissen genauer ansehen.

### 1. Finsternisräume

Wir betrachten drei Kugeln mit den Positionen  $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \in R^3$ . Die Vektoren sind auf die Mittelpunkte der Kugeln bezogen. Die Positionen sollen von der Zeit  $t$  abhängen.

$R_0, R_1, R_2$  = Radien der Kugeln. Die Kugel 0 soll selbstleuchtend sein. (Lichtquelle, Fixstern)



Das Bild zeigt den Kernschattenkegel und den Halbschattenkegel. Wir führen nun folgende Vektoren ein:

$$\vec{r}_1 := \vec{p}_1 - \vec{p}_0 \quad \vec{r}_2 := \vec{p}_2 - \vec{p}_0$$

$r_i = |\vec{r}_i|$  ist der Betrag des Vektors  $\vec{r}_i$ . Beim Kernschattenkegel haben wir die Öffnungswinkel  $w_{ik}$ :

$$\sin w_{ik} = \frac{R_0}{|\vec{r}_i + \tau \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_0)|} = \frac{R_i}{|\tau \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_0)|}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich ein  $\tau$  für die Kernschattenfinsternis. Die Spitze des Kernschattenkegels wird dargestellt durch:

$$\vec{s}_{ik} := \vec{p}_i + \tau \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_0)$$

Für Halbschattenfinsternisse betrachten wir den folgenden Doppelkegel mit dem Öffnungswinkel  $w_{ih}$ :

$$\sin w_{ih} = \frac{R_0}{|\tau \cdot \vec{r}_i|} = \frac{R_i}{|\vec{r}_i - \tau \cdot \vec{r}_i|}$$

Daraus ergibt sich  $\tau$  für den Halbschattenkegel. Die Kegelspitze bekommt man mit  $\vec{s}_{ih} := \vec{p}_0 + \tau \cdot \vec{r}_i$ . Damit sind nun die Spitzen beider Kegel bekannt. Wir definieren  $\cos w_{ih} =: c_{ih}$  und  $\cos w_{ik} =: c_{ik}$ . Nun können wir die Kegelgleichungen z.B. nach Köhler [1] Kapitel 10.2 S.10.3 Gleichungen (2) und (3) aufstellen, zunächst für den Kernschattenkegel:

$$(\vec{x} - \vec{s}_{ik}) \cdot \frac{-\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = |\vec{x} - \vec{s}_{ik}| \cdot c_{ik} \quad i \in 1, 2 \quad (1)$$

Für den Halbschattenkegel:

$$\left[ (\vec{x} - \vec{s}_{ih}) \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \right]^2 = c_{ih}^2 \cdot (\vec{x} - \vec{s}_{ih})^2 \quad i \in 1, 2 \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) gelten für die Kegelmantelflächen. Für den ausgefüllten Kegel ist dann auch ein kleinerer Öffnungswinkel möglich. Aus  $w' < w$  folgt  $\cos w' > \cos w$ , also bekommen wir mit Hilfe von Gleichung (1) für den Kernschattenkegel:

$$(\vec{x} - \vec{s}_{ik}) \cdot \frac{-\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \geq |\vec{x} - \vec{s}_{ik}| \cdot c_{ik} \quad i \in 1, 2 \quad (3)$$

Für den Halbschattenkegel:

$$\left[ (\vec{x} - \vec{s}_{ih}) \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \right]^2 \geq c_{ih}^2 \cdot (\vec{x} - \vec{s}_{ih})^2 \quad i \in 1, 2 \quad (4)$$

Nun brauchen wir die Kugelgleichung:

$$(\vec{x} - \vec{p}_i)^2 = R_i^2 \quad i \in 0, 1, 2 \quad (5)$$

Vgl. Köhler [1] Kapitel 9.1.2 S.9.2.

Mit  $\vec{y}_{ik}$  bezeichnen wir die Schnittmenge aus den Lösungsmengen von den Gleichungen (1) und (5).  $\vec{y}_{ih}$  soll die Schnittmenge der Lösungsmengen von (2) und (5) sein.  $\vec{y}_{ik}$  und  $\vec{y}_{ih}$  sind Kreise auf der Oberfläche der Kugel  $\vec{p}_i$ , mit gleichen Abstand zu  $\vec{p}_0$ . Wir führen nun die Vektoren  $\vec{a}_{ik} := \vec{y}_{ik} - \vec{p}_0$  und  $\vec{a}_{ih} := \vec{y}_{ih} - \vec{p}_0$  ein. Mit den Beträgen dieser neuen Vektoren können wir bilden:

$$|\vec{x} - \vec{p}_0| \geq a_{ih} \quad (6)$$

$$|\vec{x} - \vec{p}_0| \geq a_{ik} \quad (7)$$

Aus der Gleichung (5) gewinnen wir:

$$(\vec{x} - \vec{p}_i)^2 \geq R_i^2 \quad i \in 0, 1, 2 \quad (8)$$

Die Schnittmenge der Lösungen der Ungleichungen (3),(7) und (8) liefert den Kernschattenraum  $M_{ik}$  der Kugel  $\vec{p}_i$ . Ebenso ist der Halbschattenraum  $M_{ih}$  der Kugel  $\vec{p}_i$  gleich der Schnittmenge der Lösungen der Ungleichungen (4), (6) und (8).

$M_{ik}(O_j) :=$  Kernschattenraum der Kugel  $i$  auf der Kugel  $j$

$M_{ih}(O_j) :=$  Halbschattenraum der Kugel  $i$  auf der Kugel  $j$

Dafür muß  $i \neq j$  sein, wobei  $i, j \in 1, 2$ .

$M_{ik}(O_j)$  ergibt sich aus  $M_{ik}$  geschnitten mit der Lösungsmenge von Gleichung (5) mit  $j$  als Index. Ebenso kann  $M_{ih}(O_j)$  als Schnittmenge von  $M_{ih}$  und der Lösungsmenge von (5) mit Index  $j$  berechnet werden.  $M_{ik}(O_j)$  ist enthalten in der Menge  $M_{ih}(O_j)$ , das kann man aus der Abbildung erkennen.

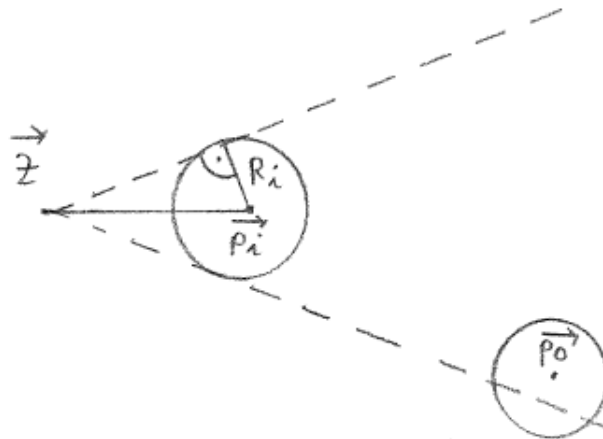
## 2. Projektionsbilder

Nun wenden wir uns den Projektionsbildern zu.

$\vec{z}$  = Punkt, von dem die Bilder aus gesehen werden. Dieser Punkt kann auch zeitlich veränderlich sein.

### 2.1. Bild der Lichtquelle (entspricht Sonnenfinsternis)

$\vec{z}$  ist die Spitze eines Kegels, in dem die Kugel  $i$  enthalten ist.



Öffnungswinkel  $w_i$ :

$$\sin w_i = \frac{R_i}{|\vec{p}_i - \vec{z}|} \quad c_i := \cos w_i$$

$$\vec{e}_i := \frac{\vec{p}_i - \vec{z}}{|\vec{p}_i - \vec{z}|}$$

Nach Köhler [1] Kapitel 10.2 Gleichung (2) und der Gleichung (3) im diesem Text können wir den Raum ohne den Kegel folgendermaßen darstellen:

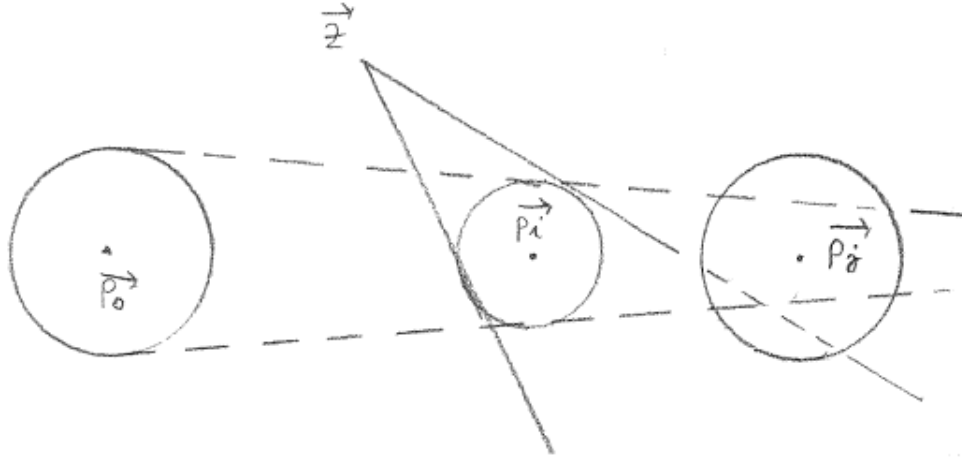
$$(\vec{x} - \vec{z}) \cdot \vec{e}_i \leq |\vec{x} - \vec{z}| \cdot c_i \quad i \in 1, 2 \quad (9)$$

Mit  $N$  bezeichnen wir die Schnittmenge zwischen der Lösung von (9) für  $i = 1$  und  $2$  und der Ungleichung  $(\vec{x} - \vec{p}_0)^2 \leq R_0^2$ . Das bedeutet eine Kombination von 2 oder 3 Ungleichungen, abhängig davon ob die Lichtquelle von einer oder von 2 Kugeln bedeckt wird. Diese Schnittmenge kann ebenfalls eine Funktion der Zeit sein. Das gesuchte Bild ist dann die Projektion von  $N$  auf eine beliebige Ebene hinter dem Projektionspunkt  $\vec{z}$ . Form und Größe des Bildes sind damit bestimmt. Dieses Problem wird allgemein in dem Heft „Projektionen auf Ebenen“ [2] behandelt.

Soll der Beobachtungsort  $\vec{z}$  auf der Oberfläche der Kugel  $i$  liegen, so muß  $\vec{z}$  in der Lösungsmenge von Gleichung (5) für  $i$  enthalten sein.

## 2.2. Bild einer verfinsterten Kugel (entspricht Mondfinsternis)

Wir schauen uns das folgende Bild an:



Nach der Ungleichung (3) ist die Lösungsmenge von

$$(\vec{x} - \vec{s}_{ik}) \cdot \frac{-\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \leq |\vec{x} - \vec{s}_{ik}| \cdot c_{ik} \quad i \in 1, 2 \quad (10)$$

gleich den Raum ohne Kernschattenkegel. Der Raum ohne Halbschattenkegel kann nach der Ungleichung (4) als Lösungsmenge von

$$\left[ (\vec{x} - \vec{s}_{ih}) \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \right]^2 \leq c_{ih}^2 \cdot (\vec{x} - \vec{s}_{ih})^2 \quad (11)$$

dargestellt werden.

Wir führen  $N_{ijk}$  bzw.  $N_{ijh}$  als Teile der  $j$ . Kugel ein, die vom Projektionspunkt  $\vec{z}$  aus sichtbar bleiben. Dabei werden die beleuchteten Teile als Mengen aufgefaßt. Die  $j$ . Kugel wird von der  $i$ . Kugel evt. teilweise verdeckt. Der Index  $k$  symbolisiert den Kernschatten und  $h$  den Halbschatten.

$N_{ijh}$  ergibt sich aus der Lösungsmenge von  $(\vec{x} - \vec{p}_j)^2 \leq R_j^2$  kombiniert mit den Ungleichungen (11) und (9).

$N_{ijk}$  erhalten wir als Lösungsmenge von  $(\vec{x} - \vec{p}_j)^2 \leq R_j^2$  kombiniert mit den Ungleichungen (10) und (9).  $N_{ijh}$  und  $N_{ijk}$  können auch abhängig von der Zeit sein.

Das gesuchte Bild ergibt sich dann als Projektion von  $N_{ijh}$  bzw.  $N_{ijk}$  mit dem Projektionspunkt  $\vec{z}$  auf eine beliebige Ebene. Für diesen Vorgang verweisen wir wieder auf das Heft „Projektionen auf Ebenen“ [2]. Soll der Beobachtungsort  $\vec{z}$  auf der Oberfläche der  $i$ . Kugel liegen, so muß  $\vec{z}$  in der Lösungsmenge der Gleichung (5) für  $i$  enthalten sein. Mit diesem Bild entscheidet sich auch, ob eine partielle oder totale Finsternis und eine Halbschattenfinsternis oder Kernschattenfinsternis vorliegt.



Evt. ist bei allen Fällen noch eine Verallgemeinerung möglich mit  $R_i = R_{pi} + d_i$ . Dabei ist  $R_{pi}$  der eigentliche Planetenradius und  $d_i$  die Dicke der (dichten) Atmosphäre der  $i$ . Kugel. Diese Verallgemeinerung hat nur Bedeutung für Planeten mit sehr dichten Atmosphären. Ein Beispiel dafür ist die Venus. Kernschatten und Halbschatten sind dann auf  $R_{pi}$  bezogen. Sollen die Schatten auf  $R_i$  bezogen werden, dann gibt es keine scharfe Begrenzung mehr. Oft gibt es dann, aufgrund der Atmosphäre, einen kontinuierlichen Übergang zum schattenfreien Raum. Bei keiner Atmosphäre ist natürlich  $R_i = R_{pi}$ .

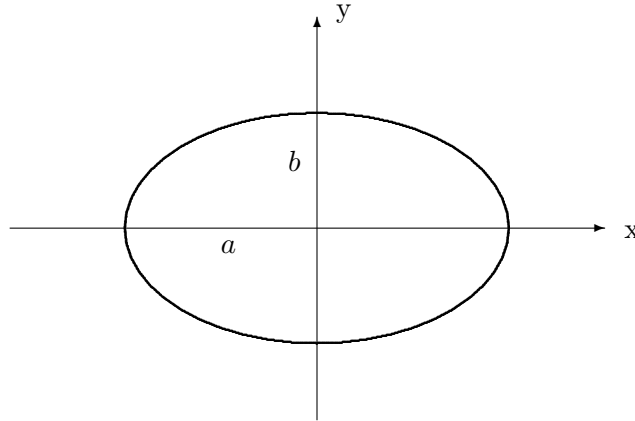
## **Literatur**

- [1] Joachim Köhler, Rolf Höwermann, Hardt Krämer „Analytische Geometrie und Abbildungsgeometrie in vektorieller Darstellung“ Verlag Moritz Diesterweg 6.Auflage 1975 Frankfurt am Main
- [2] Harald Schröer „Projektionen auf Ebenen“ 2001

© 2002 **Harald Schröer**

## 71. Geographische Breite und geozentrische Breite

Wir schauen uns eine Ellipse mit der großen Halbachse  $a$  und der kleinen Halbachse  $b$  an.



Wir nutzen die Mittelpunktsleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

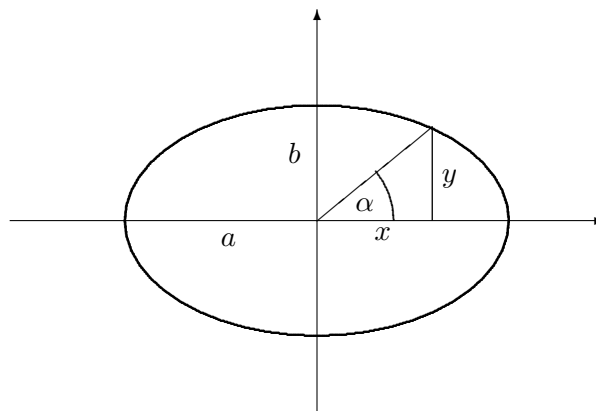
Diese formen wir nach  $y$  um:

$$y = b \cdot \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Mit der Kettenregel können wir die Ableitung ausrechnen:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Für die Beziehung zwischen dem Winkel  $\alpha$  und den Koordinaten  $x$  und  $y$  betrachten wir die folgende Abbildung:



Damit erkennen wir:

$$x \cdot \tan \alpha = y \quad \alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$$

Wir setzen in die Mittelpunktsleichung ein:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 \tan^2 \alpha}{b^2} = 1$$

Auf einen Nenner gebracht:

$$\frac{x^2 b^2 + a^2 x^2 \tan^2 \alpha}{a^2 b^2} = 1$$

Nun lösen wir diese Gleichung nach  $x$  auf:

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \tan^2 \alpha}$$

oder:

$$x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \alpha}}$$

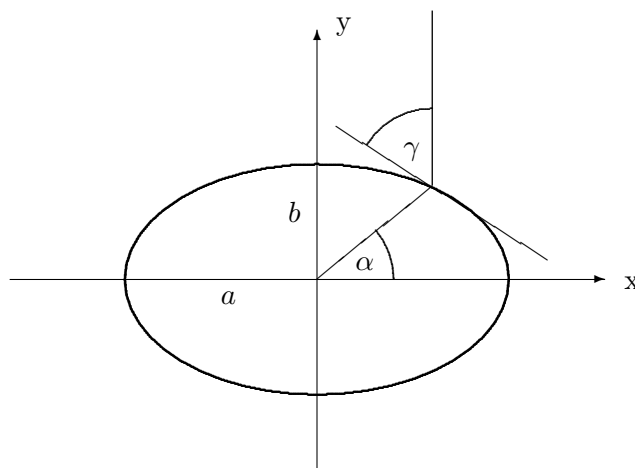
Diesen Term setzen wir nun in die Ableitungsgleichung ein:

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= \frac{\pm b \cdot \frac{-ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \alpha}}}{a \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \tan^2 \alpha}}} \\ &= \mp \frac{\frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \alpha}}}{\sqrt{\frac{a^2 b^2 + a^4 \tan^2 \alpha - a^2 b^2}{b^2 + a^2 \tan^2 \alpha}}} \\ &= \frac{\mp b^2}{\sqrt{a^4 \tan^2 \alpha}} \end{aligned}$$

Also erhalten wir schließlich:

$$y'(\alpha) = \mp \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \tan^{-1} \alpha$$

Nun wenden wir uns dem Problem zu, einen Zusammenhang zwischen der geographischen Breite  $\gamma$  und der geozentrischen Breite  $\alpha$  herzustellen.



Aus der Zeichnung erkennen wir:

$$\frac{-1}{y'(\alpha)} = \tan \gamma \quad \alpha, \gamma \in [-90^\circ, +90^\circ]$$

Setzen wir hier  $y'(\alpha)$  ein, so führt das schließlich zu:

$$b^2 \cdot \tan \gamma = -a^2 \cdot \tan \alpha$$

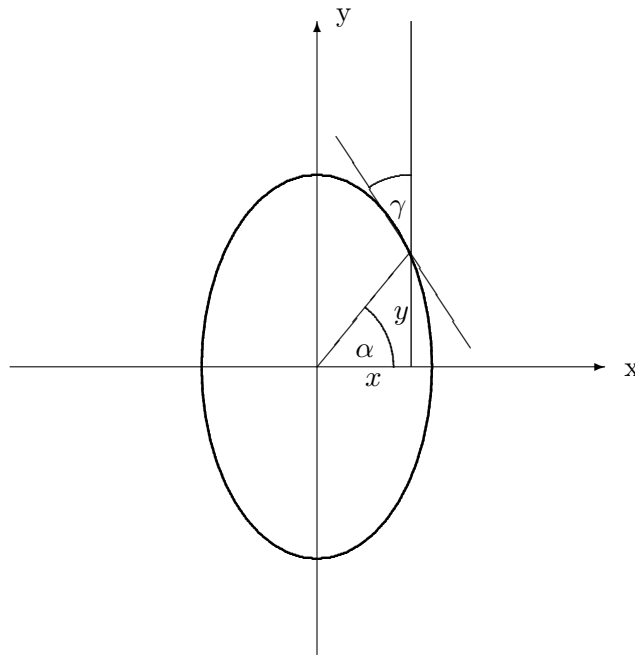
Damit bekommen wir die Darstellungen:

$$\tan \gamma = \frac{-a^2}{b^2} \cdot \tan \alpha \quad \tan \alpha = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \tan \gamma$$

Wir führen nun die Abplattung  $A = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$  ein. Damit folgern wir  $\frac{b}{a} = 1 - A$ . Diese Einsetzung liefert:

$$\tan \alpha = -(1 - A)^2 \cdot \tan \gamma \quad \text{oder} \quad \tan \gamma = \frac{-\tan \alpha}{(1 - A)^2}$$

Nun betrachten wir den allgemeinen Rotationskörper wie in der folgenden Abbildung:



Der allgemeine Rotationskörper wird durch  $y = f(x)$  beschrieben. Auch hier haben wir die Beziehung:

$$\frac{i(x)}{\tan \gamma} = f'(x) \tag{1}$$

mit:

$$i(x) := \begin{cases} -1 & : x \geq 0 \\ +1 & : x < 0 \end{cases}$$

Die geozentrische Breite  $\alpha$  kann man durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\tan \alpha = \frac{\pm f(x)}{|x|} \quad | \cdot | = \text{Betrag} \quad (2)$$

Die Funktion  $y = f(x)$  muß natürlich gegeben sein. Im konkreten Fall muß, wenn  $\gamma$  bekannt ist, mit Gleichung (1)  $x$  bestimmt werden. Dieses eingesetzt in Gleichung (2) ergibt dann  $\alpha$ . Ist  $\alpha$  gegeben, dann berechnen wir mit Gleichung (2)  $x$  und anschließend wird dieses  $x$  in Gleichung (1) eingesetzt.

Ein ungewöhnlicher Fall ist, wenn man nur einen Breitenwinkel  $\alpha$  oder  $\gamma$  kennt, und daraus die zugehörigen Koordinaten  $x$  und  $y$  bestimmen will, wobei die Funktion  $f$  aber bekannt ist: Bei gegebenen  $\alpha$  kann  $x$  mit der Gleichung (2) errechnet werden. Bei bekannten  $\gamma$  muß dann zur Bestimmung von  $x$  die Gleichung (1) herangezogen werden. In beiden Fällen erhält man dann  $y$  mit  $y = f(x)$ .

Man kann es auch so ausdrücken, daß Gleichung (1) für die Umrechnung zwischen  $x$  und  $\gamma$  und Gleichung (2) für die Umrechnung zwischen  $x$  und  $\alpha$  dient.

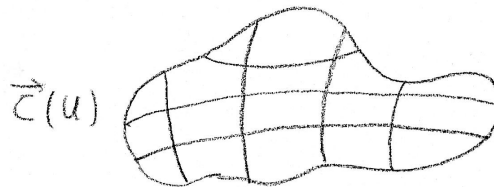
© 2001 **Harald Schröder**

## 72. Ein Beobachter auf einen unregelmäßigen Körper

**Abstract:** Ein Beobachter befindet sich auf einem Planeten oder Planetoiden, der eine unregelmäßige Form hat. Die Begriffe Normalenvektor, Tangentenvektor auf einer beliebigen Oberfläche werden erklärt, ebenso die Höhe oder Tiefe. Die Position des Beobachters wird beschrieben. Der Steigungswinkel wird berechnet.

**Key words:** Beobachter - Planet - unregelmäßiger Körper - Normalenvektor - Tangentenvektor - Steigungswinkel - Höhe - Tiefe - Planetoid

Wir betrachten einen völlig unregelmäßigen Körper (Planet oder Planetoid) mit einem Beobachter. Der Körper soll durch die Abbildung  $\vec{c} : U \rightarrow R^3$  mit  $U \subset R^4$  und  $\vec{c}(k_1, k_2, k_3, t)$  parametrisiert werden. Dabei sind  $k_1$  und  $k_2$  Oberflächenparameter und  $k_3$  ein Höhenparameter.  $t$  ist die Zeit:

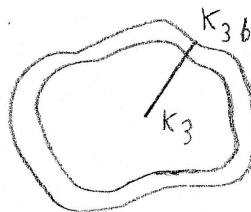


Nun soll der Körper auf irgendeine Art rotieren. Das kann durch eine weitere Abbildung  $\vec{d} : V \rightarrow R^3$  mit  $V \subset R^4$  und  $\vec{d}(\vec{c}(k_1, k_2, k_3, t), t)$  geschehen. Wenn man diese Rotation berücksichtigt, hat der Beobachter die Position:

$$\vec{p}(t) = \vec{d}(\vec{c}(k_1, k_2, k_3, t), t)$$

Wir beachten, dass im Ausdruck für  $\vec{c}$  eine zeitliche Änderung enthalten ist, die mit der Form des Körpers, aber nicht mit der Rotation im Zusammenhang steht. Im Ausdruck für  $\vec{d}$  ist eine zeitliche Änderung vorhanden, die nur mit der Rotation im Zusammenhang steht.

$k_{3b}$  soll nun der Wert von  $k_3$  an der Oberfläche sein.



Dann führen wir den Normalenvektor ein:

$$\vec{n}(k_1, k_2, k_{3b}, t) = \frac{\partial}{\partial k_1} \vec{p}(k_1, k_2, k_{3b}, t) \times \frac{\partial}{\partial k_2} \vec{p}(k_1, k_2, k_{3b}, t)$$

$\frac{\partial}{\partial k_1} \vec{p}$  und  $\frac{\partial}{\partial k_2} \vec{p}$  sind Tangentenvektoren vgl. Forster [1] §15 Satz 1 S.148.

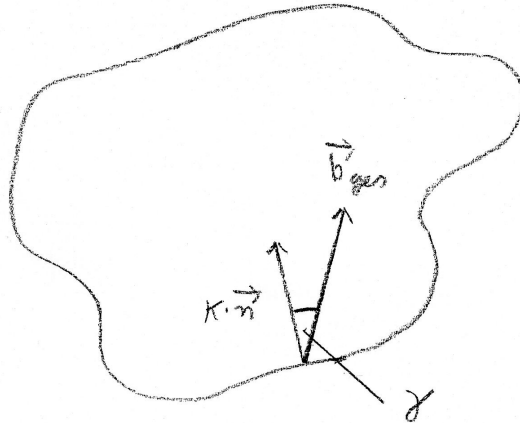
Welcher Normalenvektor ist zur Oberfläche **nach innen** gerichtet?  $t$  ist bekannt und  $k_{3b}$  ist fest. Dann können wir folgende Gleichung aufstellen:

$$\vec{p}(k_1, k_2, k_3, t) = \vec{p}(k_1, k_2, k_{3b}, t) + k \cdot \vec{n}(k_1, k_2, k_{3b}, t)$$

Existiert eine Lösung  $(k, k_1, k_2, k_3)$  für alle  $k$  mit  $0 \leq k \leq k_a \in R^+$  oder  $0 \geq k \geq k_a \in R^-$ , so ist  $k \cdot \vec{n}(k_1, k_2, k_{3b}, t)$  ein nach innen gerichteter Normalenvektor.

### Steigungswinkel:

Wir betrachten folgende Abbildung:



Nehmen wir den Normalenvektor  $\vec{n} = \vec{n}(k_1, k_2, k_{3b}, t)$  und die Gesamtbeschleunigung  $\vec{b}_{ges}$ , so bekommen wir mit dem Skalarprodukt für den Steigungswinkel  $\gamma$ :

$$\cos \gamma = \frac{k \cdot \vec{n} \cdot \vec{b}_{ges}}{|k \cdot \vec{n}| \cdot |\vec{b}_{ges}|}$$

### Höhe (oder Tiefe):

Wir bestimmen nun die Höhe (oder Tiefe) von  $\vec{p}_a := \vec{d}(\vec{c}(k_{1a}, k_{2a}, k_{3a}, t), t)$ .  $k_{1a}, k_{2a}, k_{3a}$  und  $t$  sind fest gewählt.

Zuerst muss untersucht werden, ob  $\vec{p}_a$  über oder unter der Oberfläche ist. Dazu bilden wir folgende Gleichung:

$$\vec{p}_a = \vec{d}(\vec{c}(k_1, k_2, k_3, t), t)$$

Existiert eine Lösung  $(k_1, k_2, k_3)$  von dieser Gleichung, so befindet sich  $\vec{p}_a$  nicht über der Oberfläche. Existiert keine Lösung  $(k_1, k_2, k_3)$ , so ist  $\vec{p}_a$  über der Oberfläche. Damit ist dann klar, ob es sich um eine Höhe oder Tiefe handelt.

Die Oberfläche  $O$  kann dargestellt werden durch:

$$O := \{\vec{d}(\vec{c}(k_1, k_2, k_{3b}, t), t) \in R^3 \quad \text{mit} \quad (k_1, k_2) \in \bar{U} \subset R^2\}$$

$k_{3b}$  ist wieder der Oberflächenparameter.  $k_{3b}$  hängt vom Körper selbst ab. Interessant ist nun der Abstand:

$$r := |\vec{p}_a - \vec{d}(\vec{c}(k_1, k_2, k_{3b}, t), t)|$$

Das Minimum von  $r(k_1, k_2)$  über  $(k_1, k_2) \in \bar{U} \subset R^2$  ist die Höhe (Tiefe) über (unter) der Oberfläche.

Damit haben wir das Problem, ein Minimum unter Nebenbedingungen zu bestimmen. Die Einschränkung auf die Menge  $\bar{U}$  führt dazu, dass die Nebenbedingungen im Allgemeinen Ungleichungen sind. Um dieses Problem zu lösen, muss man Literatur aus dem Bereich „Nichtlineare Optimierung“ heranziehen.

In seltenen Fällen kann  $\bar{U}$  nur durch Gleichungen charakterisiert sein. Dann sind die Nebenbedingungen Gleichungen. Also haben wir ein Minimumproblem mit Gleichungen als Nebenbedingungen. In der Analysis gibt es dafür das Verfahren mit den Lagrange-Multiplikatoren.

Damit erhält man eine neue Funktion  $r_{min}(t)$ , die nun über Zeitintervalle auf Maxima und Minima untersucht werden kann. Für die Bestimmung dieser Extrema reicht - wenn man diese Funktion kennt - die Differentialrechnung mit einer Veränderlichen aus. Die hier bestimmten Größen werden bei Schröder [2] Kapitel 5 zur Bestimmung der Gesamtbeschleunigung und der visuellen Vertikale benötigt.

## Literatur

- [1] Otto Forster „Analysis 3“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 2. Auflage 1983
- [2] Harald Schröder „Orientierungstheorie - Die visuelle Vertikale“, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin, 2002



### 73. Die Länge eines Tages auf einen Planeten

Wir wollen feststellen, welche Zeit zwischen zwei Sonnenaufgängen oder Untergängen auf einen Planeten verstreicht. Mit der Sonne ist der jeweilige Fixstern gemeint, der von diesem Planeten umkreist wird. Es werden Kreisbahnen vorausgesetzt. Im unseren Sonnensystem ist diese Bedingung näherungsweise bei allen Planeten bis auf Merkur und Pluto erfüllt. Wir erklären folgende Größen:

$\vec{w}_p$  = Winkelgeschwindigkeit, mit der der Planet sich um seine eigene Achse dreht.

$\vec{w}$  = Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Planet um seinen Fixstern (Sonne) bewegt.

$$w_p = |\vec{w}_p| \quad w = |\vec{w}|$$

$T_p$  = Rotationszeit des Planeten in Sekunden

$T$  = Umlaufzeit des Planeten um seinen Fixstern (Sonne) in Sekunden

Es gelten die Beziehungen:

$$T_p = \frac{2\pi}{w_p} \quad T = \frac{2\pi}{w}$$

oder

$$\frac{2\pi}{T_p} = w_p \quad \frac{2\pi}{T} = w$$

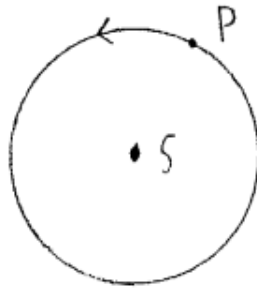
Wir müssen erstmal die Rotationsrichtung feststellen:

$w_p > 0$  (Rotation des Planeten von Westen nach Osten, mathematisch positive Drehrichtung, gegen den Uhrzeigersinn)

$w_p < 0$  (Rotation des Planeten von Osten nach Westen, mathematisch negative Drehrichtung, mit dem Uhrzeigersinn)

$w > 0$  (Umlauf des Planeten gegen den Uhrzeigersinn, mathematisch positive Drehrichtung)

$w < 0$  (Umlauf des Planeten mit dem Uhrzeigersinn, mathematisch negative Drehrichtung)



$P$  = Ort des Planeten (oder des Satelliten)  
 $S$  = Position des Fixsterns (oder des Planeten)

Die Umlaufzeit  $T$  und die Rotationszeit  $T_p$  sind bekannt. Zusätzlich sollen  $\vec{w}_p$  und  $\vec{w}$  parallel und konstant sein. Somit sind  $\vec{w}_p$  und  $\vec{w}$  gegeben. Nun können wir sagen, was ein Tag genau sein soll:

Länge eines Tages:= Zeit, die vergeht, bis  $S$  von  $P$  aus gesehen in der selben Richtung erscheint und zwar von einen festen Punkt der Planetenoberfläche.

Wir untersuchen jetzt die verschiedenen Fälle. Veranschaulichen kann man sie sich mit Modellen:

$w_p > 0$  und  $w = 0$   
 scheinbare Bewegung von  $S$  von Osten nach Westen

$w_p = 0$  und  $w > 0$   
 scheinbare Bewegung von  $S$  von Westen nach Osten

Damit können wir folgende Resultate folgern:

$$w_p - w > 0$$

scheinbare Bewegung von  $S$  von Osten nach Westen ( $w_p > w$ ) von  $P$  aus gesehen

$$w - w_p > 0$$

scheinbare Bewegung von  $S$  von Westen nach Osten ( $w > w_p$ ) von  $P$  aus gesehen

$$w - w_p = 0 \quad w = w_p$$

$S$  führt keine scheinbare Bewegung bezüglich  $P$  aus, gebundene Rotation

Die Länge eines Tages  $T_w$  erhalten wir mit:

$$T_w = \frac{2\pi}{|w_p - w|}$$

Im Fall der gebundenen Rotation wird  $T_w$  unendlich groß.

Bei allen Planeten in unserem Sonnensystem gilt  $w, w_p > 0$ . Nur bei der Venus ist  $w_p < 0$ .

Diese Begriffe sind sinngemäß auf Planeten mit ihren Satelliten übertragbar. In diesen Fall ist  $\vec{w}_p$  die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Satellit um die eigene Achse dreht, und  $\vec{w}$  die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Satellit seinen Planeten umläuft. Auch hier müssen zumindest näherungsweise Kreisbahnen vorausgesetzt werden.

Diese Betrachtungen sind auf Merkur und Pluto nicht anwendbar, da die Bahnen Ellipsen mit großer Exzentrizität sind. Zu Merkur vgl. Voigt [1] Kapitel II.9.3 S.74. Bei allen anderen Planeten unseres Sonnensystems kann aber auf diese Weise die Länge eines Tages bestimmt werden.

## **Literatur**

- [1] Hans Heinrich Voigt „Abriß der Astronomie“ 4.Auflage 1988 BI-Verlag Mannheim

© 2001 **Harald Schröder**

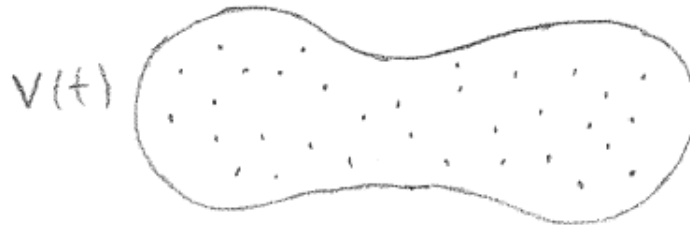
## 74. Die Anzahl der neu entstandenen Objekte im Raum und der mittlere Abstand

### 1. Die Anzahl der neu entstandenen Objekte im Raum

Das Modell, daß hier vorgestellt wird, hat Bedeutung bei der Berechnung der Anzahl neu entstandener Objekte in der Astronomie z.B. bei offenen Sternhaufen, Kugelsternhaufen oder Assoziationen. Von diesen Objekten ist eine durchschnittliche Lebensdauer bekannt (vgl. Voigt [1] Kap. VIII.8 S.355).

Zur Zeit  $t$  seien  $N(t)$  Objekte im einem Volumen  $V(t)$  mit der Lebensdauer  $T(t)$  enthalten.

Dann entsteht in  $V$  im Mittel alle  $\frac{T(t)}{N(t)}$  Zeiteinheiten (z.B. Jahrhunderte, Jahrtausende, Stunden) ein neues Objekt.



Also entstehen pro Zeiteinheit  $\frac{N(t)}{T(t)}$  Objekte. Nun kommen wir zur Anzahl der neu entstandenen Objekte. Dabei wird die Zeit zwischen  $t_1$  und  $t_2$  betrachtet:

$$N(t_1 \leq t \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{N(t)}{T(t)} dt$$

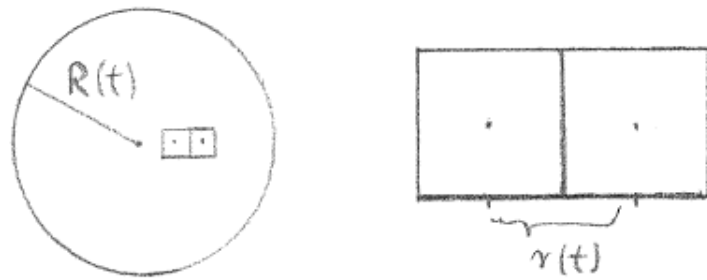
$N(t_1 \leq t \leq t_2)$  = Zahl der Objekte, die von  $t_1$  bis  $t_2$  entstanden sind.

Diese Formeln gelten um so besser, desto größer  $N(t)$  ist.

### 2. Der mittlere Abstand

Das hier betrachtete Modell hat in der Physik und auch in der Astronomie Bedeutung. In der Physik kann es sich z.B. um Teilchen handeln. In der Astronomie kommen als typische Objekte Sterne, Sternhaufen, Nebel, Galaxien, Planetoiden, Kometen, Meteore in Betracht.

$n(t)$  Teilchen seien im einem Volumen  $V(t)$  **gleichmäßig** verteilt.  $t$  ist die Zeit.



$r(t)$  = mittlerer Abstand zweier Teilchen = Kantenlänge eines Würfels

Für den mittleren Abstand erhalten wir:

$$r(t) = \left( \frac{V(t)}{n(t)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Nun behandeln wir den Sonderfall der Kugel:

$$V(t) = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3(t)$$

Wir lösen nach dem mittleren Abstand auf:

$$r(t) = \left( \frac{4\pi}{3n(t)} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R(t)$$

Jetzt geben wir die Teilchenzahldichte  $m(t) = \frac{n(t)}{V(t)}$  vor. Dann folgt:

$$r(t) = \left( \frac{1}{m(t)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Die Formeln gelten um so besser, desto größer  $n(t)$  ist.

## Literatur

- [1] Hans Heinrich Voigt „Abriß der Astronomie“ 2.Auflage BI Mannheim 1975

# Alphabetisches Titelverzeichnis

Nr.	Seite	Titel
34	158	Abflug von einer Kugel
52	242	Ähnliche Abbildungen von Dreiecken im Auge
37	177	Der allgemeine Überholvorgang
74	348	Die Anzahl der neu entstandenen Objekte im Raum und der mittlere Abstand
40	189	Aufeinanderfolgende Wurfbahnen
48	223	Aufstieg einer Gasblase in einer Flüssigkeit
30	106	Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit auf Rotationskörperschalen
39	185	Das Basketballproblem
72	342	Ein Beobachter auf einen unregelmäßigen Körper
45	210	Beschleunigung in Flüssigkeiten und Gasen
18	66	Eine besondere Ellipse
41	193	Besondere Formen des elastischen Stoßes und das ballistische Pendel
32	151	Bewegung einer Kugel mit künstlicher Beschleunigung auf der schiefen Ebene
65	294	Die Bewegung in Gravitations- und elektromagnetischen Feldern
61	277	Bewegungen auf einem rotierenden Planeten
51	238	Brechung an einer Glaskugel, die Brechung des Lichtes an einer planparallelen Platte und die scheinbare Verschiebung durch eine Flüssigkeit
29	102	Das Buffonsche Nadelproblem
59	267	Compton-Effekt — Ablenkung des Elektrons
17	63	Die Diagonalen im regelmäßigen n-Eck
15	59	Drehungen
04	16	Einbeschriebene Dreiecke, Trapeze und Rechtecke
05	21	Einbeschriebene Pyramide und Pyramidenstumpf
57	261	Ellipse als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke
06	23	Extremale Winkel
43	200	Der Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit
70	333	Finsternisse, eine nicht konventionale Darstellung
68	315	Die Form des Rotationsellipsoiden infolge der Zentrifugalkraft
63	288	Frequenzveränderung der Strahlung im Gravitationsfeld
23	80	Geodätische Linien auf verschiedenen Oberflächen und die maximale Entfernung auf einer Kugeloberfläche
71	338	Geographische Breite und geozentrische Breite
58	265	Geschwindigkeit und Temperatur
60	270	Gravitationsbeschleunigung bei Rotationsellipsoid, Kugel und allgemeinen Rotationskörper

## *Alphabetisches Titelverzeichnis*

19	68	Die Halbachsen-Winkelgleichung bei der Ellipse
42	197	Interferenz bei zwei Wellenerregern
50	233	Kegelschnittspiegel
12	47	Konvergenzmaße
09	30	Der Krümmungskreis
73	345	Die Länge eines Tages auf einen Planeten
56	258	Lichtstrom (Strahlungsleistung, Strahlungsfluß) und Raumwinkel durch die geneigte Ellipse
53	247	Der Lichtstrom durch das geneigte Rechteck im Medium
28	91	Lineare und Nichtlineare Regression mit Meßreihen
08	28	Logarithmenformeln als Grenzwerte
64	292	Der lokale Ausschnitt der Ellipse
03	12	Der Minimalabstand
49	229	Der minimale Widerstand
02	9	Oberflächenberechnung
14	54	Projektionen auf Ebenen
62	282	Projektionen von Winkeln und Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche
20	70	Der „Radius“ des Ellipsoiden und die Oberfläche des Rotationsellipsoiden
27	88	Der Raumwinkel durch ein geneigtes Rechteck
24	84	Der Raumwinkel durch ein gleichschenkliges Dreieck
25	85	Der Raumwinkel durch ein rechtwinkliges Dreieck
26	86	Der Raumwinkel durch ein senkrechtes Rechteck
55	254	Rechteck als Strahler — die Beleuchtungsstärke im Medium
54	251	Rechteck als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke
38	181	Die Rolle
67	305	Rotierende Scheibe, Bahnen in Hohlkugeln und der schwingende Körper im Gravitationsfeld — ein Versuch
35	160	Ruhende Kugeln
69	318	Die scheinbare Helligkeit von Planeten
44	207	Schwebende Hohlkugel in einer Flüssigkeit
16	61	Der Schwerpunkt
46	214	Schwimmende Quader
36	173	Der schwingende Körper und die rotierende Scheibe
47	217	Seifenblasen
11	34	Stabilität bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen
13	50	Die Umlaufzahl
33	155	Der vertikale Looping
22	77	Der Vier-Seiten-Fall beim Trapez
21	74	Die vierte Seite und der Flächeninhalt des Sechsecks
10	32	Winkelgeschwindigkeit und Radiusvektor einer beliebigen Bewegung
66	298	Wurfbahnen im Schwerfeld eines Planeten
31	144	Wurfbahnen von Kugeln auf der schiefen Ebene
07	25	Das Zollstockproblem
01	7	Zurückführung von 3-dimensionalen Integralen auf 1-dimensionale

# Chronologisches Titelverzeichnis

## 2000

Nr.	Seite	Titel
52	242	Ähnliche Abbildungen von Dreiecken im Auge
48	223	Aufstieg einer Gasblase in einer Flüssigkeit
43	200	Der Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit
38	181	Die Rolle
35	160	Ruhende Kugeln

## 2001

Nr.	Seite	Titel
37	177	Der allgemeine Überholvorgang
40	189	Aufeinanderfolgende Wurfbahnen
39	185	Das Basketballproblem
45	210	Beschleunigung in Flüssigkeiten und Gasen
18	66	Eine besondere Ellipse
32	151	Bewegung einer Kugel mit künstlicher Beschleunigung auf der schiefen Ebene
29	102	Das Buffonsche Nadelproblem
59	267	Compton-Effekt — Ablenkung des Elektrons
15	59	Drehungen
68	315	Die Form des Rotationsellipsoiden infolge der Zentrifugalkraft
63	288	Frequenzveränderung der Strahlung im Gravitationsfeld
71	338	Geographische Breite und geozentrische Breite
19	68	Die Halbachsen-Winkelgleichung bei der Ellipse
42	197	Interferenz bei zwei Wellenerregern
50	233	Kegelschnittspiegel
12	47	Konvergenzmaße
09	30	Der Krümmungskreis
73	345	Die Länge eines Tages auf einen Planeten
08	28	Logarithmenformeln als Grenzwerte
64	292	Der lokale Ausschnitt der Ellipse
03	12	Der Minimalabstand
02	9	Oberflächenberechnung
14	54	Projektionen auf Ebenen



## *Chronologisches Titelverzeichnis*

20	70	Der „Radius“ des Ellipsoiden und die Oberfläche des Rotationsellipsoiden
16	61	Der Schwerpunkt
46	214	Schwimmende Quader
36	173	Der schwingende Körper und die rotierende Scheibe
13	50	Die Umlaufzahl
22	77	Der 4 Seiten-Fall beim Trapez
10	32	Winkelgeschwindigkeit und Radiusvektor einer beliebigen Bewegung
31	144	Wurfbahnen von Kugeln auf der schiefen Ebene

### **2002**

Nr.	Seite	<b>Titel</b>
34	158	Abflug von einer Kugel
74	348	Die Anzahl der neu entstandenen Objekte im Raum und der mittlere Abstand
41	193	Besondere Formen des elastischen Stoßes und das ballistische Pendel
65	294	Die Bewegung in Gravitations- und elektromagnetischen Feldern
61	277	Bewegungen auf einem rotierenden Planeten
51	238	Brechung an einer Glaskugel, die Brechung des Lichtes an einer planparallelen Platte und die scheinbare Verschiebung durch eine Flüssigkeit
70	333	Finsternisse, eine nicht konventionale Darstellung
23	80	Geodätische Linien auf verschiedenen Oberflächen und die maximale Entfernung auf einer Kugeloberfläche
49	229	Der minimale Widerstand
62	282	Projektionen von Winkeln und Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche
67	305	Rotierende Scheibe, Bahnen in Hohlkugeln und der schwingende Körper im Gravitationsfeld — ein Versuch
11	34	Stabilität bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Virusdynamik
66	298	Wurfbahnen im Schwerfeld eines Planeten

### **2006**

Nr.	Seite	<b>Titel</b>
57	261	Ellipse als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke
56	258	Lichtstrom (Strahlungsleistung, Strahlungsfluß) und Raumwinkel durch die geneigte Ellipse
27	88	Der Raumwinkel durch ein geneigtes Rechteck
24	84	Der Raumwinkel durch ein gleichschenkliges Dreieck
25	85	Der Raumwinkel durch ein rechtwinkliges Dreieck
26	86	Der Raumwinkel durch ein senkrechtes Rechteck
54	251	Rechteck als Strahlungsquelle — Berechnung der Beleuchtungsstärke (Bestrahlungsstärke) im Vakuum

## *Chronologisches Titelverzeichnis*

### **2007**

Nr.	Seite	Titel
53	247	Der Lichtstrom durch das geneigte Rechteck im Medium
55	254	Rechteck als Strahler — die Beleuchtungsstärke im Medium

### **2009**

Nr.	Seite	Titel
72	342	Ein Beobachter auf einen unregelmäßigen Körper
05	21	Einbeschriebene Pyramide und Pyramidenstumpf
58	265	Geschwindigkeit und Temperatur
60	270	Gravitationsbeschleunigung bei Rotationsellipsoid, Kugel und allgemeinen Rotationskörper
69	318	Die scheinbare Helligkeit von Planeten
44	207	Schwebende Hohlkugel in einer Flüssigkeit
21	74	Die 4. Seite und der Flächeninhalt des Sechsecks

### **2010**

Nr.	Seite	Titel
47	217	Seifenblasen

### **2012**

Nr.	Seite	Titel
17	63	Die Diagonalen im regelmäßigen n-Eck
04	16	Einbeschriebene Dreiecke, Trapeze und Rechtecke
06	23	Extremale Winkel
33	155	Der vertikale Looping
07	25	Das Zollstockproblem

### **2013**

Nr.	Seite	Titel
30	106	Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit auf Rotationskörperschalen
28	91	Lineare und Nichtlineare Regression mit Meßreihen
01	7	Zurückführung von 3-dimensionalen Integralen auf 1-dimensionale